

LABORATORIO DI FISICA MODERNA PLS 2023-'24

M.L. De Giorgi, L. Martina

Dipartimento di Matematica e Fisica «Ennio De Giorgi»

Università del Salento

Sezione INFN - Lecce

*Misura della Carica Elettrica Elementare:
l'esperienza di Millikan*

21/1/2025

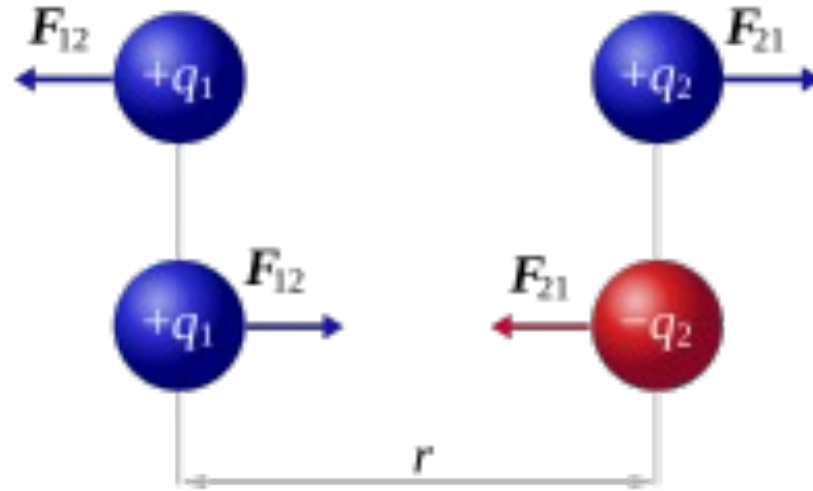
La Forza di Coulomb e la carica elettrica

La carica elettrica è la proprietà fondamentale della materia, che mostra attrazione elettrostatica in presenza di altra materia, anch'essa dotata di carica.

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^2}$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1.$$



$$|\mathbf{F}_{12}| = |\mathbf{F}_{21}| = k_e \frac{|q_1 \times q_2|}{r^2}$$

La carica elettrica può assumere un valore qualunque, oppure è un multiplo di un valore fondamentale?

Scopo dell'esperienza

- 1) Verificare l'esistenza di una carica elettrica fondamentale: e della quale ogni altra carica è un multiplo intero

Principio di quantizzazione della carica elettrica

- 2) Misurare il valore di tale carica elettrica fondamentale
- 3) Usare il Metodo delle *goccioline d'olio elettrizzate* sviluppato da R. Millikan.



Cenni storici

- Nel periodo 1909-'13 Robert Millikan fu il primo a misurare la carica dell'elettrone, eseguendo l'esperimento della "goccia d'olio".
- Il lavoro gli valse, 10 anni più tardi, il premio Nobel.
- Il valore attualmente noto della $e = 1.602\,176\,565(35) \times 10^{-19} \text{ C}$

The NIST Reference on
Constants, Units, and Uncertainty

Fundamental Physical Constants

https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?e|search_for=electron+cha

