



Università del Salento
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea Triennale

L'equazione di Dirac
in campi esterni

Relatore
Claudio Corianò

Laureando
Antonio Costantini

A Rita e Luigi

Prefazione

Nel primo ventennio del '900, nonostante i grandi successi ottenuti dalla meccanica quantistica non relativistica nella comprensione di molti fenomeni in ambito atomico e molecolare, le formulazioni di Schrödinger e di Heisenberg risultavano ancora essere incomplete per diversi motivi.

Una delle difficoltà più serie era dovuta al fatto che, essendo la meccanica quantistica non relativistica una teoria che descrive il comportamento di singola particella ed in cui la densità di probabilità di trovare una particella, integrata su tutto lo spazio, è uguale all'unità in ogni istante di tempo t , vi era una concreta difficoltà nel capire tutti i fenomeni legati alla creazione ed all'annichilazione di particelle.

In secondo luogo, questa teoria non ha potere predittivo riguardo la dinamica delle particelle che si muovono a velocità prossime a quella della luce (relativistiche). Inoltre non riesce a tener conto della interazione spin-orbita che dà luogo alla struttura fine nelle linee di emissione dell'atomo di idrogeno e di atomi simili.

Infine, i principi della teoria della relatività affermano che le leggi fisiche sono formalmente identiche in ogni sistema di riferimento inerziale. Come è ben noto, per soddisfare a questa richiesta le leggi fisiche devono essere espresse in forma covariante.

La meccanica quantistica non relativistica necessitava, dunque, di una riformulazione in termini relativistici, che la rendesse conforme con i dogmi della relatività ristretta.

Nonostante un'equazione d'onda relativistica fosse stata proposta da Klein

e da Gordon, questa non rappresentava formalmente, almeno in prima analisi, la corretta estensione relativistica dell'equazione di Schrödinger, poiché presentava due problemi:

1) la quantità che veniva interpretata come una densità di probabilità ρ non era una quantità definita positiva e, le soluzioni che scaturivano dall'equazione erano dotate di energia negativa. Questo è legato al fatto che nell'equazione di Klein-Gordon la derivata fatta rispetto al tempo è del secondo ordine, mentre l'equazione di Schrödinger è un'equazione differenziale lineare nella derivata temporale;

2) la densità di probabilità doveva poter essere interpretata come la prima¹ componente del quadrivettore densità di corrente.

Il problema fu brillantemente risolto da P.A.M. Dirac intorno al 1928. La teoria di Dirac ha permesso di dare una spiegazione rigorosa al concetto dello spin di una particella, che fino ad allora era stato postulato a priori sulla base delle evidenze sperimentali, ed è riuscita ad accordare due teorie che erano state in precedenza elaborate separatamente: la meccanica quantistica e la relatività ristretta.

Per risolvere il problema relativo alla presenza di energie negative, Dirac formulò la teoria delle “buche” o delle “lacune”, facendo uso del principio di esclusione di Pauli. Questa straordinaria intuizione portò Dirac a predire l'esistenza dell'antimateria in particolare della particella speculare dell'elettrone, il *positrone*, che ha proprietà identiche a quelle dell'elettrone, ma carica opposta.

L'effettiva scoperta sperimentale avvenne nel 1932 ad opera di Anderson.

In seguito, i problemi che scaturivano dall'equazione di Klein-Gordon furono superati grazie alle tecniche di seconda quantizzazione, secondo le quali le soluzioni delle equazioni relativistiche non si interpretano più come semplici funzioni d'onda, ma come campi “quantizzati” i quali permettono

¹La densità di probabilità può essere vista come la prima ($c\rho, \vec{S}$) o la quarta ($\vec{S}, ic\rho$) componente del quadrivettore densità di corrente a seconda della notazione utilizzata. Qui \vec{S} rappresenta formalmente la parte spaziale del quadrivettore.

di dare una soddisfacente descrizione delle particelle elementari e delle loro interazioni. Il modello che oggi è universalmente accettato come modello fondamentale per le particelle elementari e le loro interazioni è noto come Modello Standard.

E' interessante notare che l'equazione di Klein-Gordon, inizialmente accantonata perchè non aveva soluzioni compatibili con l'interpretazione probabilistica dell'equazione non relativistica, sia stata in seguito alla scoperta dell'antimateria, accettata come l'equazione di campo la cui quantizzazione descrive una particella relativistica priva di spin.

Il lavoro di tesi

L'argomento affrontato in questo lavoro di tesi è uno studio dell'equazione di Dirac e dei suoi aspetti basilari. Quest'equazione descrive una particella massiva puntiforme con spin $1/2$.

La prima parte del lavoro è dedicata alla derivazione dell'equazione di Dirac, ripercorrendo l'approccio classico seguito da Dirac nel suo lavoro del 1928 [2]. In seguito è stata dettagliatamente discussa la covarianza dell'equazione, dimostrando la sua invarianza formale per due osservatori inerziali in moto con velocità relativa arbitraria. Sono state inoltre studiate le soluzioni d'onda piana per una particella libera.

La seconda parte del lavoro è dedicata allo studio dell'equazione di Dirac in presenza di campi esterni. Sono state calcolate le soluzioni dell'equazione di Dirac in presenza di un campo magnetico costante, di un campo coulombiano e del campo generato da un monopolo magnetico. L'analisi delle soluzioni relative al campo magnetico costante porta a ricavare i cosiddetti *livelli di Landau*. Nel caso del campo elettrico, il calcolo degli autovalori dell'energia dell'elettrone permette di ottenere per via teorica la formula di Sommerfeld per la *struttura fine* dei livelli energetici dell'atomo di idrogeno. Nella parte dedicata allo studio dell'equazione di Dirac in presenza di un monopolo magnetico, oltre al calcolo delle soluzioni dell'equazione, è presentato un brevissimo sunto delle principali proprietà dei monopoli magnetici,

che non ha assolutamente la pretesa di essere esaustivo, reso necessario dalle particolarità che emergono già ad un primo approccio classico allo studio dei monopoli.

Indice

1	L'equazione di Dirac	6
1.1	Introduzione	6
1.1.1	Relazione di Continuità	10
1.2	La covarianza dell'equazione di Dirac	11
1.2.1	Dimostrazione della covarianza	14
1.3	La soluzione dell'equazione di Dirac in un caso speciale	18
1.4	L'elettrone libero in moto	20
2	L'elettrone in un campo magnetico	24
2.1	I livelli di Landau	25
3	L'elettrone in un campo elettrostatico	33
3.1	Un generico campo a simmetria sferica	33
3.1.1	La separazione delle variabili	36
3.2	Le funzioni radiali per l'atomo d'idrogeno	39
3.2.1	La struttura fine delle righe spettrali	42
4	Il sistema elettrone-monopolo magnetico	44
4.1	Il campo di un monopolo magnetico	45
4.1.1	Il potenziale vettore di un monopolo magnetico	45
4.1.2	La quantizzazione della carica elettrica	47
4.2	La soluzione dell'equazione di Dirac in presenza di un monopolo	48
4.2.1	L'equazione di Pauli	49
4.2.2	Le autofunzioni di Dirac	51

Capitolo 1

L'equazione di Dirac

Presenteremo in questo primo capitolo la teoria generale per un elettrone relativistico elaborata da Dirac. Il suo punto di partenza, che sarà anche il nostro, è stato scrivere un'equazione relativisticamente invariante che al tempo stesso rappresenti una generalizzazione dell'equazione di Schrödinger: questo vuol dire, dal punto di vista matematico, costruire un hamiltoniano lineare che porti a soluzioni Lorentz-invarianti. Soddisfare a queste due richieste vuol dire elaborare una teoria effettivamente più generale rispetto alla meccanica quantistica di Schrödinger; la generalizzazione di una teoria, infatti, deve riuscire a dare conto di tutti i fatti sperimentali che in precedenza erano stati verificati, e fornire una spiegazione logica ai problemi in cui la vecchia teoria incappa, rifiutando ovviamente ipotesi *ad hoc*.

1.1 Introduzione

Dalla meccanica quantistica, è noto che l'equazione di evoluzione temporale per un sistema fisico è l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \quad (1.1)$$

dove H denota l'operatore hamiltoniano lineare ed hermitiano relativo al sistema e ψ la funzione d'onda dello stato. Poichè la (1.1) è lineare nel-

la derivata temporale, e poichè in una trattazione relativistica coordinate spaziali e temporali sono equivalenti, il primo passo da effettuare consiste nel cercare di costruire un operatore hamiltoniano lineare nelle derivate spaziali e temporali. Costruiremo quindi l'equazione nel seguente modo

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \left(\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3} \right) + \beta m c^2 \psi \equiv H \psi. \quad (1.2)$$

Essendo il nostro scopo quello di ottenere una scrittura compatibile con l'invarianza di Lorentz, assumiamo che la funzione d'onda ψ sia una funzione a più componenti e che la struttura di H sia di tipo matriciale con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ matrici costanti.

Inoltre richiediamo che la densità di probabilità $\rho = \psi^\dagger \psi$ sia la componente temporale del quadrivettore densità di corrente.

L'equazione (1.2) è, dunque, la forma matriciale della

$$i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \sum_{j=1}^N \left(\alpha_{1ij} \frac{\partial \psi_j}{\partial x^1} + \alpha_{2ij} \frac{\partial \psi_j}{\partial x^2} + \alpha_{3ij} \frac{\partial \psi_j}{\partial x^3} \right) + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} m c^2 \psi_j, \quad (1.3)$$

e la funzione d'onda è una colonna di N elementi

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Perchè la (1.3) rappresenti la corretta generalizzazione al caso relativistico dell'equazione di Schrödinger dobbiamo richiedere che essa soddisfi ad alcune proprietà:

1. deve essere verificata la relazione relativistica energia-momento

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4,$$

dove m rappresenta la massa dell'elettrone,

2. si deve poter scrivere un'equazione di continuità del tipo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

dove ρ rappresenta la densità di probabilità e \mathbf{J} é il termine di corrente,

3. deve essere verificata l'invarianza di Lorentz.

Se la (1.3) soddisfa alla relazione energia-momento allora ogni sua componente soddisferà l'equazione di Klein-Gordon

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4) \psi_j. \quad (1.5)$$

D'altra parte dalla 1.2 segue che

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = & \\ & -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} \\ & + \hbar \frac{m_0 c^3}{i} \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \beta^2 m_0^2 c^4 \psi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Confrontando queste ultime due equazioni otteniamo delle regole di commutazione che realizzano l'algebra alla quale soddisfano le matrici α_i, β

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= \{\alpha_i, \beta\} = 0 \\ \alpha_i^2 &= \beta^2 = 1. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Tramite queste regole di anticommutazione possiamo ricavare la dimensione delle matrici, e quindi anche del vettore colonna ψ , che finora non è stata specificata.

