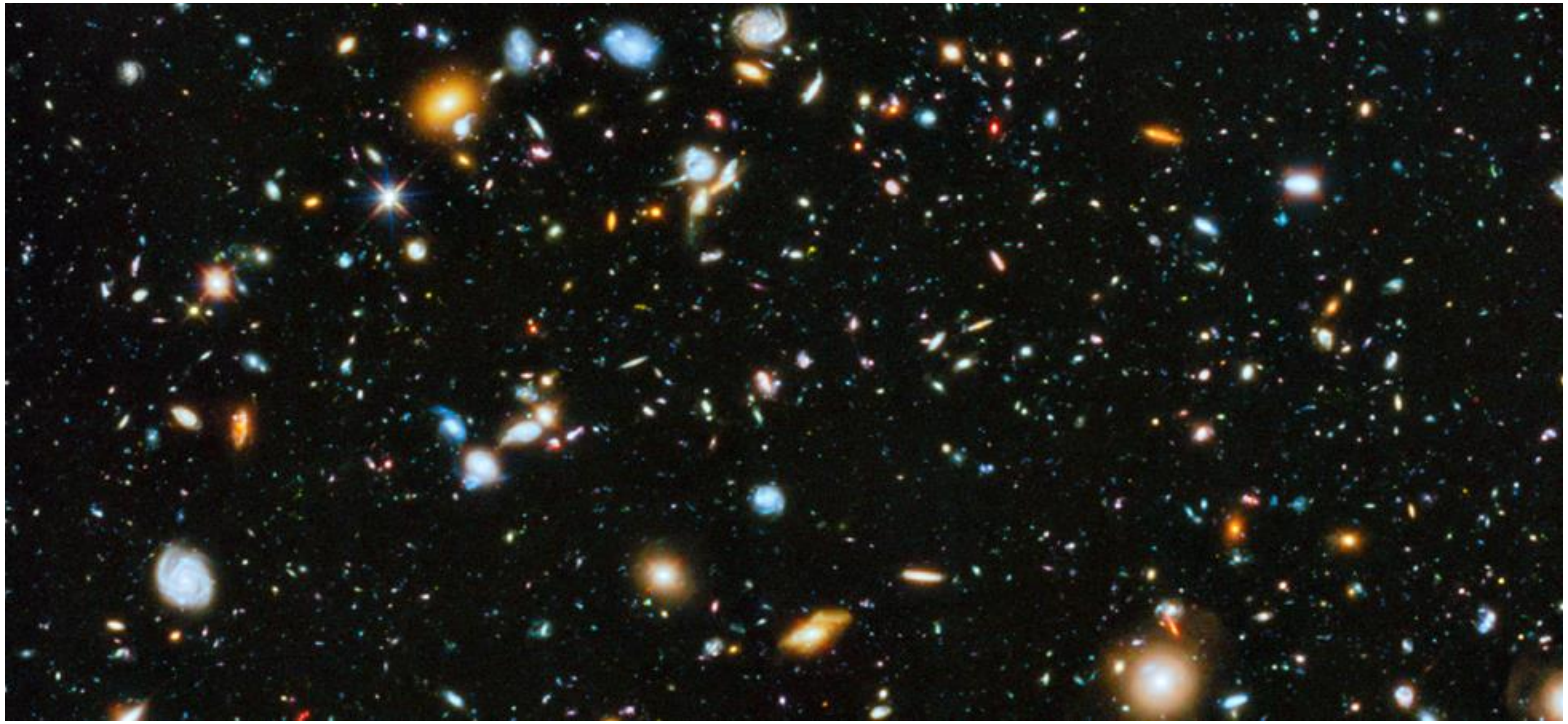
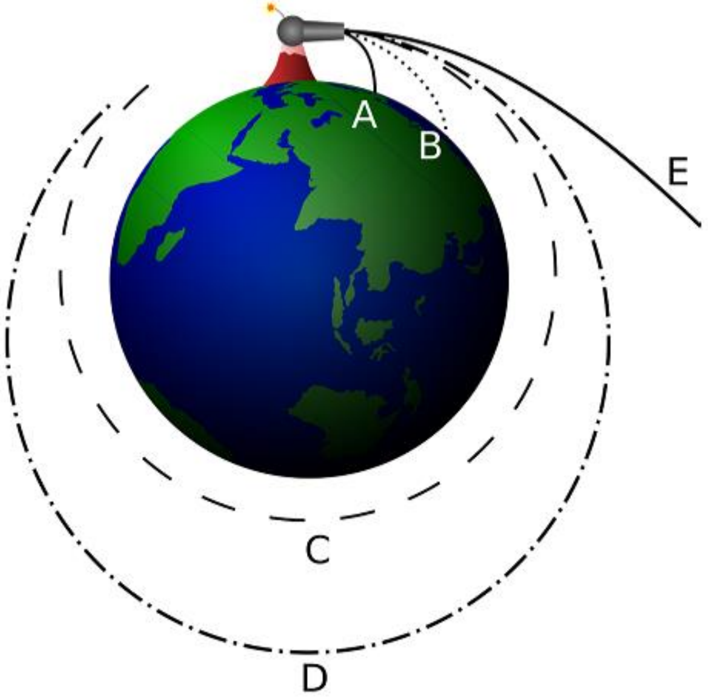
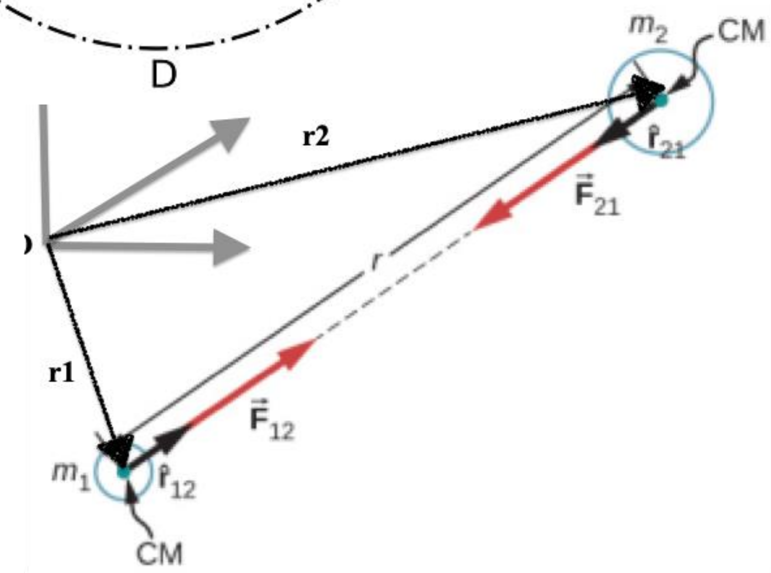
Sulla gravitazione di Newton