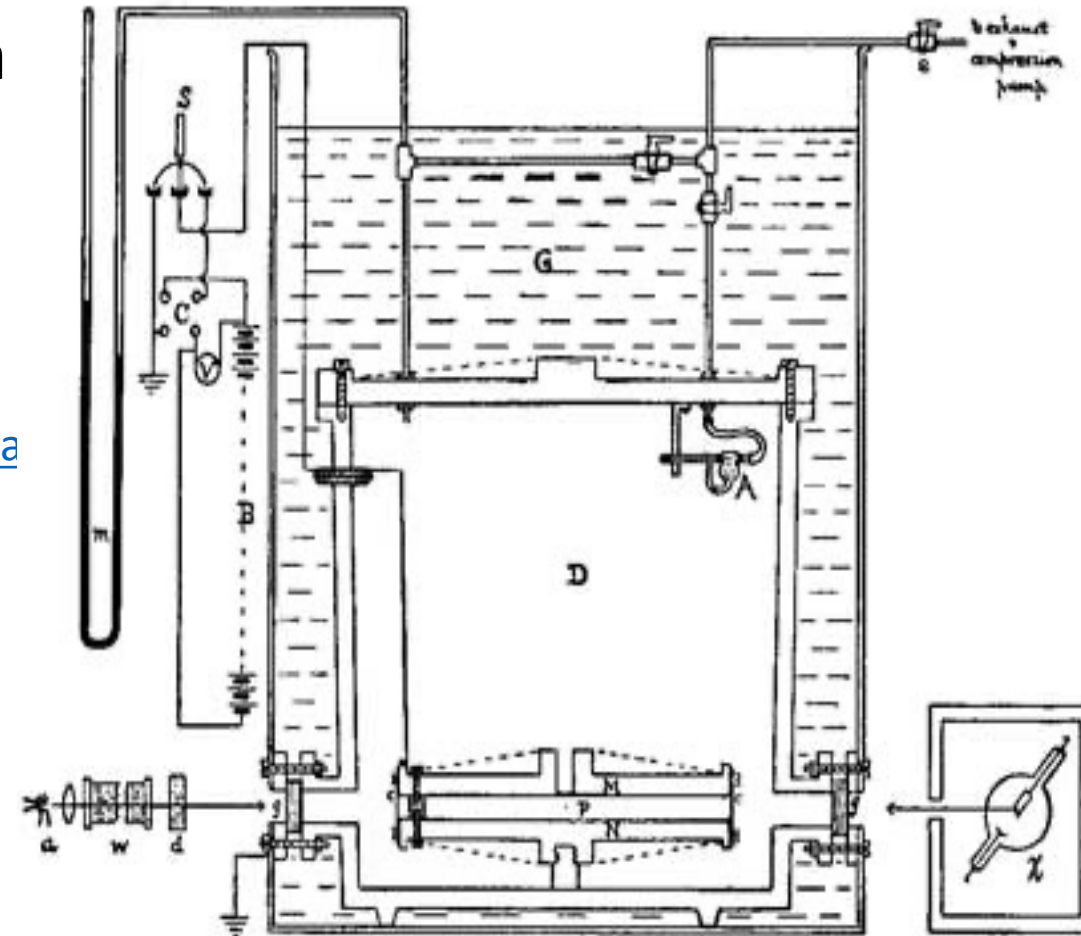
Tabella Costanti della Fisica

<http://pdg.lbl.gov/2014/reviews/rpp2014-rev-phys-constants.pdf>

<https://history.aip.org/exhibits/gap/Millikan/Millikan.html>

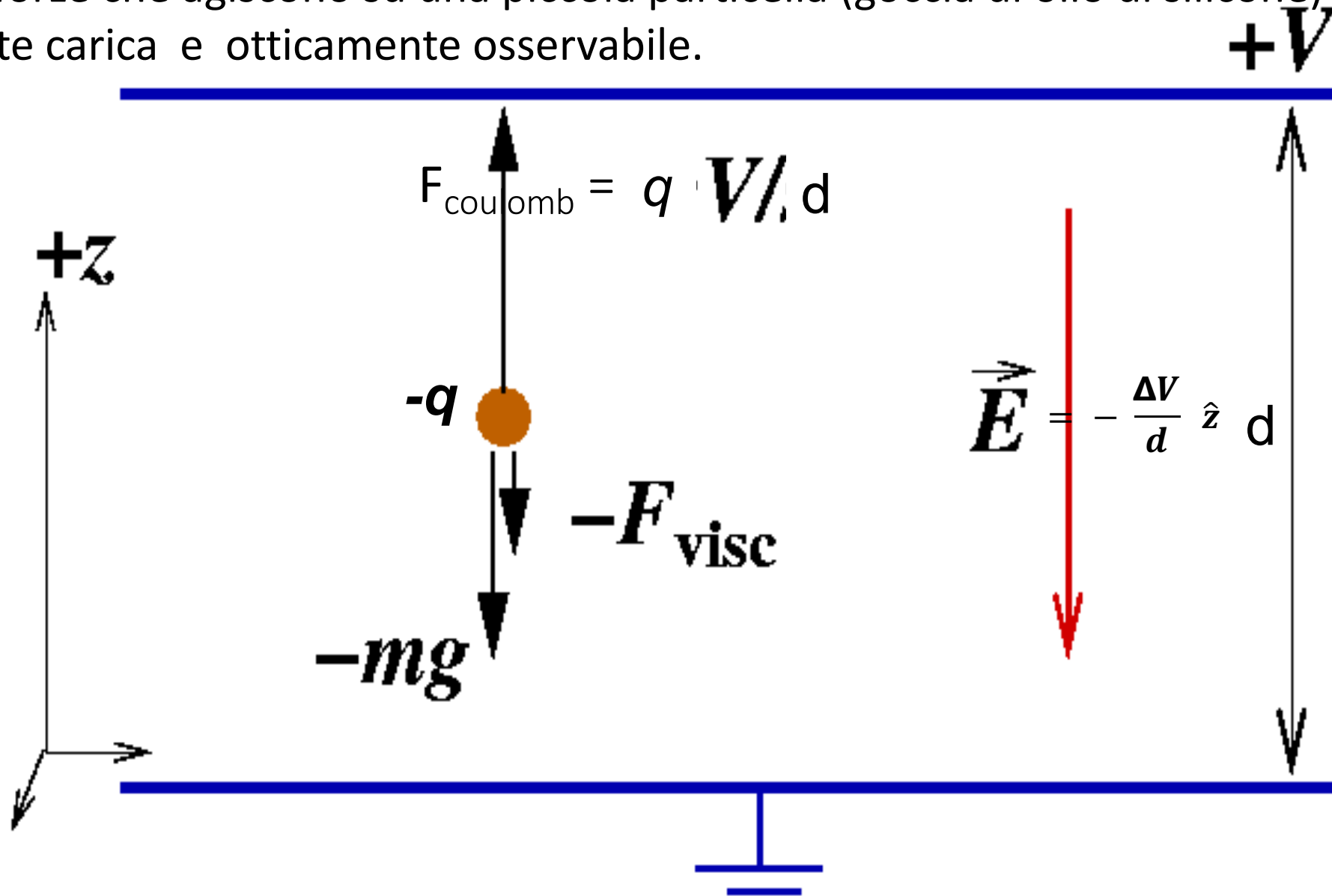
R. Millikan, Physical Review , vol. II ser II (1913) p. 109-143