Innanzitutto poichè l'hamiltoniano è un operatore hermitiano avremo che

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad \beta^\dagger = \beta.$$

Questo ci garantisce che gli autovalori delle matrici sono numeri reali. Dalle (1.7) segue che gli autovalori di α_i e β possono essere soltanto ± 1 . Ciò è dovuto al fatto che gli autovalori di una matrice non dipendono dalla particolare rappresentazione della stessa. A titolo di esempio consideriamo la forma diagonale di una delle α_i

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

con autovalori A_1, A_2, \dots, A_n . Questo implica che

$$\alpha_i^2 = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_n^2 \end{pmatrix}$$

ovvero $A_k^2 = 1$, che implica a sua volta $A_k = \pm 1$. Dunque siamo giunti alla conclusione che gli autovalori di α_i e β sono soltanto ± 1 . Sempre tramite le (1.7) ricaviamo che la traccia delle α_i e di β è uguale a zero. Per dimostrarlo partiamo da

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0,$$

che insieme a

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad \beta^\dagger = \beta$$

fornisce

$$\alpha_i = -\beta \alpha_i \beta.$$

Tramite l'identità

$$\text{tr } AB = \text{tr } BA,$$

otteniamo

$$\text{tr } \alpha_i = \text{tr } \beta^2 \alpha_i = \text{tr } \beta \alpha_i \beta = -\text{tr } \alpha_i,$$

il che ovviamente implica $\text{tr } \alpha_i = 0$. A questo punto è facile evincere che ogni matrice α_i e β deve avere lo stesso numero di autovalori positivi e negativi, ovvero deve avere dimensione pari. La più piccola dimensione pari possibile è $N = 2$, che non è accettabile in quanto esistono solo tre matrici bidimensionali hermitiane a traccia nulla che soddisfano $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ e sono le matrici di Pauli. Questo ci porta a concludere che la più piccola dimensione accettabile per le matrici di Dirac è $N = 4$.

Una rappresentazione esplicita delle matrici di Dirac è la seguente

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

1.1.1 Relazione di Continuità

Ricaviamo ora una legge di conservazione simile all'equazione di continuità non relativistica. Per far ciò iniziamo con lo scrivere ψ^\dagger

$$\psi^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \vdots \\ \psi_4^* \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Moltiplicando la (1.2) a sinistra per ψ^\dagger otteniamo

$$i\hbar\psi^\dagger \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \psi^\dagger \alpha_k \frac{\partial\psi}{\partial x^k} + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi. \quad (1.10)$$

Data l'hermiticità delle matrici di Dirac, prendendo l'hermitiana coniugata della (1.2) e moltiplicando a destra per ψ otteniamo

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^3\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^k}\alpha_k\psi + mc^2\psi^\dagger\beta\psi. \quad (1.11)$$

Dalle due precedenti otteniamo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger\psi = \frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^3\frac{\partial}{\partial x^k}(\psi^\dagger\alpha_k\psi), \quad (1.12)$$

che possiamo anche scrivere come

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.13)$$

avendo indicato

$$\rho = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2, \quad J^k = c\psi^\dagger\alpha_k\psi. \quad (1.14)$$

Sul modello dell'equazione di Schrödinger, abbiamo scritto un'equazione lineare nelle derivate spaziali, giungendo alla conclusione che i coefficienti α_i , β non sono semplici numeri ma matrici che soddisfano alle (1.7); analogamente a quanto si ottiene in meccanica quantistica non relativistica, abbiamo ricavato l'equazione di continuità (1.12).

1.2 La covarianza dell'equazione di Dirac

In questo paragrafo dimostreremo l'invarianza formale dell'equazione di Dirac per trasformazioni di Lorentz. Per far ciò sarà conveniente utilizzare la notazione quadri-vettoriale, e quindi riporteremo alcune nozioni basilari sui quadri-vettori per completezza.

Nello spaziotempo di Minkowski un punto, o evento, è caratterizzato da tre coordinate spaziali e da una temporale

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z.$$

Indicheremo questa quaterna di numeri con

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (1.15)$$

mentre la metrica di questo spazio è

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.16)$$

dove

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Una trasformazione di Lorentz è, per definizione, una trasformazione lineare omogenea

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

che lascia invariato l'intervallo ds^2 . I coefficienti Λ^μ_ν formano una trasformazione di Lorentz se verificano la relazione

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\sigma_\nu = g_{\rho\sigma}, \quad (1.18)$$

che traduce la richiesta di invarianza dell'intervallo; d'ora in avanti gli indici greci σ, ν, μ , etc... correranno da 0 a 3, mentre quelli latini i, j, k , etc... varieranno da 1 a 3. In generale un *quadrivettore controvariante* è un insieme di quattro grandezze

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad (1.19)$$

che si trasformano come il quadrivettore posizione x^μ , ossia

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu.$$

Un tensore di Lorentz di rango 2 è un insieme di sedici grandezze che trasformano come il prodotto di due quadrivettori, ovvero

$$A'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma A^{\rho\sigma}.$$

Analogamente per i tensori di rango superiore. Ricordiamo infine che il tensore metrico di Minkowski $g_{\mu\nu}$ può essere utilizzato per innalzare od abbassare gli indici di un tensore

$$A_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} A^{\rho\nu}.$$

Per dimostrare la covarianza dell'equazione di Dirac risulterà utile una sua riscrittura in termini di grandezze quadrivettoriali; moltiplichiamo la (1.2) per β/c ed introduciamo delle nuove matrici che prendono il posto delle α_i e della β , le matrici

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i. \quad (1.20)$$

Queste nuove matrici ci consentono di scrivere la forma covariante dell'equazione di Dirac

$$\left(i\hbar\gamma^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho} - mc \right) \psi = 0. \quad (1.21)$$

In termini delle nuove matrici γ le (1.7) si possono succintamente scrivere come

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

In base alla definizione delle matrici γ ricaviamo le regole di hermiticità

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = (\alpha^k)^\dagger \beta^\dagger = -\beta\alpha^k = -\gamma^k.$$

E' possibile dimostrare che tutte le matrici che soddisfano le (1.22) e le $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k$ sono unitariamente equivalenti [4], ovvero che esiste un operatore unitario non singolare U tale che

$$(\gamma'^{\mu}) = U^{\dagger} \gamma^{\mu} U, \quad U^{-1} = U^{\dagger}.$$

Le leggi fisiche sono equivalenti per trasformazioni unitarie per cui, senza perdere in generalità, possiamo considerare un unico insieme di matrici γ per qualunque sistema di riferimento inerziale.

1.2.1 Dimostrazione della covarianza

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali che indicheremo con

$$O(t, x, y, z) \equiv O$$

ed

$$O'(t', x', y', z') \equiv O'.$$

Per dimostrare l'invarianza sotto trasformazioni di Lorentz dell'equazione di Dirac dobbiamo soddisfare due richieste. La prima è che deve esistere una regola esplicita che permetta all'osservatore O' , una volta assegnata la soluzione $\psi(x)$ relativa all'osservatore O , di calcolare $\psi'(x')$, funzione d'onda che descrive il medesimo stato fisico di $\psi(x)$ nel sistema di riferimento di O' . In secondo luogo, in accordo col principio di relatività, $\psi'(x')$ deve verificare l'equazione di Dirac

$$\left(i\hbar \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - mc \right) \psi'(x') = 0, \quad (1.23)$$

relativa al proprio sistema di riferimento. Costruiamo ora esplicitamente la trasformazione tra $\psi'(x')$ e $\psi(x)$. Dato che sia le trasformazioni di Lorentz sia l'equazione di Dirac sono lineari, la trasformazione che cerchiamo sarà anch'essa lineare. Se Λ denota la matrice relativa alla trasformazione Λ^{ν}_{μ} allora

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda) \psi(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1} x'). \quad (1.24)$$

D'altronde, grazie al principio di relatività, sappiamo che esiste l'operatore inverso $S^{-1}(\Lambda)$ grazie al quale possiamo ricavare $\psi(x)$, una volta nota $\psi'(x')$. Dunque possiamo scrivere

$$\psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = S^{-1}(\Lambda)\psi'(\Lambda x). \quad (1.25)$$

Se vale la (1.24) allora possiamo scrivere anche

$$\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = S(\Lambda^{-1})\psi'(\Lambda x), \quad (1.26)$$

e dal confronto otteniamo

$$S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda). \quad (1.27)$$

Il problema ora è quello di determinare l'operatore S . Con l'ausilio della (1.25) riscriviamo la (1.21) come

$$\left(i\hbar\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mcS^{-1}(\Lambda) \right) \psi'(x') = 0. \quad (1.28)$$

Moltiplicando a sinistra per $S(\Lambda)$ e tenendo conto che $S(\Lambda)S^{-1}(\Lambda) = \mathbf{1}$ ricaviamo dalla precedente

$$\left(i\hbar S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi'(x') = 0. \quad (1.29)$$

Per quel che riguarda la trasformazione di $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, essendo i due sistemi di riferimento legati dalla relazione

$$x'^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu,$$

ricaviamo

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}.$$

La (1.21) diventa

$$\left(i\hbar (S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu_\mu) \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - mc \right) \psi'(x') = 0 \quad (1.30)$$

e dal confronto con la (1.23) risulta che

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu_\mu = \gamma^\nu, \quad (1.31)$$

od anche

$$\Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda). \quad (1.32)$$

Calcolare una soluzione della (1.31) equivale a certificare la covarianza dell'equazione di Dirac.