Il nostro Universo visibile contiene miliardi di galassie, la cui stessa esistenza è dovuta alla forza di gravità, che è responsabile dell'energia prodotta da tutte le stelle, innescando reazioni termonucleari nelle stelle, consentendo al Sole di riscaldare la Terra e rendendo le galassie visibili da distanze insondabili. La maggior parte dei punti che vedete in questa immagine non sono stelle, ma galassie. (credito: NASA)

Gravità Newtoniana





1) La forza che agisce tra i corpi celesti ha la stessa natura di quella che determina il moto dei gravi sulla Terra

2) Le masse «gravitazionali» puntiformi m_1 e m_2 (>0) esercitano tra di loro la forza

$$\mathbf{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3}\mathbf{r}_{21}$$

dove $\mathbf{F}_{21}$ è la forza esercitata da **1** su **2**

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad \hat{\mathbf{r}}_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

G è la Costante di Gravitazione Universale

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

Domande 1

Da dove Newton ha desunto questa espressione della forza?

Qual è la relazione tra masse gravitazionali e inerziali?

Quante equazioni del moto si debbono scrivere in generale?

Come posso ridurre il numero di coordinate?

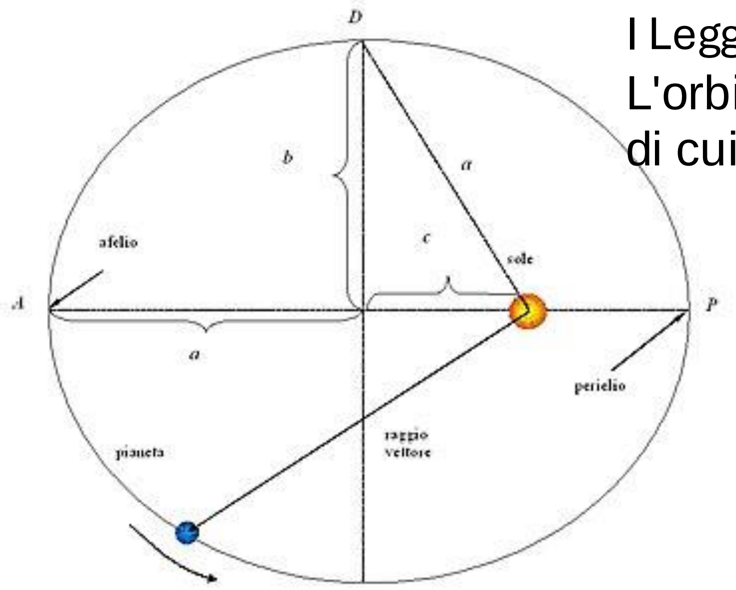
Conviene usare l’energia potenziale?

