

UNIVERSITÀ DEL SALENTO



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Fisica

SIMMETRIE DI LIE DI EQUAZIONI DI EVOLUZIONE
ED APPLICAZIONE ALL'EQUAZIONE DI
FOKKER-PLANCK

Tesi di Laurea Triennale

Relatore:
PROF. ROSARIO ANTONIO LEO
Correlatore:
PROF. PIERGIULIO TEMPESTA

Candidato:
GABRIELE SICURO

Sessione estiva
Anno Accademico 2008/2009

*Le principali forme di bellezza sono
l'ordine, la simmetria e la definizione,
che le scienze matematiche mostrano a
un grado particolare.*

ARISTOTELE, *Metafisica*, XIII, 3

INDICE

INTRODUZIONE	iii	
1	DEFINIZIONI DI SIMMETRIE DI LIE LOCALI	1
1.1	Simmetrie di equazioni algebriche	2
1.1.1	L'algebra $Diff(M)$	2
1.1.2	Invarianza infinitesima e locale	2
1.1.3	Invarianti e dipendenza funzionale	4
1.2	Gruppi ed equazioni differenziali	5
1.2.1	Definizioni	5
1.2.2	Prolungamento di una funzione	6
1.2.3	Prolungamento dell'azione gruppale	7
1.2.4	Struttura di contatto del jet -space ed interpretazione geometrica	8
1.2.5	Invarianza infinitesima, teorema di Lie e formula generale di prolungamento	9
1.2.6	Riepilogo	13
2	RIDUZIONI PER SIMMETRIA	14
2.1	Riduzioni per simmetria di equazioni alle derivate parziali	14
2.2	Classificazione delle sottoalgebre delle algebre di Lie finitodimensionali	16
2.2.1	La rappresentazione aggiunta	17
2.2.2	Classificazione dei sottogruppi e delle sottoalgebre	18
2.3	Esempio: l'equazione del calore	19
2.3.1	Calcolo dei generatori dell'algebra	19
2.3.2	Classificazione dei sottogruppi e delle sottoalgebre unidimensionali	21
2.3.3	Soluzione tipo onda viaggiante	23
3	L'EQUAZIONE DI FOKKER-PLANCK UNIDIMENSIONALE	25
3.1	Il moto browniano e l'equazione di Fokker-Planck	25
3.1.1	Derivazione della EFP	27
3.1.2	Derivazione della EFP non lineare	28
3.2	La EFP e le statistiche non estensive: un'introduzione	29
3.2.1	Caso stazionario	30
3.2.2	Il teorema H e l'entropia di Tsallis	31
3.2.3	Diffusione anomala ed entropia	33
3.3	Soluzioni algebriche di Lie di EFP lineari	35
3.4	Simmetrie di Lie di una EFP lineare	37
3.4.1	Sottoalgebre dell'algebra di Lie della EFP	41
3.5	Simmetrie non locali	41
3.5.1	Simmetrie potenziali nella EFP unidimensionale	42
	Bibliografia	44

INTRODUZIONE

Le ricerche di Sophus Lie nel campo delle equazioni differenziali alle derivate parziali hanno permesso di affrontarne lo studio sotto prospettive totalmente nuove. Egli scoprì che i gruppi di trasformazione continui, nati dalla felice intuizione di combinare proprietà tipicamente algebriche (quelle di gruppo) a proprietà di tipo geometrico (quelle di varietà differenziale), possono essere interpretati come flussi associati a campi vettoriali di generatori infinitesimi. Tali generatori hanno la struttura di un'algebra, detta *algebra di Lie*, mentre il gruppo di trasformazioni così caratterizzato è detto *gruppo di Lie*.



Marius Sophus Lie.

Le tecniche messe a punto da Lie non hanno solo valore matematico, ma anche un profondo significato fisico: determinando le simmetrie di un'equazione differenziale che emerge nello studio di un particolare sistema fisico, si evidenziano anche le proprietà di simmetria del sistema fisico stesso, che talvolta sono deducibili mediante elementari considerazioni geometriche (come possono essere le invarianze per traslazioni e rotazioni), talvolta sono più sottili e profonde.

L'utilizzo di simmetrie ed integrali primi per l'integrazione di equazioni differenziali non era nuovo in fisica nella seconda metà dell'Ottocento, quando Lie avviò le sue ricerche sui gruppi continui di trasformazioni; tuttavia non era stata elaborata alcuna teoria rigorosa sul legame tra invarianti, simmetrie ed equazioni differenziali. Un merito di Lie fu quello di comprendere che molte tecniche messe a punto fino ad allora, spesso costruite *ad hoc* per specifici problemi, potevano essere inquadrare in una teoria assai generale, capace non solo di giustificare la presenza di simmetrie ed invarianti già noti, ma anche di manifestare l'esistenza di nuove simmetrie, meno evidenti.

La presente tesi intende analizzare una delle molte tecniche messe a punto nel contesto della teoria di Lie, ovvero quella delle simmetrie di Lie di tipo *puntuale*. Tale tecnica è, peraltro, la principale a disposizione nell'analisi gruppale. Applicando un opportuno criterio di invarianza locale si possono calcolare i gruppi di simmetria di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, ossia gruppi di trasformazioni che permettono di ottenere soluzioni del sistema da soluzioni note. Questo fatto è già di per sé di notevole importanza: infatti basta conoscere le simmetrie di un sistema di equazioni differenziali e, ad esempio, una soluzione del sistema (anche banale), per ottenerne un'intera famiglia di soluzioni. Queste tecniche saranno oggetto del primo capitolo.