Il nuovo Amaldi per i licei scientifici, Cap. 27 n. 5



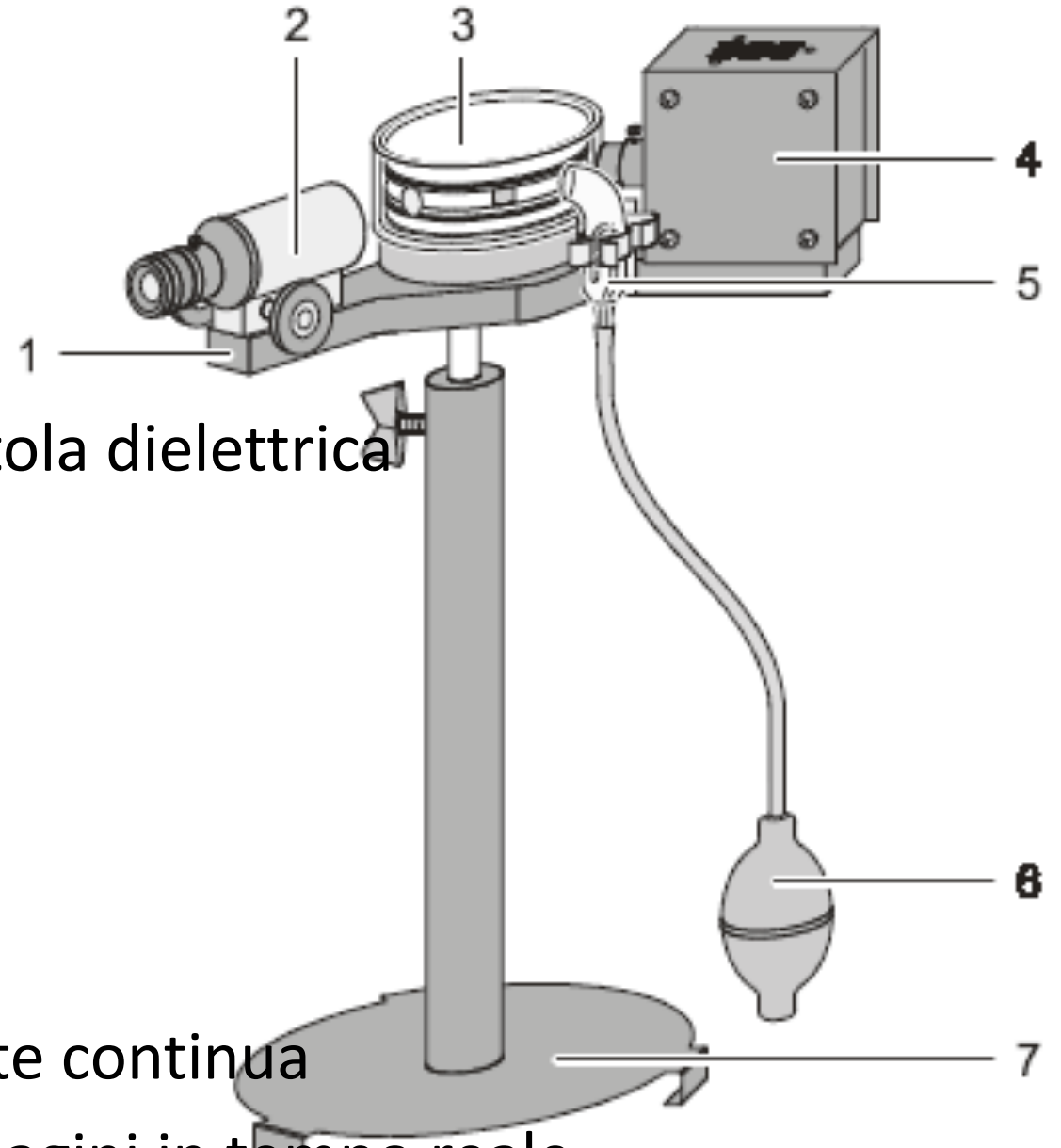
L'idea della misura

Confrontare forze che agiscono su una piccola particella (goccia di olio di silicone) elettricamente carica e otticamente osservabile.