Partiamo da una trasformazione di Lorentz infinitesima per calcolare l'operatore $S(\Lambda)$. Una trasformazione di Lorentz infinitesima è definita da

$$\Lambda^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu_\mu, \quad (1.33)$$

dove $\Delta\omega^\nu_\mu$ è antisimmetrico. Infatti, trascurando i termini quadratici in $\Delta\omega$, otteniamo che

$$\Lambda^\mu_\nu \Lambda^\sigma_\mu = \delta^\sigma_\nu = (\delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu_\nu) (\delta^\sigma_\mu + \Delta\omega^\sigma_\mu) \approx \quad (1.34)$$

$$\delta^\mu_\nu \delta^\sigma_\mu + \delta^\mu_\nu \Delta\omega^\sigma_\mu + \delta^\sigma_\mu \Delta\omega^\mu_\nu = \delta^\sigma_\nu + \Delta\omega^\sigma_\nu + \Delta\omega^\sigma_\nu$$

da cui scaturisce che

$$\Delta\omega^{\nu\sigma} + \Delta\omega^{\sigma\nu} = 0. \quad (1.35)$$

L'operatore per una trasformazione infinitesima sarà dunque $S(\Lambda) = S(\Delta\omega^{\mu\nu})$. La linearità di S ci permette di scrivere

$$S(\Delta\omega^{\mu\nu}) = \mathbf{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}, \quad (1.36)$$

dove $\sigma_{\mu\nu}$ è un oggetto a 2 indici che definiremo di seguito. Grazie alla (1.27) si ha che

$$S^{-1}(\Delta\omega^{\mu\nu}) = \mathbf{1} + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}, \quad (1.37)$$

e dall'antisimmetria di $\Delta\omega^{\mu\nu}$ segue che $\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$. A questo punto, grazie alla (1.32) possiamo calcolare $\sigma_{\mu\nu}$. Inserendovi la (1.33) e la (1.36) otteniamo

$$(\delta^\nu_\mu + \Delta\omega_\mu^\nu) \gamma^\mu = \left(\mathbf{1} - \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} \right) \gamma^\nu \left(\mathbf{1} + \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} \right). \quad (1.38)$$

Trascurando i termini quadratici in $\Delta\omega^{\mu\nu}$ otteniamo

$$\Delta\omega_\mu^\nu \gamma^\mu = -\frac{i}{4} \Delta\omega^{\alpha\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta}). \quad (1.39)$$

Dall'antisimmetria di $\Delta\omega^{\mu\nu}$ ricaviamo

$$\begin{aligned} -\frac{i}{4} \Delta\omega^{\alpha\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta}) &= \Delta\omega_\mu^\sigma g^\nu_\sigma \gamma^\mu = \\ \Delta\omega^{\beta\alpha} g^\nu_\alpha \gamma_\beta &= \frac{1}{2} \Delta\omega^{\beta\alpha} (g^\nu_\alpha \gamma_\beta - g^\nu_\beta \gamma_\alpha) = \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$-\frac{1}{2} \Delta\omega^{\alpha\beta} (g^\nu_\alpha \gamma_\beta - g^\nu_\beta \gamma_\alpha)$$

per arrivare infine a

$$-2i (g^\nu_\alpha \gamma_\beta - g^\nu_\beta \gamma_\alpha) = [\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu]. \quad (1.41)$$

La precedente relazione è soddisfatta da

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]. \quad (1.42)$$

Infatti, sfruttando l'anticommutazione delle matrici gamma, otteniamo

$$-[\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] = \frac{i}{2} [\gamma^\nu, [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]] = i [\gamma^\nu, \gamma_\alpha \gamma_\beta] = \quad (1.43)$$

$$i (\gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta - 2g^\nu_\beta \gamma_\alpha + 2g^\nu_\alpha \gamma_\beta - \gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 2i (g^\nu_\alpha \gamma_\beta - g^\nu_\beta \gamma_\alpha).$$

Dunque per trasformazioni di Lorentz infinitesime abbiamo ricavato che

$$S(\Delta\omega^{\mu\nu}) = \mathbf{1} + \frac{1}{8} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \Delta\omega^{\mu\nu}. \quad (1.44)$$

Poniamo $\Delta\omega^{\mu\nu} = \Delta\omega(I_{\mathbf{n}})^\nu{}_\mu$, dove $\Delta\omega$ è il parametro infinitesimo della trasformazione (ovvero l'angolo generalizzato infinitesimo), e $(I_{\mathbf{n}})^\nu{}_\mu$ rappresenta la matrice unità dell'asse attorno al quale avviene la rotazione [4, 5]. Per ottenere l'operatore S relativo ad una trasformazione di Lorentz finita non dobbiamo fare altro che applicare in successione N trasformazioni infinitesime e poi eseguire il limite per $N \rightarrow \infty$. Questo ci darà

$$\psi'(x') = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbf{1} - \frac{i}{4} \frac{\omega}{N} \sigma_{\mu\nu} (I_{\mathbf{n}})^{\mu\nu} \right)^N \psi(x) = \exp^{-(i/4)\omega\sigma_{\mu\nu}(I_{\mathbf{n}})^{\mu\nu}} \psi(x), \quad (1.45)$$

dove abbiamo espresso $\frac{\omega}{N} = \Delta\omega$.

In sintesi, tramite le richieste di linearità e l'uso del principio di relatività abbiamo costruito un operatore, che per trasformazioni di Lorentz infinitesime è dato dalla (1.44), che permette di trasformare le soluzioni $\psi(x)$, relative ad un sistema di riferimento inerziale O , in quelle $\psi'(x')$ valide nel sistema di riferimento O' in moto relativamente ad O .

1.3 La soluzione dell'equazione di Dirac in un caso speciale

In precedenza abbiamo ricavato l'equazione di Dirac generalizzando al caso relativistico l'equazione di Schrödinger. Ricordando le regole della meccanica quantistica, possiamo scrivere l'equazione

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2\beta) \psi. \quad (1.46)$$

Ricaviamo le soluzioni di quest'equazione nel caso relativamente semplice in cui la funzione sia indipendente dalla posizione. Questa richiesta che facciamo sulla funzione d'onda si traduce in

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0,$$

che vuol dire assenza di tri-impulso per la particella. L'equazione di partenza

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \alpha \cdot \nabla \psi + \beta mc^2 \psi, \quad (1.47)$$

si semplificherà in

$$\frac{i\hbar}{c} \beta \frac{\partial \psi}{\partial t} - mc\psi = 0. \quad (1.48)$$

Esplicitando in componenti la (1.48) otteniamo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \psi_A / \partial t \\ \partial \psi_B / \partial t \end{pmatrix} = -\frac{imc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

dove abbiamo introdotto al posto dello spinore ψ una coppia di bispinori definiti come

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

La (1.48) equivale quindi a due equazioni differenziali

$$\frac{\partial \psi_A}{\partial t} = -i \frac{mc^2}{\hbar} \psi_A, \quad -\frac{\partial \psi_B}{\partial t} = -i \frac{mc^2}{\hbar} \psi_B, \quad (1.51)$$

le cui soluzioni sono funzioni dipendenti dalla sola variabile temporale e sono date da

$$\begin{aligned} \psi_A(t) &= \psi_A(0) e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t}, \\ \psi_B(t) &= \psi_B(0) e^{i \frac{mc^2}{\hbar} t}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Per una particella in quiete l'energia è pari a $E = mc^2$, ed infatti la funzione d'onda ha la forma

$$\psi_A(t) \propto e^{-iEt/\hbar}$$

che esprime la corretta dipendenza funzionale dello stato quantico rispetto all'energia¹.

Risulta più complicata l'interpretazione degli stati $\psi_B(t)$: infatti, se volessimo interpretare l'equazione di Dirac come equazione di evoluzione temporale della funzione d'onda come in meccanica quantistica non relativistica, questi stati sarebbero caratterizzati da autovalori negativi dell'hamiltoniano.

Per tentare di spiegare come mai una particella *libera* sia dotata di energia negativa furono fatte parecchie ipotesi e vennero proposti vari modelli (molto spesso lontani dall'essere delle vere teorie), pensando all'equazione di Dirac non più come ad un'equazione d'onda ma come ad un campo classico quantizzabile. La moderna teoria dei campi, che ha rivisitato la teoria di Dirac, supera i problemi precedentemente esposti: secondo questa interpretazione infatti, sia le particelle che le antiparticelle sono dotate di energia positiva.

Va aggiunto, infine, che sussiste una differenza sostanziale tra il problema quantistico delle energie negative ed il suo analogo classico: mentre classicamente le energie negative, pur essendo previste, venivano scartate in maniera arbitraria, la stessa operazione non è lecita in ambito quantistico, in quanto tutte le soluzioni dell'equazione di Dirac formano la base di uno spazio di Hilbert. Eliminarne la metà vuol dire dimezzare la dimensione dello spazio stesso e quindi privarlo della struttura stessa di spazio di Hilbert.

1.4 L'elettrone libero in moto

I risultati ottenuti nei paragrafi precedenti ci consentono di scrivere le soluzioni dell'equazione di Dirac per un elettrone libero dotato di una velocità arbitraria. Per ottenerle utilizzeremo le soluzioni già calcolate per un elettrone a riposo nel sistema di riferimento O e poi ci sposteremo in un nuovo sistema di riferimento O' in moto rispetto ad O con velocità $-\mathbf{v}$; in questo modo le

¹Nello schema di Schrödinger per l'evoluzione temporale di uno stato quantico abbiamo $|A, t\rangle = e^{-iHt/\hbar} |A, 0\rangle$.

soluzioni relative ad O' descriveranno un elettrone che si muove con velocità \mathbf{v} . Riscriviamo le (1.52) in maniera compatta come

$$\psi^r(x) = \omega^r(0)e^{-i\epsilon_r mc^2 t/\hbar} \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (1.53)$$

dove

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= +1 & r &= 1, 2, \\ \epsilon_r &= -1 & r &= 3, 4, \end{aligned} \quad (1.54)$$

e

$$\omega^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega^3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega^4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

L'esponenziale contenuto nella soluzione ψ^r può essere riscritto in forma covariante come segue

$$e^{-i\epsilon_r mc^2 t/\hbar} = e^{-i\epsilon_r p_\mu x^\mu/\hbar} = e^{-i\epsilon_r p'_\mu x'^\mu/\hbar}.$$

In questo modo si vede che le soluzioni ad energia positiva e quelle ad energia negativa non si mescolano durante il cambio di sistema di riferimento: il passaggio da un sistema di riferimento ad un altro non modifica il valore di ϵ_r , e dunque il futuro assoluto ed il passato assoluto dell'elettrone non dipendono dal sistema di riferimento.