Cosa fare quando i corpi sono estesi ? *

Quali Verifiche Sperimentali ? *

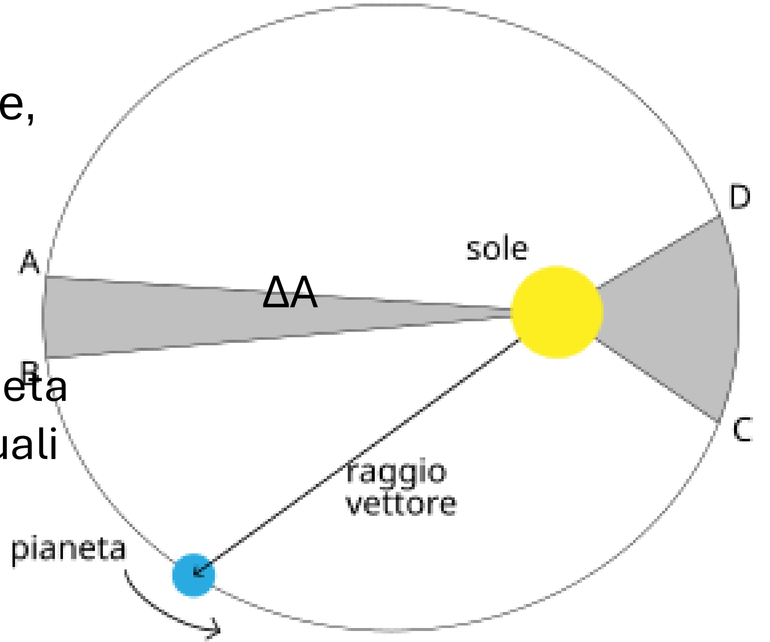
Quali Limiti di validità ? *

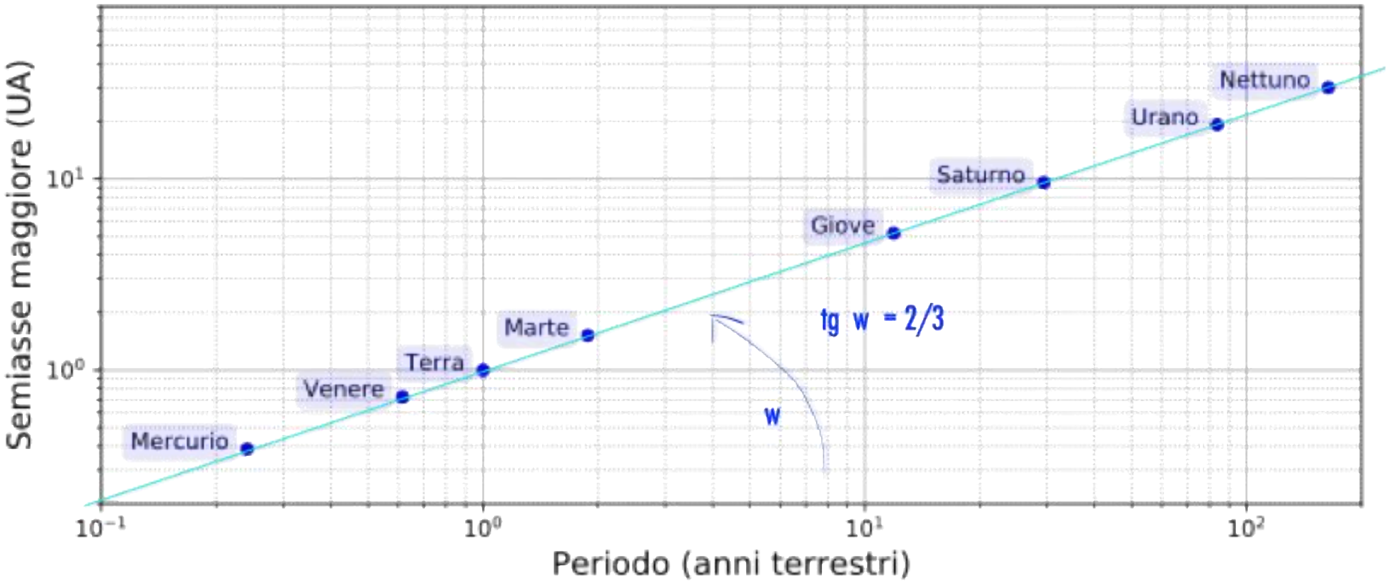
Cosa sapeva Newton ?



I Legge di Keplero
L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

II Legge di Keplero
Il raggio vettore dal Sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali





III Legge di Keplero
Il quadrato del periodo di rivoluzione (T) di un pianeta attorno al Sole è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita (**a**):

$$a^3/T^2 = K = \text{costante}$$

Come si possono combinare questi fatti?
Qual è la loro relazione con F_{12} ?

Le Equazioni del Moto per due masse $\mathbf{r}_1(t), \quad \mathbf{r}_1(t)$

Il moto è descritto da **6** variabili indipendenti !!!!

$((\Delta t \to 0)) \quad \frac{\Delta}{\Delta t}\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{v}_1(t) \quad \frac{\Delta}{\Delta t}\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{v}_2(t), \quad \frac{\Delta}{\Delta t}\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{a}_1(t) \quad \frac{\Delta}{\Delta t}\mathbf{v}_2(t) = \mathbf{a}_2(t)$

$$\frac{\Delta}{\Delta t} f = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Il Principio
della Dinamica
di Newton

$$m_1^I \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2^I \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{21}$$

III Principio di Newton

$$m_1^I \mathbf{a}_1(t) \quad + \quad m_2^I \mathbf{a}_2(t) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12} = 0$$

Simmetria per traslazioni spaziali

$$((\Delta t \to 0)) \quad = \quad \frac{\Delta}{\Delta t}\left(m_1^I \mathbf{v}_1(t)\right) + \frac{\Delta}{\Delta t}\left(m_2^I \mathbf{v}_2(t)\right) = \frac{\Delta}{\Delta t}\left(\mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t)\right) = \frac{\Delta}{\Delta t}\mathbf{p}_{tot}(t)$$

$$\mathbf{p}_{tot}(t) = \mathbf{P}_{iniz}$$

La quantità di moto totale del sistema delle due masse si conserva

Il Principio di conservazione
della quantità di moto

Conservazione della quantità di moto

$$\mathbf{p}_{tot}(t) = m_1^I \mathbf{v}_1(t) + m_2^I \mathbf{v}_2(t) = \frac{\Delta}{\Delta t}\left(m_1^I \mathbf{r}_1(t) + m_2^I \mathbf{r}_2(t)\right) = \mathbf{P}_{iniz}$$

$$m_1^I \mathbf{r}_1(t) + m_2^I \mathbf{r}_2(t) = (m_1^I + m_2^I)\mathbf{R} = \mathbf{P}_{iniz} t + (m_1^I + m_2^I) m_1^I \mathbf{r}_1(0) + m_2^I \mathbf{r}_2(0)$$

Moto del Centro di Massa :

esso è rettilineo uniforme determinato solo dalle condizioni iniziali

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{P}_{iniz}}{(m_1^I + m_2^I)} t + \frac{m_1^I \mathbf{r}_1(0) + m_2^I \mathbf{r}_2(0)}{(m_1^I + m_2^I)}$$

Coordinate Relative : $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R} + \frac{m_1^I}{(m_1^I + m_2^I)}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R} - \frac{m_2^I}{(m_1^I + m_2^I)}\mathbf{r}$$

Energia Cinetica Totale:

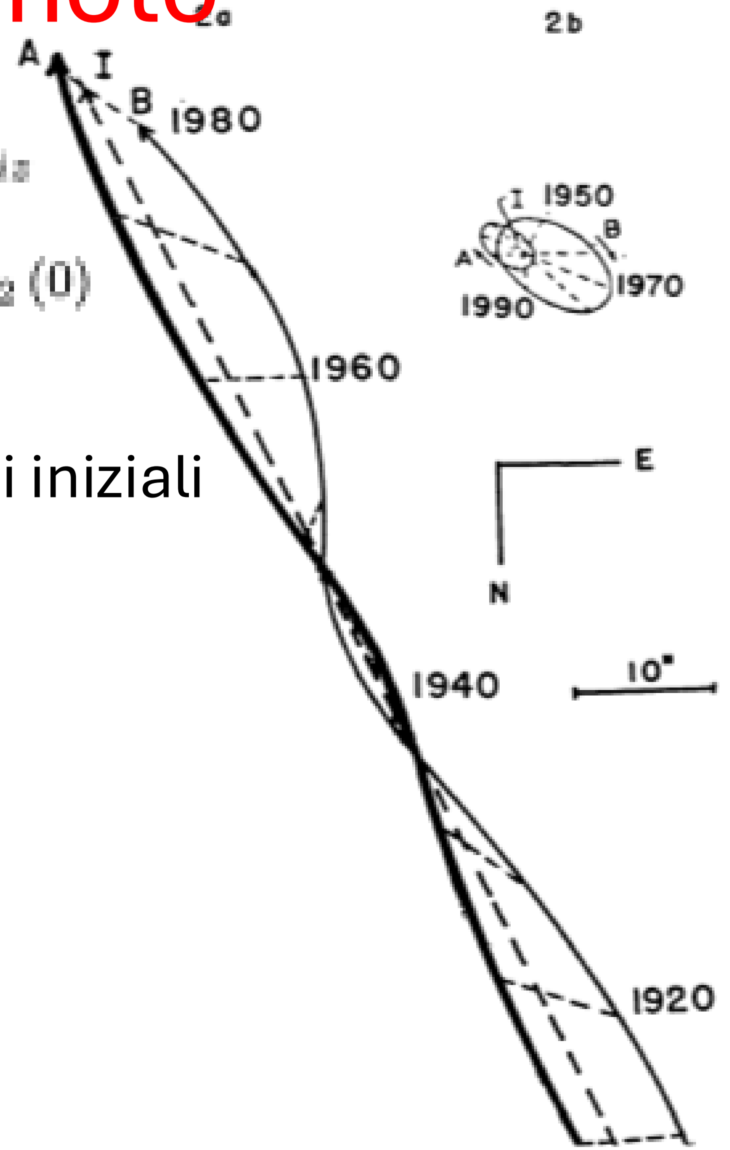


Fig. 2—a. Heliocentric paths of Sirius A, Sirius B, and the center of mass of the system, I.
b. Orbits of A and B around their common focus or center of mass.

L’Energia cinetica totale

costante

$$T = \tfrac{1}{2} m_1^I \mathbf{v}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2^I \mathbf{v}_2^2 = \frac{\mathbf{P}_{iniz}^2}{2(m_1^I + m_2^I)} + \tfrac{1}{2}\mu \mathbf{v}^2, \quad \mathbf{v} = \frac{\Delta}{\Delta t}\mathbf{r} \qquad \mu = \frac{m_1^I m_2^I}{m_1^I + m_2^I}$$

Massa ridotta

Mercury->	3.301*10^23 Kg	mu= 1.660*10^-7	x 1.988*10^30 Kg Massa Sole
Venus ->	4.867*10^24 Kg	2.448*10^-6	
Earth ->	5.97*10^24 Kg	3.00*10^-6	
Mars ->.	6.417*10^23 Kg	3.227*10^-7	
Jupiter ->.	1.898*10^27	0.000954	
Saturn->	5.683*10^26	0.0002857	
Uranus->	8.681*10^25	0.0000437	
Neptune ->	1.0243*10^26	0.0000515	

$$\mu \frac{\Delta}{\Delta t}\mathbf{v} = \mathbf{F} \qquad \mathbf{F}_{21} \rightarrow \mathbf{F} = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^2}\hat{\mathbf{r}}$$

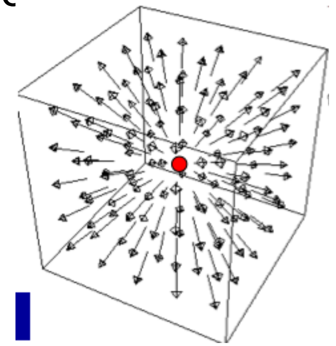
Il problema delle due masse in attrazione gravitazionale è ridotto a quello del moto di una sola particella, di Massa ridotta, sottoposta all’azione di un *centro di forze centrali, posto nel Centro di Massa* del sistema originario. Questa procedura è valida per qualunque forza di interazione che dipenda dalla posizione relativa dei due corpi

$$\mathbf{F}_{21} = \mathbf{f}\left(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)\right)$$

Ma ora la forza è ***centrale***

$$\mathbf{F}_{21} = \mathbf{f}\left(|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)|\right) = f\left(|\mathbf{r}|\right)\hat{\mathbf{r}}$$

Esempi : F. Coulomb $\mathbf{F} = k\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}|^2}\hat{\mathbf{r}}$ F. Yukawa $\mathbf{F}_{Yukawa} = -c\frac{|\mathbf{r}| + r_0}{r_0|\mathbf{r}|^2}\exp\left(-|\mathbf{r}|/r_0\right)\hat{\mathbf{r}}$