L'apparato strumentale

- Piano di base
- Microscopio con oculare e micrometro
- Condensatore piano racchiuso in una scatola dielettrica
- Proiettore per l'illuminazione
- Nebulizzatore
- Pompetta manuale
- Base d'appoggio
- Olio di silicone
- Alimentatore regolabile a tensione corrente continua
- Video-camera per l'acquisizione delle immagini in tempo reale



Dati tecnici e Parametri ambientali

- Distanza tra le armature del condensatore: $d = 5.7 \pm 0.1$ mm

- Densità dell'olio di silicone e dell'aria

➤ $\rho = 0.877$ g/cm³ (a 15°C)

$\rho = 0.871$ g/cm³ (a 25°C)

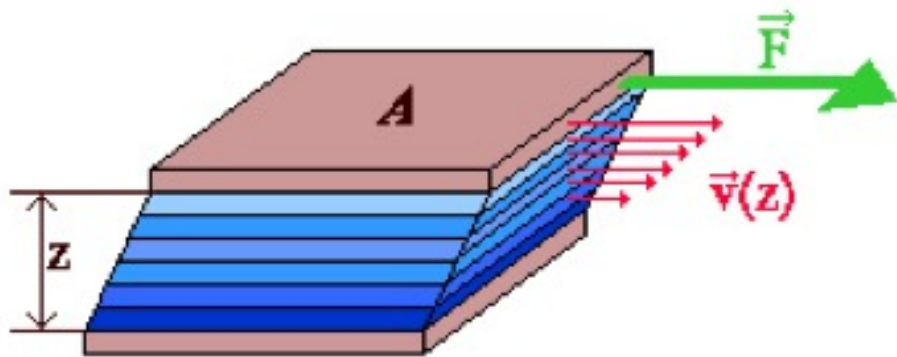
➤ $\rho_{\text{aria}} = 1.225 \times 10^{-3}$ g/cm³ (a 15°C)

$\rho_{\text{aria}} = 1.185 \times 10^{-3}$ g/cm³ (a 25°C)

- Viscosità dell'aria

$\eta_{\text{aria}} = 1.813 \cdot 10^{-5}$ Pa s (20 °C)

$\eta_{\text{aria}} = 1.907 \cdot 10^{-5}$ Pa s (40 °C)



Sforzo tangenziale = $\frac{F}{A} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z}$

Coefficiente di viscosità dinamica = η Pa s

$1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2}$

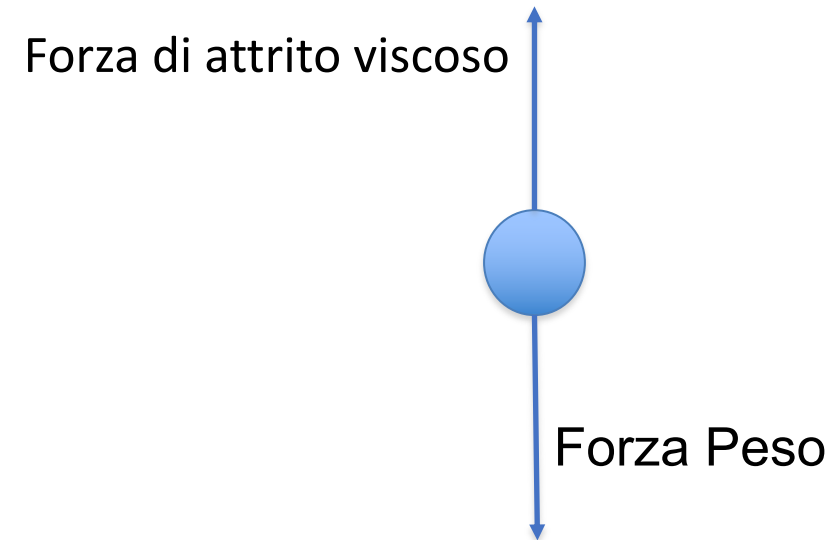
- Ingrandimento dell'oculare: 10
- Ingrandimento dell'obiettivo: 2
- Scala del micrometro: 5.0 mm
- Graduazione della scala: nominale 0.50 mm/divisione grande
misurata $l_0 = (0.493 \pm 0.009)$ mm.
- Intervallo di tensione dell'alimentatore: 0-600 V

λ

Modellizzazione

• Le forze che agiscono verticalmente sulla goccia sono:

1. la forza peso (mg),
2. la spinta di Archimede. (trascurabile)
3. L'attrito viscoso (F_{visc})
4. la forza coulombiana ($q E$)



Forza di attrito viscoso di Stokes $F_{visc} = -6 \pi R \eta \mathbf{v}$

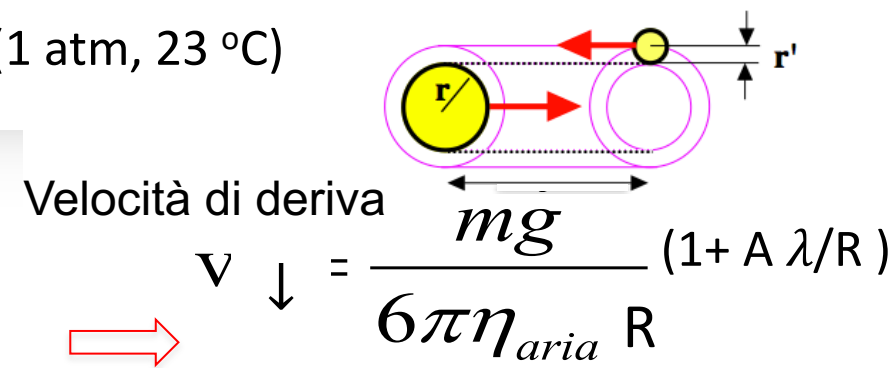
Forza di attrito viscoso $F_{visc} = -6 \pi R \eta \mathbf{v} / (1 + A \lambda/R)$