Scegliamo per comodità la velocità relativa tra O e O' parallela all'asse x ; per questa particolare trasformazione di Lorentz l'operatore $S(\Lambda)$ sarà

$$S = e^{-i\omega\sigma_{01}/2} \quad (1.56)$$

e possiamo scrivere esplicitamente σ_{01} , grazie alle (1.42) e (1.20), nella forma

$$\sigma_{01} = -i\alpha_1. \quad (1.57)$$

Quindi

$$\begin{aligned} S = e^{-\omega\alpha_1/2} &= \mathbf{1} \left(1 + (-\omega/2)\alpha_1 + \frac{(-\omega/2)^2(\alpha_1)^2}{2} + \frac{(-\omega/2)^3(\alpha_1)^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= \mathbf{1} \left(1 + \frac{(\omega/2)^2}{2} + \frac{(\omega/2)^4}{4!} + \dots \right) - \alpha_1 \left((\omega/2) + \frac{(\omega/2)^3}{3!} + \frac{(5\omega/2)^5}{5!} + \dots \right) = \\ &= \mathbf{1} \cosh(\omega/2) - \alpha_1 \sinh(\omega/2) \end{aligned} \quad (1.58)$$

ed applicando l'operatore S ad $\omega^r(0)$ otteniamo per $\omega^r(p_x)$ l'equazione

$$\begin{aligned} \omega^r(p_x) &= (\cosh(\omega/2) - \alpha_1 \sinh(\omega/2)) \omega^r(0) = \\ &= \cosh(\omega/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ 0 & 1 & -\tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) & 0 \\ 0 & -\tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) & 1 & 0 \\ -\tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \omega^r(0) \end{aligned} \quad (1.59)$$

Grazie alla forma semplice di $\omega^r(0)$ otteniamo che la colonna r -esima della matrice di trasformazione coincide con lo spinore $\omega^r(p_x)$. Possiamo sostituire l'angolo di rotazione ω in termini di quantità fisiche con l'aiuto di alcune formule trigonometriche:

$$\tanh x = \frac{\tanh 2x}{1 + \sqrt{1 - \tanh^2 2x}}, \quad (1.60)$$

$$\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}.$$

Per la trasformazione di Lorentz considerata è facile evincere che

$$\tanh \omega = -\frac{v}{c}$$

e le (1.60) portano, con qualche passaggio algebrico, a

$$-\tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{-\tanh\omega}{1 + \sqrt{1 - \tanh^2\omega}} = \frac{p_x c}{E + mc^2}, \quad (1.61)$$

$$\cosh\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\tanh^2\omega / (1 + \sqrt{1 - \tanh^2\omega})^2\right]}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}. \quad (1.62)$$

Infine, riscriviamo tramite le ultime due relazioni gli spinori nel sistema di riferimento O'

$$\omega^r(p_x) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{p_x c}{E + mc^2} \\ 0 & 1 & \frac{p_x c}{E + mc^2} & 0 \\ 0 & \frac{p_x c}{E + mc^2} & 1 & 0 \\ \frac{p_x c}{E + mc^2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \omega^r(0). \quad (1.63)$$

La conoscenza della forma generale dell'operatore $S(\Lambda)$ che consente di trasformare le soluzioni dell'equazione di Dirac valide in un sistema di riferimento O in quelle valide in un altro sistema di riferimento O' , ha permesso di ricavare dalla semplice forma delle soluzioni relative al sistema di riferimento in cui l'elettrone è in quiete, la soluzione valida nel caso in cui l'elettrone si muove con velocità v , che per semplicità abbiamo scelto diretta lungo l'asse x .

Capitolo 2

L'elettrone in un campo magnetico

L'interesse nello studio dell'interazione dei campi magnetici con le particelle elementari non è puramente formale. La presenza di un simile campo, infatti, può rendere possibili processi che sarebbero inibiti nel vuoto e può modificare la sezione d'urto ed i tassi di decadimento delle particelle elementari rispetto a quelli calcolati in assenza di campo [6]. Inoltre, in ambito astrofisico, una più completa comprensione dei meccanismi che regolano l'evoluzione di alcuni tipi di stelle, quali le stelle di neutroni o le magnetar, necessita di uno studio in cui gli effetti dei campi magnetici, che per queste stelle esotiche sono estremamente forti, siano tenuti in considerazione. Per avere un'idea dell'intensità dei campi magnetici di queste stelle si consideri che, a fronte di un campo magnetico terrestre dell'ordine dei 10^{-1} gauss, quello di una magnetar è di circa 10^{14} gauss, ed anche superiore. Per le stelle di neutroni l'intensità del campo è di poco inferiore a quella delle magnetar, ed è di circa 10^{12} gauss. E' la presenza del campo magnetico che, variando i tassi di decadimento dei componenti di queste stelle, influisce sui loro tempi di vita.

2.1 I livelli di Landau

Ci occuperemo della soluzione dell'equazione di Dirac in presenza di un campo magnetico uniforme e costante, che permette di ricavarne soluzioni esatte. Scegliamo la direzione di questo campo lungo l'asse z . Per un campo puramente magnetico di intensità B , possiamo scrivere il potenziale come

$$A^\mu = (0, -yB + b, 0, 0), \quad (2.1)$$

oppure

$$A^\mu = (0, 0, xB + c, 0), \quad (2.2)$$

od anche

$$A^\mu = (0, 1/2(-yB + d), 1/2(xB + g), 0), \quad (2.3)$$

dove b, c, d e g sono delle costanti; questa varietà di possibili potenziali corrispondenti ad uno stesso campo è l'espressione dell'invarianza di gauge del campo elettromagnetico. Nel seguito adotteremo il potenziale dato dalla (2.1), supponendo che $b = 0$.

Inoltre, per evitare di appesantire la scrittura delle formule, utilizzeremo il sistema di unità naturali, in cui $\hbar = c = 1$. Con queste premesse possiamo scrivere l'equazione di Dirac come

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Pi} + \beta m) \psi \quad (2.4)$$

dove

$$\boldsymbol{\Pi} = (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \quad (2.5)$$

è il momento generalizzato della particella. Gli stati stazionari, in base alla precedente equazione, possono essere scritti come

$$\psi = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

dove, ψ_1 e ψ_2 sono spinori a due componenti. Avendo introdotto gli spinori a due componenti, le matrici di Dirac possono essere sostituite dalle loro analoghe bidimensionali¹. L'equazione (2.4) diventa, sostituendo la precedente ed operando semplici calcoli,

$$(E - m)\psi_1 = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \psi_2, \quad (2.7)$$

$$(E + m)\psi_2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \psi_1. \quad (2.8)$$

Moltiplicando ambo i membri della (2.7) per $(E + m)$, riusciamo ad eliminare ψ_2 , ottenendo

$$(E^2 - m^2)\psi_1 = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \psi_1. \quad (2.9)$$

Possiamo modificare la (2.9) grazie all'identità

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), \quad (2.10)$$

che verifichiamo immediatamente. Per le matrici di Pauli valgono le regole di commutazione

$$\sigma_i \sigma_j = i\epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}, \quad (2.11)$$

dove ϵ_{ijk} è il tensore completamente antisimmetrico di Levi-Civita. Grazie alle precedenti

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \sigma_i a_i \sigma_j b_j = a_i b_j (i\epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}).$$

Infine è sufficiente ricordare che

$$a_i b_j \delta_{ij} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

e che vale

¹Cfr. (1.8), pag. 10.

$$\epsilon_{ijk}a_ib_j\sigma_k = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_k \sigma_k = \sigma \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}).$$

Sostituendo la (2.10) nella (2.9) ricaviamo

$$(E^2 - m^2)\psi_1 = ((\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + i\sigma \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{p} + e\mathbf{A})) \psi_1. \quad (2.12)$$

Calcoliamo ora $((\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{p} + e\mathbf{A}))_i$. Ricordando che $\mathbf{p} = -i\nabla$, risulta

$$\begin{aligned} ((\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{p} + e\mathbf{A}))_i \Psi &= \epsilon_{ijk}(-i\partial_j + eA_j)(-i\partial_k + eA_k)\Psi = \\ &= -ie\epsilon_{ijk}(\partial_j A_k + A_j \partial_k)\Psi = -ie\epsilon_{ijk}[\partial_j(A_k \Psi) + A_j \partial_k \Psi] = \\ &= -ie\epsilon_{ijk}[(\partial_j A_k)\Psi + A_k \partial_j \Psi] - ie\epsilon_{ikj}A_k \partial_j \Psi = \\ &= -ie\epsilon_{ijk}[(\partial_j A_k)\Psi + A_k \partial_j \Psi] + ie\epsilon_{ijk}A_k \partial_j \Psi = \\ &= -ie(\nabla \wedge \mathbf{A})_i \Psi = -ieB_i \Psi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Un calcolo analogo, che non riporteremo, si effettua per il primo addendo $(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2$. Queste semplificazioni, inserite nella (2.9), permettono di riscriverla in una forma che ne rende più semplice la risoluzione

$$(E^2 - m^2)\psi_1 = \left(-\nabla^2 + (eB)^2 y^2 + eB \left(2iy \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_3 \right) \right) \psi_1. \quad (2.14)$$

Il secondo membro della (2.14) dipende da x e z attraverso le loro derivate, e questo ci permette di scrivere le soluzioni per ψ_1 nella forma

$$\psi_1 = e^{i(p_x x + p_z z)} f(y), \quad (2.15)$$

dove $f(y)$ è un vettore colonna a due componenti. Per calcolare le soluzioni $f(y)$ sfruttiamo il fatto che il secondo membro della (2.14) commuta con σ_3 : esisterà perciò un set completo di autostati simultanei per questi due operatori. Gli autovalori di σ_3 , che sono $s = \pm 1$, indicheranno le due diverse autofunzioni indipendenti. Ovvero avremo

$$f_+(y) = \begin{pmatrix} g_+(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$f_-(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_-(y) \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

con $g_s(y)$ che soddisfa l'equazione differenziale

$$(E^2 - m^2) g_s(y) = \left(-\frac{d^2}{dy^2} + p_x^2 + p_z^2 + (eBy)^2 - 2eBy p_x - eBs \right) g_s(y). \quad (2.18)$$

Con qualche calcolo quest'ultima può essere scritta nella forma

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + e^2 B^2 \left(y - \frac{p_x}{eB} \right)^2 \right) g_s(y) = (E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs) g_s(y), \quad (2.19)$$

che, come vedremo, ne renderà più agevole la risoluzione. Introduciamo la variabile

$$\xi = \sqrt{eB} \left(y - \frac{p_x}{eB} \right) \quad (2.20)$$

che, sostituita nella 2.19, fornisce

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + \epsilon_s \right] g_s = 0, \quad (2.21)$$

dove abbiamo indicato

$$\epsilon_s = \frac{E^2 - m^2 - p_z^2 - eBs}{eB}. \quad (2.22)$$

Si riconosce nella (2.21) una forma speciale dell'equazione di Hermite, che rappresenta l'equazione di un oscillatore armonico quantistico. Dalla ben nota teoria sull'oscillatore armonico sappiamo che l'energia ϵ_s sarà quantizzata, ed in particolare

$$\epsilon_s = \frac{E^2 - m^2 - p_z^2 - eBs}{eB} = 2\nu + 1. \quad (2.23)$$

Dalla precedente ricaviamo che

$$E_s = \pm (m^2 + p_z^2 + eB(2\nu + 1) + eBs)^{\frac{1}{2}} = \pm (m^2 + p_z^2 + 2neB)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.24)$$

avendo posto

$$2\nu + 1 + s = 2n. \quad (2.25)$$

L'equazione (2.24) indica i possibili valori dell'energia di un elettrone immerso in un campo magnetico uniforme: è evidente la dipendenza di quest'energia dalla proiezione dello spin lungo la direzione di applicazione del campo magnetico. Questi livelli energetici sono i cosiddetti *livelli di Landau*.

Dalla teoria sull'oscillatore armonico sappiamo che le soluzioni per g_s relative al ν -esimo livello energetico sono

$$I_\nu(\xi) = N_\nu e^{-\xi^2/2} H_\nu(\xi), \quad (2.26)$$

dove

$$N_\nu = \left(\frac{\sqrt{eB}}{\nu! 2^\nu \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.27)$$

è il coefficiente di normalizzazione di ciascuna soluzione ed

$$H_\nu(\xi) \equiv (-1)^\nu e^{\xi^2} \frac{d^\nu}{d\xi^\nu} e^{-\xi^2}$$

è ν -esimo il polinomio di Hermite.