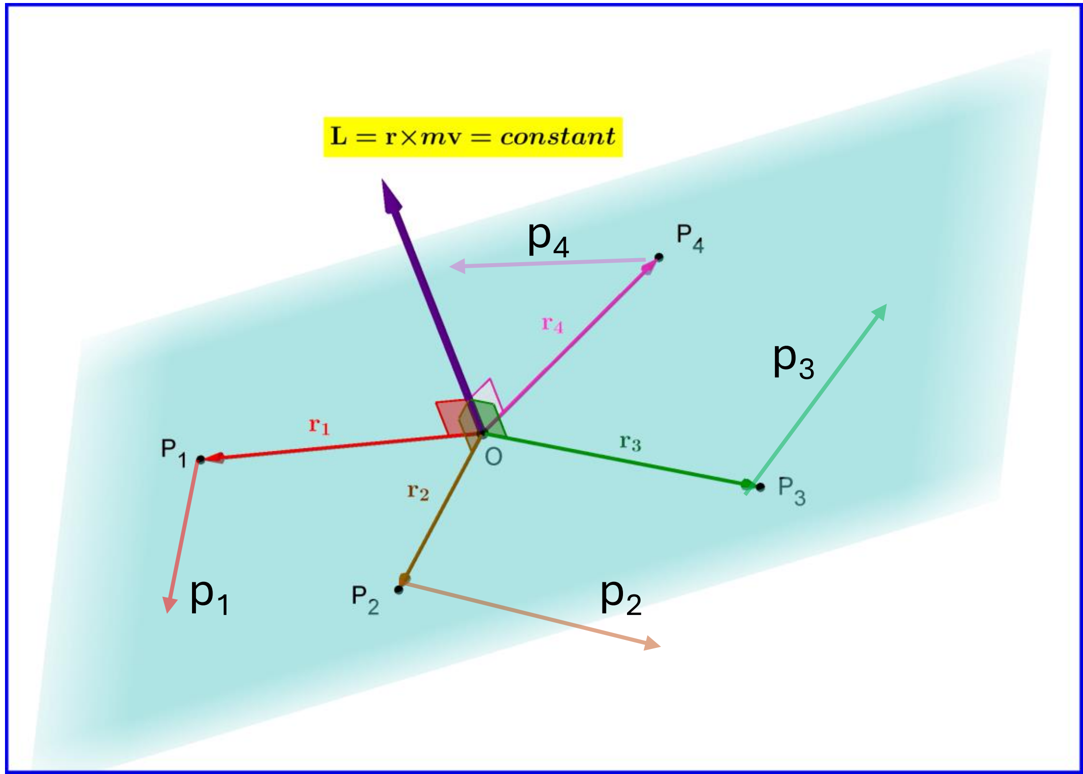
Forze Centrali e Momento Angolare

$$\mathbf{F} = f\left(|\mathbf{r}|\right)\hat{\mathbf{r}}$$

Simmetria del sistema per rotazioni

Momento Angolare $$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\mathbf{L} = \frac{\Delta}{\Delta t}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \left(\frac{\Delta}{\Delta t}\mathbf{r}\right) \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \left(\frac{\Delta}{\Delta t}\mathbf{p}\right) =$$
$$\mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mu\mathbf{v} \times \mathbf{v} + f\left(|\mathbf{r}|\right)\ \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$$



Conservazione del Momento Angolare !! $$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{iniz}$$

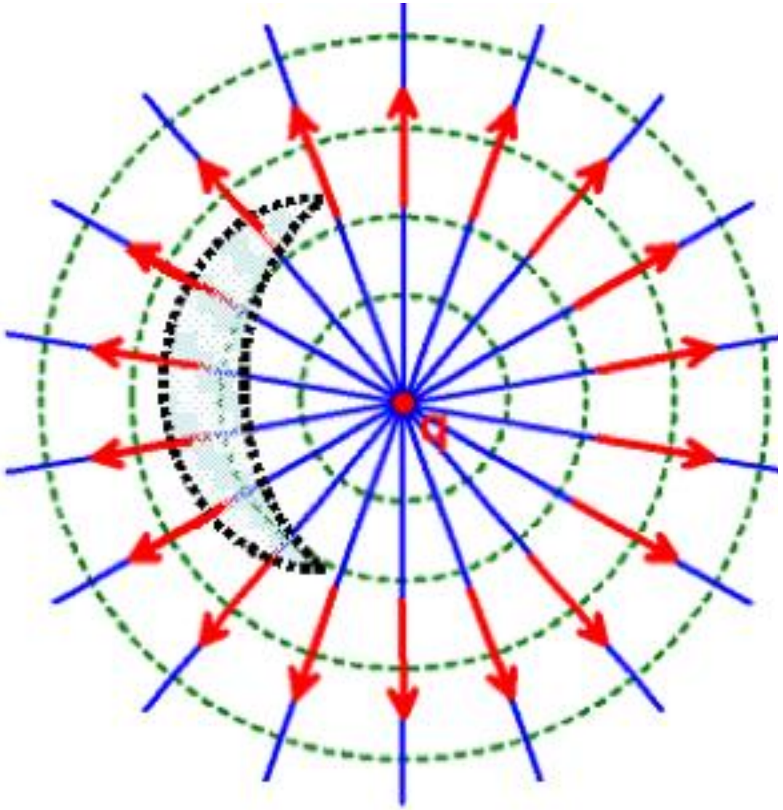
Il Moto avviene nel piano ortogonale a $\mathbf{L}_{iniz}$

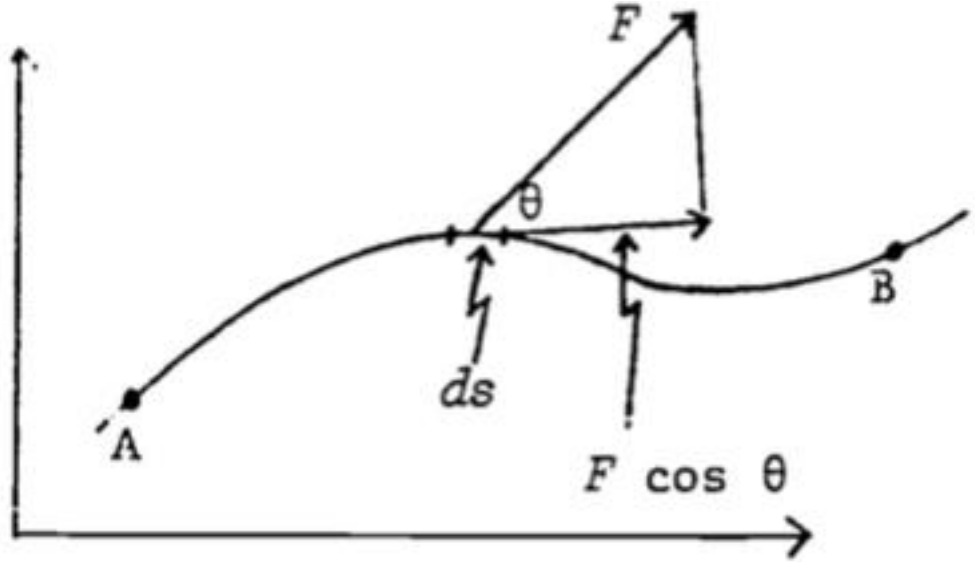
L’energia Potenziale di Forze Centrali

L’energia potenziale NON dipende dal cammino A – B , ma solo da | $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ |

$$\mathbf{F} = f\left(|\mathbf{r}|\right)\hat{\mathbf{r}}$$

$$U\left(\mathbf{r}_B\right) - U\left(\mathbf{r}_A\right) = -\mathcal{L}_{A\to B} = -\sum_{\Delta\mathbf{r},|\Delta\mathbf{r}|\to 0} \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$$





$$U\left(\mathbf{r}\right) = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|}$$

E. Potenziale gravitazionale

$$U_C\left(\mathbf{r}\right) = k\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}|}$$

E. Potenziale coulombiana

$$U_{Yukawa}(\mathbf{r}) = -c\frac{\exp(-|\mathbf{r}|/r_0)}{|\mathbf{r}|}$$

E. Potenziale Yukawa

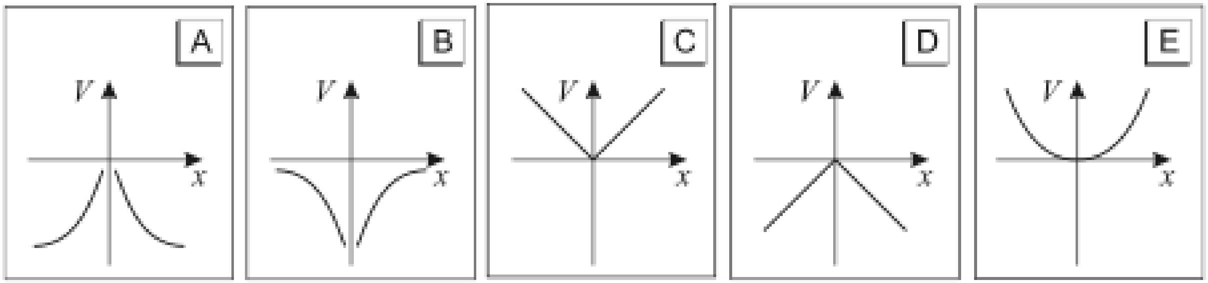
$$\mathbf{F} = -\frac{\Delta}{\Delta r}U\left(|\mathbf{r}|\right)\hat{\mathbf{r}} \qquad \left(r = |\mathbf{r}|\right)$$

Su un qualunque cammino chiuso il lavoro è nullo

U(∞) = 0

7

- Quale dei seguenti grafici rappresenta il potenziale gravitazionale V dovuto a una massa puntiforme posta in $x = 0$, in funzione della coordinata x?



QUESITO n. 7. – **RISPOSTA** ⇒ $\boxed{\text{B}}$

Il potenziale gravitazionale, anche ricordando l'analogia con il potenziale di un campo elettrostatico attratti ha la forma

$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \text{cost} \quad \text{ovvero, in funzione della coordinata } x, \quad V(x) = -\frac{GM}{|x|} + \text{cost}$$

L'unico grafico compatibile con questa forma è il B, avendo fissato la costante uguale a zero.

8

Un modulo lunare di massa 1850 kg sta scendendo verticalmente sulla superficie della Luna. Quando si trova a 2 km di altezza e ha una velocità di $87\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$, accende i motori per frenare.

- Quale dev'essere la spinta dei motori, supposta costante, se si vuole che il modulo si posi sulla superficie lunare con velocità nulla?

Trattare come uniforme il campo di gravità.

QUESITO n. 8

Fissando un asse verticale, orientato verso il basso, con l'origine nel punto in cui inizia la frenata, si ha

$$v_i = 87\,\text{m}\,\text{s}^{-1}, \quad v_f = 0; \quad s_i = 0, \quad s_f = 2\,\text{km}.$$

Le forze che agiscono sul modulo (spinta S e peso mg_L) sono costanti nel tempo, quindi il moto è uniformemente accelerato con accelerazione data dalla seconda legge della dinamica

$$mg_L - S = ma \Rightarrow a = g_L - \frac{S}{m}, .$$

Dalle equazioni del moto uniformemente accelerato si ottengono le leggi orarie

$$v_f = v_i + at \qquad s_f = s_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2.$$

Quindi, dalla prima $t = -v_i/a$; sostituendo nella seconda e ricordando che $v_f = 0$ e $s_i = 0$ si ottiene

$$-\frac{1}{2}v_i^2 = as_f = \left(g_L - \frac{S}{m}\right)s_f \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2s_f}mv_i^2 + mg_L = 6\,500\,\text{N}.$$

Allo stesso risultato si può arrivare, sempre per via cinematica, anche partendo dalla relazione, valida nel moto uniformemente accelerato:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\,\Delta s \quad \text{dalla quale si ottiene} \quad -\frac{1}{2}v_i^2 = as_f = \left(g_L - \frac{S}{m}\right)s_f$$

e si procede come sopra.