+ correzione di scivolamento di Cunningham

libero cammino medio tra molecole di aria $\lambda = 0.07 \mu m$, $A = 0.817$ (1 atm, 23 °C)

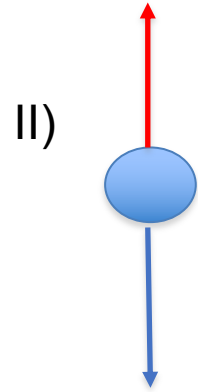
l) **Equilibrio tra
Forza Peso e
Attrito Viscoso**

$$m g = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho g = \frac{6\pi R \eta v_{\downarrow}}{(1 + A \lambda/R)}$$



$$\Rightarrow (1 + A\lambda/R)^{1/2} R = \sqrt{\frac{9\eta}{2\rho g} v_{\downarrow}} \Rightarrow R \approx \sqrt{\frac{9\eta}{2\rho g} v_{\downarrow}} - \frac{A\lambda}{2}$$

Modellizzazione - 2



Equilibrio tra
Forza Peso, Forza di attrito
e Forza di Coulomb

$$\frac{4\pi}{3} R^3 \rho g + \frac{6\pi R \eta v_{\uparrow}}{(1 + A \lambda/R)} = q \frac{\Delta V}{d}$$

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

Campo elettrico
in un condensatore piano

$$q = \frac{d}{\Delta V} \frac{6\pi\eta R}{1 + A\lambda/R} (v_{\uparrow} + v_{\downarrow}) \approx \frac{6\pi\eta d}{\Delta V} (R - A\lambda)(v_{\uparrow} + v_{\downarrow})$$

Carica della gocciolina

$$q = \frac{6\pi\eta d}{\Delta V} \left(\sqrt{\frac{9\eta}{2\rho g}} v_{\downarrow} - \frac{3}{2} A \lambda \right) (v_{\uparrow} + v_{\downarrow})$$

Procedura sperimentale - 1

- Agendo sulla pompetta si immettono delle goccioline d'olio tra le armature del condensatore piano, contenuto all'interno di una scatola, attraverso due appositi forellini.
- Alcune goccioline si caricano elettricamente per strofinio con l'aria (con carica q).
- Si controllano solo le cariche che si dirigono verso l'alto sotto l'azione del campo elettrico ($V > 0$), quindi contro il campo gravitazionale. La polarità delle armature ci dice che si tratta di cariche negative.

Dobbiamo misurare :

- La d.d.p. V dal Voltmetro dell'alimentatore
- Le velocità di deriva v_{\downarrow} e v_{\uparrow} da misure di
 - intervallo spaziale s prefissato sul micrometro
 - il tempo t necessario per percorrerlo con un cronometro

Procedura sperimentale -2

- I. Si fissi il potenziale al valore di fondo scala
- II. Si individui una goccia che «salga» e, agendo sul potenziometro, la si fermi in una posizione di riferimento.
- III. Si scelga un traguardo a distanza **s-su** . Si registri **s-su**.
- IV. Si porti il potenziale ad un valore più alto e si faccia partire il cronometro: si registri il potenziale **V**.
- V. Si segua la particella fino al raggiungimento del traguardo e si blocchi il cronometro. Si registri il tempo **t-su** misurato dal cronometro (*nel caso di video l'intervallo tra due fotogrammi è $dt = 1/25 \text{ sec}$*)
- VI. Si abbassi il potenziale fino a fermare la gocciolina
- VII. Si scelga un traguardo a distanza **s-giù** . Si registri **s-giù**.
- VIII. Si ponga $V=0$ e si faccia partire il cronometro
- IX. Si segua la particella fino al raggiungimento del traguardo e si blocchi il cronometro. Si registri il tempo **t-giù** misurato dal cronometro
- X. Riportare di volta in volta gli errori di misura