Dalla (2.24) possiamo ricavare alcune proprietà delle soluzioni. Infatti, ricordando che l'operatore di spin è caratterizzato dall'aver soltanto due autovalori, $s = \pm 1$, si vede immediatamente che le soluzioni degenerano.

In generale le soluzioni per le quali $s = 1$ e $\nu = n - 1$ hanno la stessa energia di quelle con $\nu = n$ e $s = -1$. La degenerazione sarà dunque doppia.

Fa eccezione il più basso livello di Landau, quello per cui $n = 0$; per questo livello

$$\nu = -\frac{1}{2}(1 + s).$$

Le soluzioni della (2.21) sono accettabili solamente per determinati valori dell'energia, come è noto. In particolare la teoria dell'oscillatore armonico impone che ν abbia valori non negativi. Non potendo ν essere un numero negativo, necessariamente dovrà essere $s = -1$.

Dunque un elettrone che si trova nel livello energetico più basso, corrispondente al livello di Landau con $n = 0$, non potrà esistere nello stato con spin equiverso al campo magnetico. Per soddisfare a questa restrizione, in aggiunta alla definizione delle $I_n(\xi)$, dobbiamo imporre la condizione che $I_{-1}(\xi) = 0$. Denoteremo le (2.16)-(2.17) corrispondenti all' n -esimo livello di Landau con un indice aggiuntivo n , ossia

$$f_+^{(n)}(y) = \begin{pmatrix} I_{n-1}(\xi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$f_-^{(n)}(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ I_n(\xi) \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

In conseguenza di quanto detto prima, la soluzione $f_+^{(0)}$ non esiste. A questo punto, essendo nota ψ_1 , dalla (2.8) ricaviamo ψ_2 ; riportiamo, senza ricavarle esplicitamente, le soluzioni dell'equazione di Dirac in presenza di un campo magnetico uniforme e costante [6]

$$\psi = e^{-i(E_n t - p_x x - p_z z)} U_s(n, y, p_x, p_z)$$

dove

$$U_+(n, y, p_x, p_z) = \begin{pmatrix} I_{n-1}(\xi) \\ 0 \\ \frac{p_z}{E_n + m} I_{n-1}(\xi) \\ -\frac{\sqrt{2m\epsilon B}}{E_n + m} I_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

$$U_-(n, y, p_x, p_z) = \begin{pmatrix} 0 \\ I_n(\xi) \\ -\frac{\sqrt{2n\epsilon B}}{E_n+m} I_{n-1}(\xi) \\ -\frac{p_z}{E_n+m} I_n(\xi) \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Le soluzioni relative alle radici negative della (2.24) si ottengono con un procedimento analogo a quello visto in precedenza e sono [6]

$$\psi = e^{i(E_n t + p_x x + p_z z)} V_s(n, y, p_x, p_z)$$

dove

$$V_+(n, y, p_x, p_z) = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E_n+m} I_{n-1}(\tilde{\xi}) \\ \frac{\sqrt{2n\epsilon B}}{E_n+m} I_n(\tilde{\xi}) \\ I_{n-1}(\tilde{\xi}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$V_-(n, y, p_x, p_z) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2n\epsilon B}}{E_n+m} I_{n-1}(\tilde{\xi}) \\ -\frac{p_z}{E_n+m} I_n(\tilde{\xi}) \\ 0 \\ I_n(\tilde{\xi}) \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

con

$$\tilde{\xi} = \sqrt{eB} \left(y + \frac{p_x}{eB} \right). \quad (2.34)$$

Dalla (2.22) si vede che l'energia dell'elettrone dipende, oltre che dalla proiezione del proprio spin, dall'intensità del campo magnetico applicato. Analizziamo brevemente i comportamenti asintotici. Se $B \rightarrow 0$ la (2.22) non è più valida e le soluzioni della (2.21) rimangono indeterminate. Questo era prevedibile: poiché non è stato utilizzato alcun metodo perturbativo, le soluzioni sono esatte e non approssimate; ovvero se $B \rightarrow 0$ non si ritrovano affatto le soluzioni per una particella libera ma, proprio perchè la (2.22) non è più soddisfatta, l'equazione (2.21) non è più l'equazione che descrive il moto dell'elettrone.

Al contrario, nel limite di campo forte, ossia se $B \gg 1$, nella (2.22) si possono trascurare i termini che si sommano ad eB , e quello che otteniamo è che $\epsilon_s \approx -s$; l'unico livello ad essere eccitato è il più basso tra i livelli di Landau, il livello $n = 0$, che è anche l'unico non degenere.

Capitolo 3

L'elettrone in un campo elettrostatico

La teoria quantistica elaborata da Schrödinger ha permesso di dare una spiegazione teorica allo spettro a righe dell'atomo di idrogeno, cosa che la fisica classica non riusciva a fare. Tuttavia la teoria di Schrödinger non era in grado di dare conto della presenza di alcune righe spettrali molto sottili evidenziate in seguito al miglioramento delle tecniche sperimentali. La teoria di Dirac dà conto della presenza di queste righe spettrali e consente di calcolarne la corretta sequenza, permettendo di ricavare teoricamente la formula trovata da Sommerfeld per i livelli energetici degli atomi idrogenoidi.

3.1 Un generico campo a simmetria sferica

In questo paragrafo affronteremo il problema del moto di un elettrone in un generico campo a simmetria sferica, considerando le proprietà dell'hamiltoniano di Dirac in presenza di questo campo. Quest'hamiltoniano è

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m + V(r). \quad (3.1)$$

Gli operatori

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \quad (3.2)$$

e

$$K = \beta(\vec{\Sigma} \cdot \vec{J} - \frac{1}{2}\hbar) = \beta(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar) \quad (3.3)$$

commutano con l'hamiltoniano (3.1), come si può verificare senza grosse difficoltà, e rappresentano le costanti del moto [7].

Calcoliamo, a titolo d'esempio, il commutatore di H e \vec{J} .

$$[H, \vec{J}] = [H, \vec{L}] + \frac{\hbar}{2}[H, \vec{\Sigma}]. \quad (3.4)$$

Nel primo dei precedenti il calcolo si riduce a

$$[\vec{L}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}], \quad (3.5)$$

dal momento che \vec{L} commuta sia con β che con il potenziale $V(r)$. Quindi, prendendo in considerazione solo L_x , avremo

$$[L_x, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] = \alpha_y [L_x, p_y] + \alpha_z [L_x, p_z] = \alpha_y (-p_y y) p_z + \alpha_z (p_z z) p_y, \quad (3.6)$$

che, ricordando che $p_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$, implica

$$[L_x, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] = i\hbar(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y) = i\hbar(\vec{\alpha} \times \vec{p})_x. \quad (3.7)$$

Generalizzando, possiamo scrivere

$$[\vec{L}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] = i\hbar(\vec{\alpha} \times \vec{p}). \quad (3.8)$$

Il fatto che il momento angolare orbitale non sia una costante del moto è la differenza fondamentale tra il caso non relativistico e quello relativistico. Per quanto riguarda il calcolo del commutatore

$$\frac{\hbar}{2}[H, \vec{\Sigma}]$$

conviene prima introdurre la matrice 4×4

$$\gamma'_5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

per la quale valgono le seguenti

$$-\gamma'_5 \vec{\alpha} = \vec{\Sigma}, \quad -\vec{\alpha} \gamma'_5 = \vec{\Sigma},$$

$$-\gamma'_5 \vec{\Sigma} = \vec{\alpha}, \quad -\vec{\Sigma} \gamma'_5 = \vec{\alpha},$$

di semplice verifica, dalle quali segue immediatamente che

$$[\gamma'_5, \vec{\alpha}] = 0, \quad [\gamma'_5, \vec{\Sigma}] = 0. \quad (3.10)$$

Grazie alle precedenti, il commutatore che ci interessa calcolare diventa

$$\frac{1}{2} \hbar [\Sigma_x, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] = -\frac{1}{2} \hbar \gamma'_5 [\alpha_x, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}]. \quad (3.11)$$

Utilizzando le relazioni di commutazione delle matrici $\vec{\alpha}$ insieme a quelle relative alle matrici di Pauli $\vec{\sigma}$, otteniamo, dopo alcuni passaggi algebrici,

$$\frac{1}{2} \hbar [\Sigma_x, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] = i \hbar (\alpha_z p_y - \alpha_y p_z) = -i \hbar (\vec{\alpha} \times \vec{p})_x. \quad (3.12)$$

La precedente implica

$$\frac{1}{2} \hbar [\vec{\Sigma}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] = -i \hbar (\vec{\alpha} \times \vec{p}). \quad (3.13)$$

L'hamiltoniano commuta, dunque, con \vec{J} e K ; si dimostra che \vec{J} e K commutano [4], e questo ci permette di affermare che gli operatori H , \vec{J}^2 , J_3 e K ammettono un insieme completo di autostati simultanei. L'equazione agli autovalori relativa all'operatore K sarà

$$K\psi = -\hbar\kappa\psi. \quad (3.14)$$

Tra gli operatori K^2 e \vec{J}^2 sussiste la relazione

$$K^2 = \vec{J}^2 + \frac{1}{4}\hbar^2, \quad (3.15)$$

che implica per gli autovalori la relazione

$$\kappa = \pm(j + \frac{1}{2}). \quad (3.16)$$

3.1.1 La separazione delle variabili

Presenteremo di seguito la tecnica generale per la soluzione dell'equazione di Dirac in un campo centrale, adoperando il metodo della separazione delle variabili. Per ottenere la soluzione conviene effettuare una riduzione a spinori a due componenti della ψ che soddisfa

$$[c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + V(r)]\psi(x) = E\psi(x). \quad (3.17)$$

Supporremo dunque che

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \phi(x) \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Consideriamo ora la forma esplicita dell'operatore K , che in rappresentazione di Dirac sarà

$$K = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \hbar \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Tenendo conto della (3.18), l'equazione agli autovalori diventa, dopo alcuni passaggi,

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{L}\chi = -\hbar(1 + \kappa)\chi, \quad (3.20)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{L}\phi = -\hbar(1 - \kappa)\phi. \quad (3.21)$$

Le relazioni precedenti ci dicono che χ e ϕ sono autofunzioni di $\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$; ma questo vuol dire che sono anche autofunzioni di \vec{L}^2 . Infatti grazie alla (3.18), considerando l'azione di \vec{L}^2 su χ e ϕ , possiamo scrivere

$$\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \frac{3}{4} \hbar^2 \quad (3.22)$$

e quindi χ e ϕ , essendo autofunzioni di \vec{J}^2 e di $\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$, risultano autofunzioni di \vec{L}^2 ; indichiamo gli autovalori di \vec{L}^2 , quando opera su χ e su ϕ , rispettivamente come

$$\vec{L}^2 \chi = \hbar^2 l_\chi (l_\chi + 1) \chi, \quad (3.23)$$

$$\vec{L}^2 \phi = \hbar^2 l_\phi (l_\phi + 1) \phi, \quad (3.24)$$

dove, in base all'espressione di \vec{J}^2 , abbiamo posto

$$l_\chi (l_\chi + 1) = j(j + 1) + \kappa + \frac{1}{4}, \quad (3.25)$$

$$l_\phi (l_\phi + 1) = j(j + 1) - \kappa + \frac{1}{4}. \quad (3.26)$$

E' evidente che, se j e κ sono fissati, i due autovalori sono diversi.