Si può anche usare la relazione tra lavoro delle forze non conservative ed energia meccanica E_M. Essendo la spinta S non conservativa e diretta in verso opposto allo spostamento $\Delta s = s_f - s_i = s_f$ si ha

$$-Ss_f = \Delta E_M = 0 - \left(\frac{1}{2}mv_i^2 + mg_L s_f\right) \quad \text{da cui si ottiene facilmente l'espressione per } S.$$

$$S = \frac{1}{2s_f}mv_i^2 + mg_L = 6\,500\,\text{N}.$$

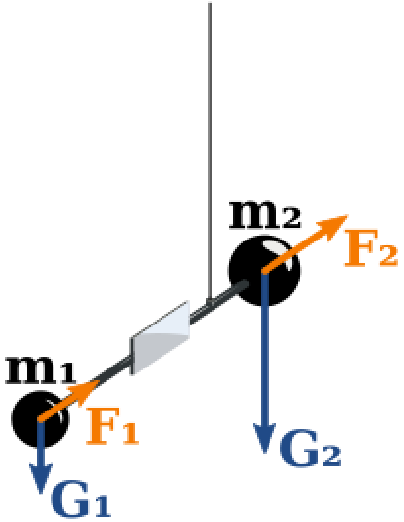
RIS ⇒ $\boxed{6\,450 \le S \le 6\,550 \quad [\text{N}]}$

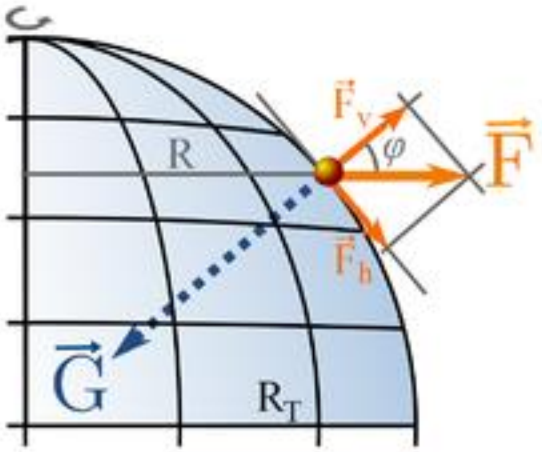
Energia Totale di due masse

$$E_{tot} = T + U = \tfrac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|}$$

Newton fa l'ipotesi che $m_k^I = m_k$ $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

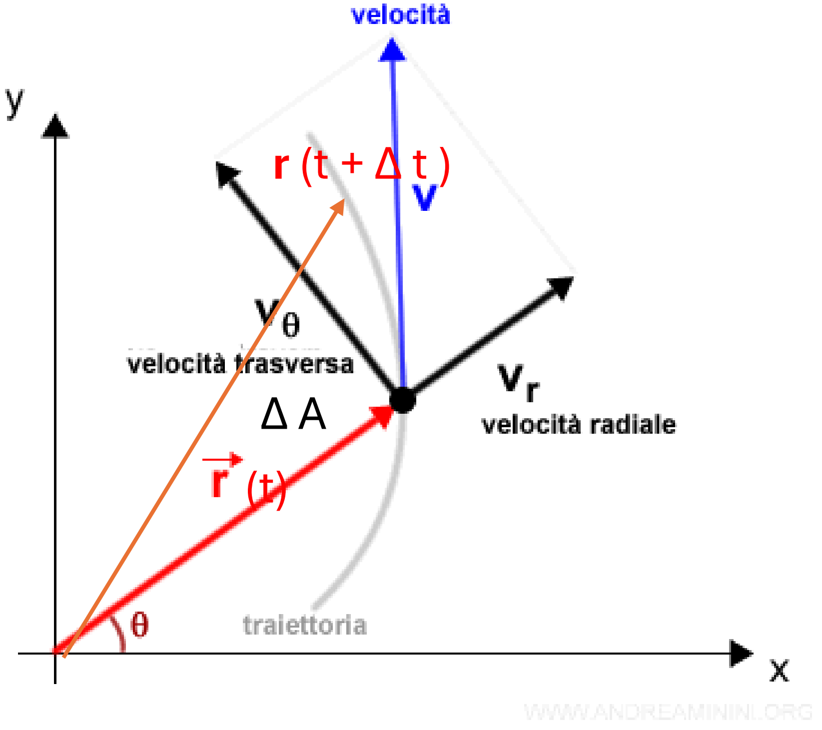
Principio di Equivalenza
in una zona delimitata dello spazio-tempo, è sempre possibile scegliere un opportuno sistema di riferimento, in modo da simulare l'esistenza di un campo gravitazionale uniforme o, reciprocamente, in modo da eliminare l'effetto della forza di gravità costante.





Esperienza di Eötvös

$$\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + r\omega\hat{\theta} = \left(\frac{\Delta}{\Delta t}|\mathbf{r}|\right)\hat{\mathbf{r}} + |\mathbf{r}|\left(\frac{\Delta}{\Delta t}\theta\right)\hat{\theta}, \qquad \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\theta} = 0$$



$$\mathbf{v}^2 = \left(\frac{\Delta}{\Delta t}|\mathbf{r}|\right)^2 + |\mathbf{r}|\left(\frac{\Delta}{\Delta t}\theta\right)^2 = v_r^2 + r^2\omega^2$$

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v}| = \mu r^2\omega = \mu r^2 \frac{\Delta}{\Delta t}\theta$$

Costante del moto !!

$$\omega = \frac{\Delta}{\Delta t}\theta = \frac{|\mathbf{L}|}{\mu r^2}$$

II Legge di Keplero

$$\frac{\Delta}{\Delta t}A = \frac{\Delta}{\Delta t}\left(\tfrac{1}{2}r^2\Delta\theta\right) = \frac{|\mathbf{L}|}{2\mu}$$

Equazione radiale

Ci poniamo nel sistema di riferimento rotante a pulsazione ω

$$\mu a_r = \mu \frac{\Delta}{\Delta t} v_r = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} + \mu r \omega^2$$

Forza centrifuga

$$\mu \frac{\Delta}{\Delta t} v_r = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} + \frac{|\mathbf{L}|^2}{\mu r^3}$$