Elaborazione dei Dati

- Preparare una tabella con i dati misurati

Parametri	Parametri	D(Parametri)	Dr(Parametri)	V	DV	DrV	s-su	D(s-su)	Dr(s-su)	t-su	D(t-su)	Dr(t-su)	s-giù	D(s-giù)	Dr(s-giù)	t-giù	D(t-giù)	Dr(t-giù)
T (K)	296	2	0,007 Volt	Volt			10 ⁻³ m	10 ⁻³ m		sec	sec		10 ⁻³ m	10 ⁻³ m		sec	sec	
rho (kg/m ³)	0,8722	0,001	0,001	600	2	0,003	2	0,25	0,125	15,41	0,1	0,01	2	0,25	0,13	13,11	0,1	0,01
eta (10 ⁻⁵ Pa s)	1,8271	0,001	0,001	600	2	0,003	1	0,25	0,25	33,25	0,1	0,00	1	0,25	0,25	7,7	0,1	0,01
g (m/sec ²)	9,80247	0,00001	0,000	600	2	0,003	1	0,25	0,25	4,28	0,1	0,02	1	0,25	0,25	21,42	0,1	0,00
A	0,817	0,001	0,001	600	2	0,003	1	0,25	0,25	16,25	0,1	0,01	1	0,25	0,25	8,51	0,1	0,01

- Calcolare

$$v_{\uparrow} = s_{\uparrow} / t_{\uparrow} \quad e$$

$$v_{\downarrow} = s_{\downarrow} / t_{\downarrow}$$

v-su	Dr(vu-su)	v-giù	Dr(v-giù)
10 ⁻³ m/sec		m/sec	
0,191	0,11	0,195	0,17

- Calcolare il raggio della goccia R e q

R nudo	Cunningham	R corretto	Dr(R)	D(Rcorretto)	q	Dr(q)	D(q)	q/e
10 ⁻⁶ m	10 ⁻⁶ m	10 ⁻⁶ m		10 ⁻⁶ m	10 ⁻¹⁹ C		10 ⁻¹⁹ C	
0,383	0,057	0,440	0,058	0,026	2,75	0,21	0,58	1,7
0,353	0,057	0,411	0,114	0,047	1,40	0,40	0,56	0,9
0,212	0,057	0,269	0,101	0,027	1,16	0,39	0,45	0,7
0,336	0,057	0,393	0,113	0,044	1,47	0,39	0,58	0,9

Studio delle incertezze

- Le principali fonti di incertezza derivano dalle misure di **s e t**

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta t}{t}$$

- Altre fonti di incertezza rilevanti riguardano:
 - Dipendenza dei valori di η e ρ dalla temperatura
 - Correzione da slittamento

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R_{nudo}}{C_{unn.} + R_{nudo}}, \quad \frac{\Delta R_{nudo}}{R_{nudo}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \eta}{\eta} + \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta v_{\downarrow}}{v_{\downarrow}} \right)$$

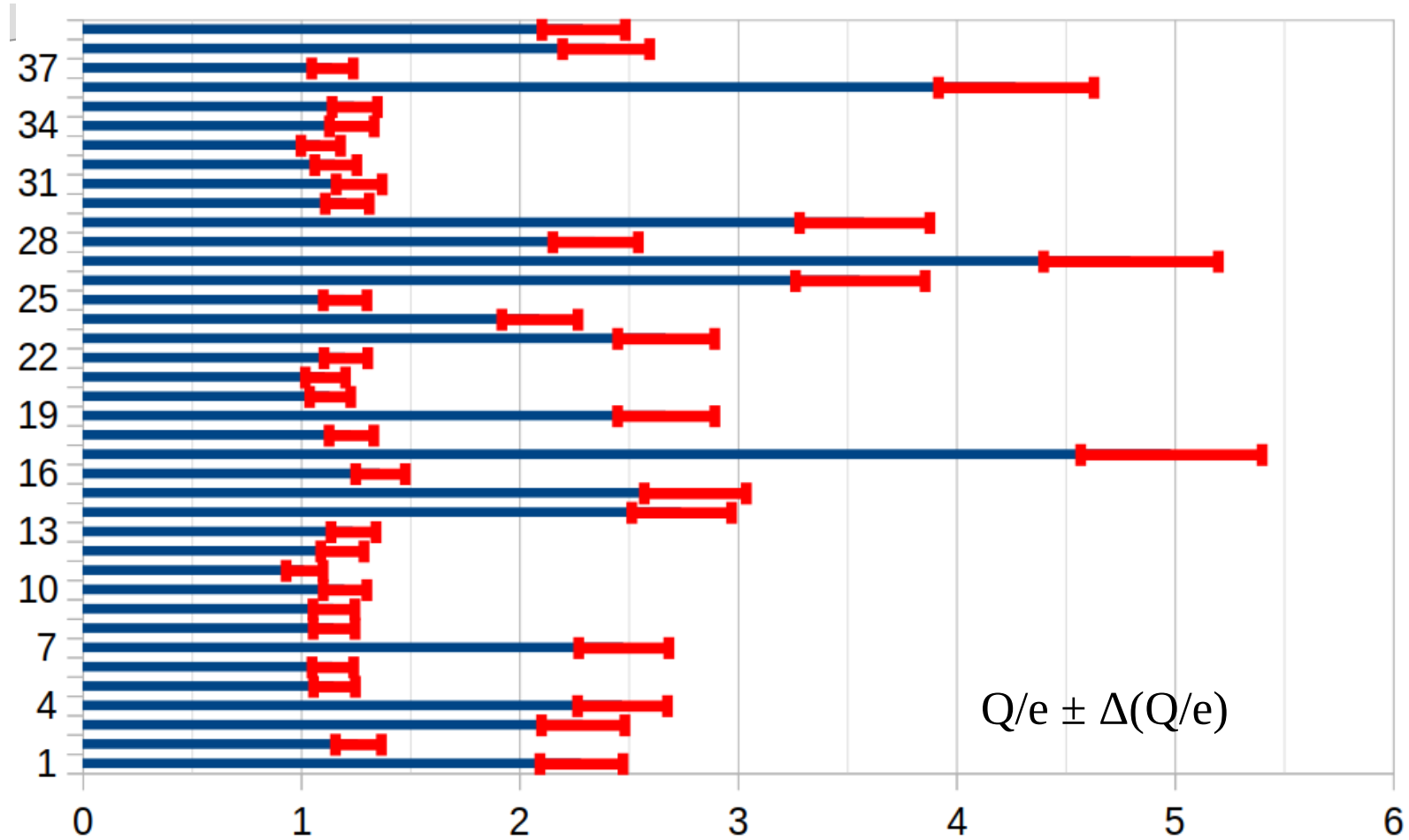
- $$\frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta (v_{\downarrow} + v_{\uparrow})}{v_{\downarrow} + v_{\uparrow}}$$