Procediamo nell'analisi del problema considerando l'azione dell'hamiltoniano (3.17) sulla ψ , per la quale abbiamo supposto valga la (3.18). Quello che otteniamo è

$$(c\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\phi(x) = (E - V - mc^2)\chi(x), \quad (3.27)$$

$$(c\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi(x) = (E - V + mc^2)\phi(x). \quad (3.28)$$

Essendo in presenza di un campo centrale, supporremo che per gli spinori χ e ϕ valga la seguente fattorizzazione

$$\chi = g(r) Y_{j_3}^{j l_\chi}, \quad (3.29)$$

$$\phi = i f(r) Y_{j_3}^{j l_\phi}, \quad (3.30)$$

dove le $Y_{j_3}^{j l}$ sono gli spinori sferici, autofunzioni di \vec{J}^2 , J_3 , \vec{L}^2 ed \vec{S}^2 , che ovviamente sono la generalizzazione delle armoniche sferiche al caso in cui

si consideri anche il momento angolare di spin. Riscriviamo l'operatore $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ come

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} \left(-i\hbar r \frac{\partial}{\partial r} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right), \quad (3.31)$$

avendo sfruttato nell'ultimo passaggio la (2.10). Applicandolo, ad esempio, alla ϕ otteniamo

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \phi = \hbar \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} Y_{j_3}^{j l_\phi} \left(\frac{df(r)}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} f(r) \right), \quad (3.32)$$

dal momento che sia ϕ che χ sono autofunzioni di $\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$. Poichè l'operatore $\vec{\sigma} \cdot \vec{r}$ è invariante per rotazioni spaziali ma pseudoscalare per riflessione spaziale, la sua applicazione alla funzione $Y_{j_3}^{j l_\phi}$ genera una funzione $Y_{j_3}^{j l}$ che ha come autovalore l uno diverso da l_ϕ , a causa del cambiamento di parità dovuto al fatto che $\vec{\sigma} \cdot \vec{r}$ è uno pseudoscalare; in particolare, dopo l'applicazione di $\vec{\sigma} \cdot \vec{r}$, l'autovalore sarà l_χ , dato che l_ϕ ed l_χ hanno parità opposta [7]. Quindi

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} Y_{j_3}^{j l_\phi} = -Y_{j_3}^{j l_\chi}, \quad (3.33)$$

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} Y_{j_3}^{j l_\chi} = -Y_{j_3}^{j l_\phi}. \quad (3.34)$$

I segni sono imposti in maniera arbitraria grazie alla libertà di scegliere la fase relativa, con l'unica imposizione che il prodotto dei coefficienti sia pari a 1, dovendo l'applicazione ripetuta dell'operatore dare la stessa autofunzione di partenza. Tenendo conto di quanto appena esposto, le equazioni del moto diventano

$$-\hbar c \left(\frac{df(r)}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} f(r) \right) = (E - V(r) - mc^2) g(r), \quad (3.35)$$

$$\hbar c \left(\frac{dg(r)}{dr} + \frac{1 + \kappa}{r} g(r) \right) = (E - V(r) + mc^2) f(r). \quad (3.36)$$

Come nel caso non relativistico, abbiamo ricondotto il problema al calcolo delle funzioni d'onda radiali $f(r)$ e $g(r)$. La differenza col problema non

relativistico è che la soluzione dell'equazione di Dirac comporta la soluzione di due equazioni differenziali accoppiate, al contrario dell'unica necessaria per l'equazione di Schrödinger.

3.2 Le funzioni radiali per l'atomo d'idrogeno

Calcoleremo ora la soluzione esplicita nel caso in cui il potenziale centrale sia quello coulombiano

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}; \quad (3.37)$$

inoltre per semplificare i calcoli adotteremo il sistema di unità naturali. Il potenziale centrale permette di utilizzare, al posto delle funzioni f e g , due nuove funzioni radiali, dette funzioni radiali ridotte,

$$F(r) = rf(r), \quad G(r) = rg(r) \quad (3.38)$$

grazie alle quali le equazioni del moto diventano

$$-\left(\frac{dF(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r}F(r)\right) = \left(E - m + \frac{e^2}{r}\right)G(r), \quad (3.39)$$

$$\left(\frac{dG(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r}G(r)\right) = \left(E + m + \frac{e^2}{r}\right)F(r). \quad (3.40)$$

Nella regione vicino all'origine, quando cioè $r \rightarrow 0$, è possibile trascurare il termine in cui compare $E \pm m$ e, supponendo che la soluzione sia espandibile in serie di potenze, porre $G = ar^t$ e $F = br^t$; queste soluzioni, sostituite nelle equazioni del moto, conducono a

$$btr^{t-1} + \kappa br^{t-1} + e^2 ar^{t-1} = 0 \quad (3.41)$$

$$atr^{t-1} + \kappa ar^{t-1} + e^2 br^{t-1} = 0 \quad (3.42)$$

dalle quali otteniamo

$$t^2 = \kappa^2 - e^4 \implies t = \pm \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4}. \quad (3.43)$$

La soluzione col segno negativo va scartata dal momento che porta a soluzioni non accettabili. Introduciamo ora la nuova variabile

$$\rho = \lambda r, \quad (3.44)$$

dove abbiamo posto $\lambda = \sqrt{m^2 - E^2}$, grazie alla quale possiamo riscrivere le equazioni del moto

$$\frac{dF(\rho)}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho}F(\rho) = \left(\sqrt{\frac{m-E}{m+E}} - \frac{e^2}{\rho}\right)G(\rho), \quad (3.45)$$

$$\frac{dG(\rho)}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho}G(\rho) = \left(\sqrt{\frac{m+E}{m-E}} + \frac{e^2}{\rho}\right)F(\rho). \quad (3.46)$$

Per $\rho \rightarrow \infty$ possiamo trascurare i termini proporzionali a $\frac{1}{\rho}$, ottenendo

$$\frac{d^2F(\rho)}{d\rho^2} = F(\rho), \quad (3.47)$$

$$\frac{d^2G(\rho)}{d\rho^2} = G(\rho). \quad (3.48)$$

Le soluzioni asintotiche per F e G saranno dunque

$$F(\rho) \approx e^{\pm\rho} \quad , \quad G(\rho) \approx e^{\pm\rho}; \quad (3.49)$$

la richiesta che le soluzioni siano normalizzabili fa sì che soltanto l'esponenziale negativo sia accettabile. Una volta ottenuti i comportamenti asintotici delle soluzioni possiamo ricercare la soluzione globale nella forma

$$F(\rho) = \rho^t e^{-\rho} \sum_n a_n \rho^n, \quad (3.50)$$

$$G(\rho) = \rho^t e^{-\rho} \sum_n b_n \rho^n; \quad (3.51)$$

sostituendo le precedenti nelle equazioni del moto ed eguagliando i termini corrispondenti otteniamo le relazioni di ricorrenza per i coefficienti a_n e b_n

$$(t + n - \kappa)a_n - a_{n-1} = \sqrt{\frac{m - E}{m + E}}b_{n-1} - e^2b_n, \quad (3.52)$$

$$(t + n + \kappa)b_n - b_{n-1} = \sqrt{\frac{m + E}{m - E}}a_{n-1} + e^2a_n, \quad (3.53)$$

dalle quali otteniamo, dopo alcuni passaggi algebrici,

$$((m + E)(t + n - \kappa) + e^2\lambda)a_n - (\lambda(t + n + \kappa) - (m + E)e^2)b_n = 0. \quad (3.54)$$

Le precedenti relazioni, valutate per $n \rightarrow \infty$, implicano che le serie di potenze nelle (3.50) e (3.51) abbiano un andamento esponenziale, e precisamente

$$\sum_n a_n \rho^n \approx e^{2\rho} \quad , \quad \sum_n b_n \rho^n \approx e^{2\rho}; \quad (3.55)$$

questo vuol dire che il comportamento asintotico di F e G , per grandi ρ , sarebbe $F(\rho) = G(\rho) \approx \rho^t e^\rho$ il che porterebbe a soluzioni fisicamente non accettabili. E' dunque necessario che le serie di potenze si interrompano ad un certo ordine, divenendo di fatto dei polinomi. Supponiamo che il primo coefficiente nullo sia quello di ordine $n' + 1$. Per la F questo significa

$$a_{n'} \neq 0 \quad , \quad a_{n'+1} = 0.$$

Le relazioni di ricorsione per i coefficienti, scritte ponendo $n = n' + 1$, diventano

$$-a_{n'} = \sqrt{\frac{m - E}{m + E}}b_{n'} - e^2b_{n'+1}, \quad (3.56)$$

$$(t + n + \kappa)b_{n'+1} - b_{n'} = \sqrt{\frac{m + E}{m - E}}a_{n'}; \quad (3.57)$$

perchè queste equazioni siano compatibili occorre che $b_{n'+1} = 0$, il che vuol dire che entrambe le serie si interrompono allo stesso ordine e che vale la

$$a_{n'} = -\sqrt{\frac{m-E}{m+E}} b_{n'}. \quad (3.58)$$

La precedente, sostituita nella (3.54), porta a

$$\lambda(t+n') = Ee^2. \quad (3.59)$$

3.2.1 La struttura fine delle righe spettrali

La teoria di Dirac è in grado di dare una spiegazione alla cosiddetta struttura fine delle righe spettrali dell'atomo di idrogeno, che la teoria di Schrödinger non prevede, e per la quale Sommerfeld aveva ricavato una formula. Sostituendo nella 3.59 le espressioni di λ e t otteniamo

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{e^4}{\left(n' + \sqrt{(j+1/2)^2 - e^4}\right)^2}}}. \quad (3.60)$$

I valori di E dipendono unicamente da n' e da $|\kappa| = j + 1/2$; sviluppando la (3.60) in serie nel parametro e^4 otteniamo

$$E = m \left[1 - \frac{1}{2} \frac{e^4}{n^2} - \frac{1}{2} \frac{e^8}{n^3} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) + O(e^{12}) \right], \quad (3.61)$$

nella quale abbiamo definito il numero quantico principale

$$n = n' + (j + 1/2). \quad (3.62)$$

Nell'equazione (3.61) si riconosce il termine in e^4 , cosiddetto di *Balmer*, ed il termine di struttura fine, di ordine e^8 . La (3.61) mostra come, grazie alla teoria di Dirac, sia possibile rimuovere, anche se parzialmente, la degenerazione sui livelli: tra gli stati aventi lo stesso numero quantico principale, quelli caratterizzati da un valore di j minore hanno una minore energia.