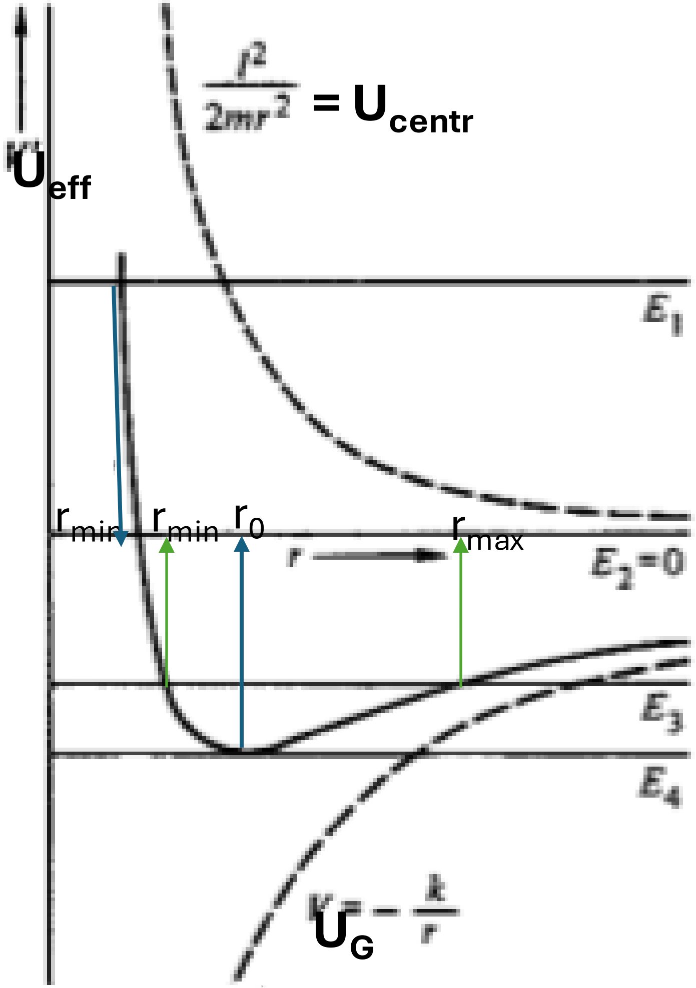
Il problema è ridotto alla sola variabile r (t) !!!

E' possibile scrivere l'equazione del moto nella forma conservativa ?

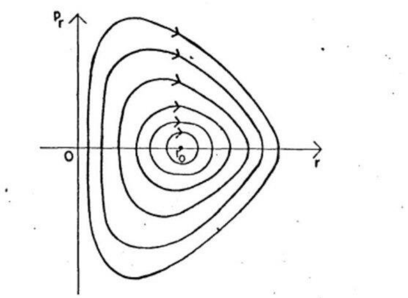
$$\mu \frac{\Delta}{\Delta t} v_r = -\frac{\Delta}{\Delta r} U_{eff}$$

Chi è U_{eff} ?

$$U_{eff} = U_G + U_{centr} = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|} + \frac{|\mathbf{L}|^2}{2\mu r^2}$$



$\frac{l^2}{2mr^2}$ = U_{centr}
U_{eff}
E_1
r_{min}
r_{min}
r_0
r_{max}
r
$E_2=0$
E_3
E_4
U_G $-\frac{k}{r}$



p_r
0
r_0
r

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - -G\frac{m_1 m_2}{r}\mathbf{r}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\mathbf{A} = 0$$

Vettore di Runge-Lenz

Il Vettore di Runge-Lenze è una costante del moto

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\mathbf{A} = \mathbf{a} \times \mathbf{L} - G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|}\mathbf{v} + G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3}\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}\right)\mathbf{r} =$$

$$-G\frac{m_1 m_2}{r}\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v}\right) - G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|}\mathbf{v} + G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3}\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}\right)\mathbf{r} =$$

$$-G\frac{m_1 m_2}{r^3}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}\right) - \mathbf{v}r^2\right] - G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|}\mathbf{v} + G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3}\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}\right)\mathbf{r} = 0$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$$

$$|\mathbf{A}|^2 = \left(Gm_1 m_2\right)^2 \mu^2 + 2\mu|\mathbf{L}|^2\left(\tfrac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}\right) = \left(Gm_1 m_2\right)^2 \mu^2 + 2\mu|\mathbf{L}|^2 E_{tot}$$

Funzione solo di **L** ed E

La Traiettoria

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = \mu G m_1 m_2 e \cos(\hat{\mathbf{r}\mathbf{r}_{max}}) = |\mathbf{L}|^2 - \mu G m_1 m_2 r \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}_{max}) = G m_1 m_2\, \mu\, e\, \frac{\mathbf{r}_{max}}{|\mathbf{r}_{max}|}$$

$$r = \frac{|\mathbf{L}|^2/(\mu G m_1 m_2)}{1 + e\cos\theta}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2|\mathbf{L}|^2 E_{tot}}{\mu (G m_1 m_2)^2}}$$

$$E_{tot} < 0 \to e < 1 : \text{ellissi}, \qquad E_{tot} = 0 \to e = 1 : \text{parabola}, \qquad E_{tot} > 0 \to e > 1 : \text{iperbole},$$

Orbite chiuse !!!

Le equazioni del moto sono state risolte usando solo le costanti del moto !! (Caso eccezionale, ma importante)

$$(e < 1) \qquad a = \tfrac{1}{2}(r_{min} + r_{max}) = \frac{G m_1 m_2}{2|E_{tot}|}, \qquad b = \frac{|\mathbf{L}|^2}{\sqrt{2\mu |E_{tot}|}}$$

I semiassi

$$\frac{\Delta}{\Delta t} A = \frac{|\mathbf{L}|}{2\mu} \Rightarrow A = \pi\, a\, b = \frac{|\mathbf{L}|}{2\mu} T$$

$$T^2 = (4\pi)^2 \frac{\mu}{G m_1 m_2} a^3$$

III Legge di Keplero

La legge di gravitazione di Newton contiene le tre leggi di Keplero come sue conseguenze !!!