- Si stimi l'impatto di tali incertezze sulla misura finale

Rapporto carica misurata/Valore di e tabulato

Velocità v↓		Raggio attrito corretto			Rapporto con e CODATA		
vg	vs	r0	r1	q	n	eta	A
3,34E-05	9,28E-05	9,42979E-07	8,71267E-07	3,46043E-19	2,162767205	1,82E-05	0,817
5,35E-05	4,04E-05	6,22285E-07	5,53277E-07	1,56191E-19	0,976192147		
3,25E-05	9,46E-05	9,52335E-07	8,80569E-07	3,52648E-19	2,204050894		
1,44E-04	7,02E-05	8,20464E-07	7,49557E-07	4,98937E-19	3,118359222		
6,80E-05	9,68E-05	9,63442E-07	8,91614E-07	4,63599E-19	2,897491867		
1,12E-04	7,44E-05	8,44698E-07	7,73615E-07	4,49463E-19	2,809144224		
5,34E-05	3,97E-05	6,17025E-07	5,48083E-07	1,53227E-19	0,957670674		
8,47E-05	1,19E-04	1,06979E-06	9,9743E-07	6,47576E-19	4,047352208		
2,25E-05	1,23E-04	1,0858E-06	1,01337E-06	4,697E-19	2,935622046		
4,99E-05	1,34E-04	1,13416E-06	1,06152E-06	6,24433E-19	3,902707302		
5,07E-05	3,76E-05	6,00094E-07	5,31367E-07	1,40314E-19	0,876963184		
5,44E-05	3,62E-05	5,88725E-07	5,20151E-07	1,40576E-19	0,878601625		
5,39E-05	4,09E-05	6,25817E-07	5,56766E-07	1,58788E-19	0,992426937		
5,66E-05	4,16E-05	6,31611E-07	5,62489E-07	1,66468E-19	1,04042358		
1,97E-05	1,42E-04	1,16624E-06	1,09347E-06	5,65849E-19	3,536556831		
3,35E-05	9,20E-05	9,38956E-07	8,67267E-07	3,4255E-19	2,140936767		
4,66E-05	5,26E-05	7,10324E-07	6,40354E-07	1,94326E-19	1,214534677		
8,38E-05	5,47E-05	7,23824E-07	6,53726E-07	2,77367E-19	1,733540786		
6,86E-05	9,44E-05	9,51026E-07	8,79267E-07	4,51568E-19	2,822300143		
6,65E-05	3,45E-04	1,81716E-06	1,74272E-06	2,35096E-18	14,69352918		
6,23E-05	3,15E-05	5,49308E-07	4,81302E-07	1,33233E-19	0,832705288		
3,45E-05	1,10E-04	1,02869E-06	9,56516E-07	4,39663E-19	2,747892437		