Nell'analisi dell'atomo di idrogeno abbiamo considerato la sola interazione coulombiana tra nucleo ed elettrone. Abbiamo trascurato l'interazione magnetica tra il dipolo del nucleo ed il dipolo dell'elettrone. Questo termine di accoppiamento è il responsabile della cosiddetta *struttura iperfine* delle righe spettrali. Infatti quest'interazione magnetica produce uno sdoppiamento di ogni singolo livello con una separazione in energia dell'ordine dei 10^{-6} eV [7].

Capitolo 4

Il sistema elettrone-monopolo magnetico

Nella storia della fisica teorica, l'ipotesi della possibile esistenza di un monopolo magnetico forse non ha eguali. Nessun'altra costruzione puramente teorica è riuscita a sopravvivere per oltre un secolo in totale assenza di evidenze sperimentali. Ci si aspetterebbe, data la simmetria tra quantità elettriche e magnetiche, che così come esiste la particella elettrica fondamentale, l'elettrone, anche il monopolo magnetico faccia parte dell'universo che conosciamo. Invece sperimentalmente non è mai stato osservato alcun monopolo magnetico. Negli ultimi anni, tuttavia, la teoria dei monopoli magnetici è risultata connessa con molti problemi della moderna fisica teorica, quali ad esempio il confinamento in cromodinamica quantistica, il decadimento dei protoni, gli aspetti astrofisici ed evolutivi dell'universo primordiale. Questo vuol dire che una comprensione profonda del perchè nell'universo non vi siano i monopoli magnetici può portare a capire meglio le leggi fondamentali della natura. Ricordiamo che, in presenza di un monopolo magnetico, le equazioni di Maxwell diventerebbero

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = 4\pi(\rho_e + i\rho_g),$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_e + i\mathbf{j}_g) + i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + i\mathbf{B}).$$

4.1 Il campo di un monopolo magnetico

Al livello classico la forma del campo generato da un monopolo magnetico di carica g ci è suggerita dal campo elettrostatico, ed è

$$\mathbf{B} = g\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (4.1)$$

tenendo conto della simmetria precedentemente menzionata tra campo magnetico e campo elettrico. Se il monopolo è situato nell'origine degli assi cartesiani, l'equazione del moto per una particella carica elettricamente e che si muove nel campo creato dal monopolo sarà

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \frac{eg}{r^3}\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r}\right]. \quad (4.2)$$

La caratteristica principale del moto di una carica elettrica nel campo di un monopolo è che il momento angolare ordinario, $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, a differenza del campo elettrico, non è un integrale del moto; infatti dalla precedente equazione del moto ricaviamo che

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \frac{eg}{mr^3}[\tilde{\mathbf{L}} \times \mathbf{r}]. \quad (4.3)$$

In questo caso un integrale del moto è il momento angolare generalizzato

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] - eg\hat{\mathbf{r}}, \quad (4.4)$$

come si può verificare tramite la (4.3) [8].

4.1.1 Il potenziale vettore di un monopolo magnetico

Per poter in seguito trattare l'interazione elettrone-monopolo dal punto di vista quantistico è necessario soffermarsi su quello che è l'aspetto essenziale

della teoria dei monopoli magnetici, ossia la forma del potenziale vettore del campo \mathbf{B} . In base alla definizione standard, il potenziale vettore \mathbf{A} di un campo magnetico soddisfa alla

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (4.5)$$

A questo punto è evidente che la trattazione richiede una particolare attenzione. Infatti se da un lato, in base alla forma del campo magnetico (4.1) risulta, in analogia alla legge di Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g \delta^3(\mathbf{r}), \quad (4.6)$$

dove $\delta^3(\mathbf{r})$ è la densità di carica per una distribuzione puntiforme, dall'altro la (4.5) implica l'indivergenza del campo magnetico, ovvero

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.7)$$

La contraddizione tra le due precedenti è evidente.

Evidentemente, la forma del potenziale vettore relativo al campo di un monopolo non può essere regolare. Come avremo modo di verificare, sarà proprio la non regolarità del potenziale vettore che permetterà di superare le contraddizioni espresse in precedenza. L'espressione esplicita è quello che viene chiamato *potenziale di Dirac*

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{g}{r} \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{n}]}{r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}. \quad (4.8)$$

Nella precedente $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Grazie alla simmetria sferica del campo magnetico possiamo scrivere il potenziale come

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\theta) \nabla \phi = -g(1 + \cos \theta) \nabla \phi. \quad (4.9)$$

Come già accennato, questo potenziale presenta una singolarità per $\theta = 0$, pur essendo regolare per $\theta = \pi$. La presenza di questa singolarità non permette di effettuare il calcolo diretto del campo ma ci costringe ad usare

una forma regolarizzata del potenziale, effettuando in seguito un limite per ottenere il campo magnetico corretto. La forma regolare del (4.8) è

$$\mathbf{A}_R(\mathbf{r}, \epsilon) = \frac{g}{R} \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{n}]}{R - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}} \quad (4.10)$$

con

$$R = (r^2 + \epsilon^2)^{1/2}.$$

Dalla precedente è immediato ricavare la forma regolarizzata del campo. Risulta che un contributo supplementare al campo (4.1) lo si trova soltanto lungo il semiasse positivo z [8]. Il campo magnetico determinato dal potenziale di Dirac è dunque

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 4\pi g \mathbf{n} \theta(z) \delta(x) \delta(y); \quad (4.11)$$

valutando il flusso di questo campo attraverso una superficie chiusa che contiene il monopolo otteniamo

$$\Phi_{tot} = \oint d\sigma \mathbf{B} = g \left(\oint d\sigma \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 4\pi \oint d\sigma \theta(z) \delta(x) \delta(y) \right) = 4\pi g - 4\pi g = 0. \quad (4.12)$$

Il flusso del campo generato dal potenziale (4.8) è nullo, così come richiedono le equazioni di Maxwell. Tuttavia esso non corrisponde al potenziale generato da una singola carica isolata, bensì a quello dato da un solenoide infinitamente sottile disposto lungo il semiasse z positivo¹.

4.1.2 La quantizzazione della carica elettrica

La teoria dei monopoli magnetici di Dirac ha un risvolto estremamente importante per la teoria elettromagnetica. E' ben noto che tutte le particelle

¹Il problema dell'interazione carica-monopolo fu affrontato per la prima volta da Poincaré nel 1896 considerando l'interazione tra una carica elettrica ed un magnete molto lungo e molto sottile.

cariche nell'universo possiedono una carica elettrica che è proporzionale alla carica minima dell'elettrone. La natura di questa quantizzazione è sconosciuta.

Consideriamo ora l'operatore generalizzato del momento angolare

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\pi}] - eg\hat{\mathbf{r}} = [\mathbf{r} \times (\mathbf{p} + e\mathbf{A})] - eg\hat{\mathbf{r}}. \quad (4.13)$$

E' ovvio supporre che le componenti del momento angolare generalizzato soddisfino alle relazioni di commutazione standard per un operatore momento angolare; in particolare questo vuol dire che i suoi autovalori devono essere interi o seminteri, dunque nella forma $n/2$, con $n \in \mathbf{Z}$. Se supponiamo che il momento angolare orbitale $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\pi}$ abbia, come al solito, autovalori interi, allora dobbiamo concludere che, necessariamente²,

$$eg = \frac{n}{2}. \quad (4.14)$$

Questa è appunto la *condizione di quantizzazione della carica* di Dirac [8]. Vediamo, dunque, che, nonostante i monopoli magnetici non siano mai stati osservati, la presenza anche di uno solo di essi nell'universo sarebbe sufficiente a spiegare la quantizzazione della carica elettrica.

4.2 La soluzione dell'equazione di Dirac in presenza di un monopolo

Per ottenere la soluzione dell'equazione di Dirac in presenza del campo generato da un monopolo magnetico partiremo innanzitutto da una breve analisi del problema non-relativistico; lo faremo in quanto molto di ciò che si ottiene risolvendo l'equazione agli autovalori di Pauli tornerà utile nella soluzione del problema relativistico.

Una caratteristica interessante dell'interazione tra elettrone e monopolo viene

²Ci sono vari modi per ricavare la condizione di quantizzazione della carica [8]; abbiamo presentato il più semplice.

fuori già da una prima analisi del problema. Il valore minimo della costante $\mu = eg$, che appare nell'espressione del momento angolare addizionale relativo al monopolo, che sia compatibile con la condizione di quantizzazione della carica, è $\mu = 1/2$. Questo vuol dire che per lo stato fondamentale, caratterizzato da $\mathbf{J} = 0$, varrà $\mathbf{S} + \mathbf{T} = 0$. Poiché la direzione di \mathbf{T} è data $\hat{\mathbf{r}}$, se l'elettrone riesce ad attraversare il nocciolo del monopolo ovviamente avremo $\mathbf{T} \rightarrow -\mathbf{T}$. Per la conservazione del momento angolare, anche lo spin dovrà cambiare segno.

4.2.1 L'equazione di Pauli

La presenza del momento angolare supplementare $\mathbf{T} = -\mu\hat{\mathbf{r}}$ fa sì che lo spettro degli autovalori di j , il momento angolare totale, possa partire sia dal valore $\mu - 1/2$ che da quello $\mu + 1/2$. Vedremo che il caso $j = \mu - 1/2$ presenta delle caratteristiche particolari.

Consideriamo adesso il caso in cui $j \geq \mu + 1/2$; siccome possiamo scrivere l'hamiltoniano come [8]

$$-\frac{1}{2m}[\sigma \cdot (\nabla - ie\mathbf{A})]^2 = -\frac{1}{2mr^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \mathbf{L}^2 - \mu^2 + \mu(\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right], \quad (4.15)$$

parte angolare e parte radiale della funzione d'onda possono essere fattorizzate, e le rispettive equazioni risolte separatamente. La parte angolare del precedente hamiltoniano la possiamo scrivere come

$$\frac{1}{2mr^2} \left[\mathbf{L}^2 - \mu^2 + \mu(\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right] = \frac{1}{2m}(K^2 + K) \quad (4.16)$$

dove abbiamo introdotto l'operatore

$$K = \sigma \cdot (\mathbf{L} + \mu\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.17)$$

che rappresenta la generalizzazione dell'operatore parità. Le equazioni agli autovalori per l'operatore K sono

$$K\Omega_{\mu jm}^{(1)} = (-1 + \tilde{l})\Omega_{\mu jm}^{(1)}, \quad (4.18)$$

$$K\Omega_{\mu jm}^{(2)} = (-1 - \tilde{l})\Omega_{\mu jm}^{(2)}. \quad (4.19)$$

Nelle precedenti, le Ω sono combinazioni lineari degli spinori armonici

$$\phi_{\mu jm}^{(1)}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{\mu, j-1/2, m-1/2}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{\mu, j-1/2, m+1/2}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\phi_{\mu jm}^{(2)}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} Y_{\mu, j+1/2, m-1/2}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} Y_{\mu, j+1/2, m+1/2}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}; \quad (4.21)$$

le $Y_{\mu jm}$ sono le armoniche sferiche generalizzate.

Separando le variabili e tenendo conto delle equazioni agli autovalori dell'operatore K , l'equazione radiale per gli stati del primo tipo risulta essere

$$-\frac{1}{2m} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\tilde{l}(\tilde{l}-1)}{r^2} \right] R_{k\tilde{l}}^{(1)} = ER_{k\tilde{l}}^{(1)}, \quad (4.22)$$

che ha come soluzione la funzione di Bessel di ordine $\tilde{l} - 1/2$

$$R_{k\tilde{l}}^{(1)} = \sqrt{\frac{k}{r}} J_{\tilde{l}-1/2}(kr) \quad (4.23)$$

con $k = \sqrt{2mE}$.

Analogamente, per le funzioni del secondo tipo la soluzione radiale è

$$R_{k\tilde{l}}^{(2)} = \sqrt{\frac{k}{r}} J_{\tilde{l}+1/2}(kr). \quad (4.24)$$

Nel caso in cui $j = \mu - 1/2$ il discorso è completamente diverso.

Infatti, considerando che la condizione di quantizzazione della carica implica un valore minimo di μ pari ad $1/2$, questi stati, che chiameremo del terzo tipo, hanno momento angolare totale nullo. In questo caso esiste un'unica autofunzione dell'operatore K

$$\Omega_{\mu,\mu-1/2,m}^{(3)}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu-m+1/2}{2j+1}} Y_{\mu,\mu,m-1/2}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{\mu+m+1/2}{2j+1}} Y_{\mu,\mu,m+1/2}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

che soddisfa a

$$K\Omega_{\mu,\mu-1/2,m}^{(3)}(\theta, \varphi) = -\Omega_{\mu,\mu-1/2,m}^{(3)}(\theta, \varphi). \quad (4.26)$$

Le difficoltà sorgono nella risoluzione dell'equazione radiale. L'assenza del potenziale centrifugo implica che la soluzione dell'equazione differenziale

$$-\frac{1}{2m} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right] R_{kj}^{(3)} = ER_{kj}^{(3)} \quad (4.27)$$

sia, ovviamente, un'onda sferica

$$R_{kj}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\pm ikr}}{r}. \quad (4.28)$$

E' evidente che questo tipo di soluzione diverge nei pressi dell'origine. Per ovviare a questo problema si può supporre che nell'interazione tra un elettrone ed un monopolo sia presente un termine addizionale, dovuto ad interazione di tipo non elettromagnetico, che aggiungerebbe all'hamiltoniano un termine descrivente l'interazione tra \mathbf{T} ed un momento magnetico anomalo ϵ , del tipo

$$H_{extra} = \epsilon\mu \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{2mr^2}. \quad (4.29)$$

Un termine aggiuntivo di questo tipo porterebbe ad una soluzione regolare nell'intorno dell'origine, ma avrebbe anche un altro effetto. Per qualunque valore di j ci sarebbe uno stato non degenero con energia pari a zero.

4.2.2 Le autofunzioni di Dirac

Un elettrone relativistico nel campo esterno di un monopolo puntiforme è descritto dall'equazione

$$[-i\alpha(\nabla - ie\mathbf{A}) + \beta m]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (4.30)$$

Cerchiamo le autofunzioni dell'hamiltoniano

$$H = \begin{pmatrix} m & -i\sigma \cdot (\nabla - ie\mathbf{A}) \\ -i\sigma \cdot (\nabla - ie\mathbf{A}) & -m \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

e, come nella trattazione dell'equazione di Pauli, dobbiamo distinguere i casi $j \geq \mu + 1/2$ e $j = \mu - 1/2$.

Per gli stati del primo e del secondo tipo, le soluzioni all'equazione agli autovalori sono

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F(r)\Omega_{\mu jm}^{(1)} \\ iG(r)\Omega_{\mu jm}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

$$\psi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F(r)\Omega_{\mu jm}^{(2)} \\ iG(r)\Omega_{\mu jm}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

dal momento che ci troviamo in presenza di un campo centrale. Le $\Omega_{\mu jm}^{(1,2)}$ sono le autofunzioni dell'operatore K viste in precedenza; analogamente al problema coulombiano classico, le equazioni differenziali da risolvere per determinare ad esempio la parte radiale di $\psi^{(1)}(\mathbf{r})$ sono due accoppiate, e precisamente [8]

$$\frac{dF(r)}{dr} - \frac{\tilde{l}}{r}F(r) = (m + E)G(r), \quad (4.34)$$

$$\frac{dG(r)}{dr} + \frac{\tilde{l}}{r}G(r) = (m - E)F(r), \quad (4.35)$$

le cui soluzioni normalizzate sono

$$G(r) = \sqrt{\frac{r}{k}} J_{\tilde{l}+1/2}(kr) \quad , \quad F(r) = \frac{\sqrt{kr}}{E - m} J_{\tilde{l}-1/2}(kr) \quad (4.36)$$

con $k = \sqrt{E^2 - m^2}$. Le equazioni differenziali per gli stati del secondo tipo sono simili alle precedenti,

$$\frac{dF(r)}{dr} + \frac{\tilde{l}}{r}F(r) = (m + E)G(r) \quad (4.37)$$

$$\frac{dG(r)}{dr} - \frac{\tilde{l}}{r}G(r) = (m - E)F(r) \quad (4.38)$$

ed hanno come soluzioni

$$F(r) = \sqrt{\frac{r}{k}} J_{\tilde{l}+1/2}(kr) \quad , \quad G(r) = \frac{\sqrt{kr}}{E + m} J_{\tilde{l}-1/2}(kr). \quad (4.39)$$

Per gli stati del terzo tipo, le soluzioni saranno del tipo

$$\psi^{(3)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F(r)\Omega_{\mu jm}^{(3)} \\ iG(r)\Omega_{\mu jm}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

e le equazioni radiali che definiscono F e G

$$\frac{dG(r)}{dr} = (E - m)F(r) \quad (4.41)$$

$$\frac{dF(r)}{dr} = -(m + E)G(r) \quad (4.42)$$

le cui soluzioni possono essere, indifferentemente,

$$F(r) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kr + \delta) \quad , \quad G(r) = -\frac{1}{E + m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kr + \delta) \quad (4.43)$$

oppure

$$G(r) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kr + \delta) \quad , \quad F(r) = \frac{1}{E - m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kr + \delta). \quad (4.44)$$

Anche in questo caso le soluzioni del terzo tipo presentano dei problemi relativi alle condizioni al contorno nei pressi dell'origine.

Abbiamo passato brevemente in rassegna le principali proprietà classiche di un monopolo magnetico partendo dall'ipotesi che la simmetria tra campo

elettrico e magnetico implichi un campo di tipo coulombiano per un monopolo puntiforme. La trattazione quantistica si è concentrata sui monopoli di Dirac [8]. Abbiamo ricavato non solo le soluzioni dell'equazione di Dirac, ma anche la condizione di quantizzazione della carica.

Una trattazione completa sull'argomento monopoli magnetici, assolutamente al di là delle intenzioni di questo lavoro, è intimamente connessa con la teoria topologica e con le teorie non-Abeliane [8].

Conclusioni

La teoria sviluppata da Dirac per l'elettrone è uno dei risultati scientifici più rilevanti del secolo scorso. Questa teoria, nata nel 1928, affrontò e risolse simultaneamente due fra i maggiori problemi che impegnavano all'epoca la ricerca fisica: la mancanza di una descrizione teorica coerente delle proprietà di spin dell'elettrone e la mancanza di una teoria fisica in cui confluissero sia la meccanica quantistica sia la relatività ristretta. La teoria nacque dalla necessità di dare una migliore spiegazione ai fenomeni naturali, con particolare riferimento alla dinamica dell'elettrone dotato di spin, seguendo un approccio quantistico e relativistico. Da ciò seguì la necessità di considerare l'elettrone non dotato di dimensioni finite (ipotesi che cozzava con l'assunto fondamentale della relatività ristretta, l'insuperabilità della velocità della luce), ma puntiforme. Ne scaturì una teoria formalmente coerente che prevedeva l'esistenza di un grado di libertà spinoriale.

Storicamente, dunque, la teoria di Dirac altro non è che un perfezionamento delle teorie per l'elettrone elaborate negli anni precedenti al 1928, perfezionamento che anche Dirac riteneva non definitivo [2].

Non va dimenticato, infatti, che dei problemi a cui già abbiamo accennato, ed in cui incappavano le teorie quantistiche relativistiche precedenti, Dirac riuscì a risolvere solo quello relativo allo spin dell'elettrone. La teoria delle lacune, da lui proposta come soluzione al problema delle energie negative, non era soddisfacente dal punto di vista teorico, pur avendo portato alla scoperta del positrone.

La teoria di Dirac fornisce un brillante esempio della fecondità del ragiona-

mento matematico ai fini della comprensione del mondo fisico. Il fulcro della teoria è, infatti, il rigore matematico-formale e l'uso serrato del ragionamento deduttivo. Questi due aspetti hanno portato ad una riformulazione coerente di un concetto, quello dello spin dell'elettrone, che nelle teorie precedenti era già presente ma che era stato forzatamente introdotto per dare una spiegazione ad alcune evidenze sperimentali. Inoltre hanno condotto ad una previsione teorica, l'esistenza del positrone, inconcepibile in base alle precedenti teorie, ma verificata sperimentalmente pochi anni dopo.

Bibliografia

- [1] D. Monti, *Equazione di Dirac*, Bollati Boringhieri, Torino, 1996.
- [2] P. A. M. Dirac, *The Quantum Theory of the Electron*, Proc. Roy. Soc. London A, 117:610, 1928.
- [3] V. Barone, *Relatività. Principi e applicazioni*, Bollati Boringhieri, Torino, 2004.
- [4] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics: wave equations*, Springer, 1997.
- [5] J. Bjorken, S. Drell, *Relativistic quantum mechanics*, Mc Graw - Hill Inc., 1964.
- [6] K. Bhattacharya, *Solution of the Dirac equation in presence of uniform magnetic field*, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, 2008. arXiv:0705.4275v2.
- [7] A. Bottino, C. Giunti, *Lezioni di meccanica quantistica relativistica*, A.A. 2006-2007.
- [8] Y. Schnir, *Magnetic Monopoles*, Springer, 2005.