Rappresentazione Grafica dei Dati



Rappresentazione per Classi

$q \times 10^{19}$	$q >$	$De(q) >$	$q-De(q)$	$q - De(q)$	$\langle q \rangle$	sigma	$q_i - q_1$	n1	$(q_i - q_1)/n_1$	De1
4,88	3,29	0,54	2,75	3,83						
5,74	3,43	0,56	2,87	3,99						
10,95	3,77	0,57	3,20	4,35	3,77	0,41				
6,48	4,13	0,68	3,45	4,81						
5,00	4,21	0,47	3,73	4,68			1,05	1,00	1,05	0,72
8,14	4,36	0,63	3,73	5,00						
13,18	4,88	0,56	4,32	5,44	4,82	0,31				
5,04	5,00	0,68	4,32	5,67						
16,21	5,04	1,09	3,94	6,13						
3,29	5,40	0,53	4,86	5,93			2,01	2,00	1,01	0,36
6,00	5,48	0,91	4,57	6,39						
5,58	5,58	0,93	4,65	6,52	5,78	0,40				
4,13	5,74	0,76	4,97	6,50						
3,43	6,00	0,99	5,01	6,99			6,22	4,00	1,55	0,10
10,87	6,48	0,87	5,61	7,36						
15,35	8,14	1,78	6,36	9,92						
5,48	10,87	1,85	9,02	12,72	9,99	1,60				
5,40	10,95	1,90	9,05	12,85			11,15	6,00	1,86	0,53
3,77	13,18	2,27	10,91	15,45						
4,21	15,35	1,13	14,22	16,49	14,91	1,56	Stima intero			
4,36	16,21	2,23	13,98	18,44						

NB: Esempio basato su una serie di misure diversa dalla precedente

q in ordine crescente

Intervalli di valori per le q
Individuazione delle classi

Valori medi nelle classi

Differenze con la classe 1

e
De
1,41
Valori medi delle stime
0,23
Errore sulla media

In questo esempio, l'errore stimato della misura è del 23%

Test del χ^2

E' un metodo statistico che consente di verificare se due grandezze, diciamo x e y , siano legate da una certa ipotetica relazione $y = f(x)$, supponendo di aver misurato N coppie (x_i, y_i) , con N molto grande, e supponendo che le cause di errore nelle misure siano molto grandi e distribuite secondo la legge di Gauss (distribuzione Normale).

Se il valore atteso di y_i sia $f(x_i)$, si potrebbe *verificare* la bontà di questa ipotesi CALCOLANDO che la quantità

$$\chi^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i))^2 / \sigma_i^2 \leq 1$$

dove σ_i sono le deviazioni standard della misura x_i .

Nel caso della misura della carica fondamentale la quantità misurata è $x_i = q_i/e$, dove e è il supposto valore vero della carica fondamentale. In tal caso $f(x_i)$ deve essere un numero intero, corrispondente a y_i . Pertanto, bisogna

verificare che

$$\chi^2(e) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N ([q_i/e] - q_i/e)^2 / (\Delta q_i/e)^2 \leq 1$$

per un opportuno valore e , che ora è inteso variabile.

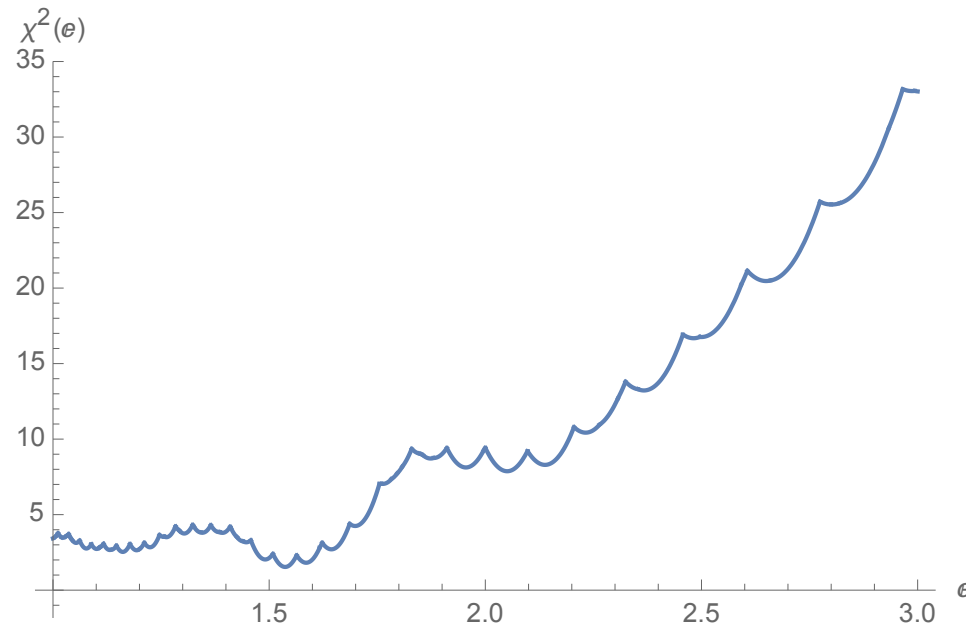
Applicazione del test del χ^2

Esempio :

Cariche misurate

{6.48, 6.24, 5.66, 4.99, 4.7, 4.64, 4.52, 4.49, 4.4, 3.53, 3.46, 3, 43, 2.77, 1.94, 1.66, 1.59, 1.56, 1.53, 1.41, 1.4, 1.33} x 10⁻¹⁹ C

Deviazione standard 0.20 x 10⁻¹⁹ C (uniforme per tutti i valori)



Come si vede dal grafico, il valore che minimizza χ^2 è $e = 1.51 \times 10^{-19} \text{ C} \pm 0.20 \times 10^{-19} \text{ C}$