Nel secondo capitolo verrà affrontato il tema delle riduzioni per simmetria: la conoscenza delle simmetrie di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali permette di ridurre il numero delle variabili indipendenti in gioco. In particolare si sfrutta la presenza di invarianti, ovvero di funzioni che l'azione del

gruppo mappa in se stesse, per effettuare un cambio di variabili in cui le nuove variabili dipendenti risultano funzione di un numero minore di variabili indipendenti rispetto al problema originale. In questo modo il sistema di equazioni differenziali viene semplificato (talvolta drasticamente) e l'integrazione risulta in molti casi più agevole. Il processo di riduzione è tanto più efficiente quanto più il sistema è ricco di simmetrie (e quindi di invarianti): se si dispone di un numero adeguato di simmetrie si può, al limite, ridurre il sistema di equazioni alle derivate parziali ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Accenneremo anche ad un problema di grande rilevanza, ovvero alla classificazione delle sottoalgebre di Lie ammesse dal dato sistema di equazioni. La classificazione è estremamente importante perché permette di suddividere le soluzioni in famiglie. Ogni famiglia di soluzioni corrisponde ad una particolare classe di sottogruppi equivalenti tra loro (la relazione di equivalenza ha in questo caso il nome di *coniugazione*). In genere quello che avviene è che si dispone della classe di coniugazione e si intende trovare una soluzione invariante per il particolare sottogruppo in esame. Questo accade ogni volta che si integra un sistema di equazioni differenziali mediante tecniche di riduzione per simmetria: infatti, utilizzando ad esempio gli invarianti forniti da $G_0 \subset G$ per ridurre il sistema di equazioni, si impone implicitamente l'invarianza della soluzione per trasformazioni in G_0 (e per ogni altro gruppo ad esso coniugato). L'importanza di questa tecnica da un punto di vista fisico è evidente: talvolta è essenziale che una soluzione di un problema sia invariante, ad esempio, sotto trasformazioni di Galilei o di Lorentz.

A titolo d'esempio analizzeremo, con le tecniche messe a punto, l'equazione del calore, trovandone le simmetrie e le sottoalgebre di dimensione unitaria.

Infine, nel terzo capitolo si discuterà l'equazione di Fokker-Planck in diverse sue formulazioni (lineare, non lineare, con coefficienti dipendenti dal tempo...), ricavandola da relazioni fondamentali, come la master equation.

L'equazione è rilevante nella descrizione di fenomeni di tipo stocastico. Infatti, da un punto di vista fisico, la funzione incognita che compare nell'equazione non è altro che una distribuzione di probabilità cui è soggetto il sistema in analisi (ad esempio, nel caso del moto browniano, l'incognita è la distribuzione di probabilità di una particella di polvere in sospensione, in funzione della coordinata temporale e di quelle spaziali). Una soluzione dell'equazione di Fokker-Planck deve dunque godere di proprietà tipiche di una distribuzione di probabilità. È dunque legittimo chiedersi a quale statistica tale distribuzione soddisfi. Si vedrà che, a seconda dei coefficienti che compaiono nell'equazione, si possono associare al sistema fisico descritto dall'equazione diverse espressioni per l'entropia, non necessariamente coincidenti con quella di Boltzmann-Gibbs. In particolare, come osserveremo nel terzo capitolo, sfruttando l'equazione di Fokker-Planck non lineare, mediante opportune ipotesi si può desumere l'espressione dell'entropia di Tsallis, che generalizza quella di Boltzmann-Gibbs nei casi in cui la dinamica di un sistema è governata da una statistica di tipo *non estensivo*. L'equazione di Fokker-Planck non lineare può quindi descrivere l'evoluzione di sistemi per i quali la statistica di Boltzmann-Gibbs è inapplicabile. In questo contesto, verrà ricavato, facendo riferimento a lavori assai recenti, il teorema H per l'energia libera:

l'utilizzo dell'equazione di Fokker-Planck ci permetterà di estendere il risultato anche a statistiche non estensive.

Per quanto riguarda le simmetrie dell'equazione di Fokker-Planck, si presenteranno i generatori nel caso lineare, accennando poi ad un risultato di Bluman che dimostra che l'algebra di dimensione 6 dell'equazione di Fokker-Planck è equivalente all'algebra, di pari dimensione, dell'equazione del calore. Infine, si tratterà brevemente un particolare caso di simmetrie di tipo non locale, le *simmetrie potenziali*, e le si applicheranno all'equazione di Fokker-Planck.

L'analisi dell'equazione di Fokker-Planck mediante la teoria di Lie non si esaurisce, tuttavia, con i risultati riportati. L'equazione può essere infatti studiata ricorrendo a tecniche qui non trattate (come le simmetrie generalizzate). Inoltre, l'applicazione della teoria di Lie si è limitata solamente al caso di equazioni di Fokker-Planck lineari, mentre è possibile indagare anche le simmetrie dell'equazione nel caso non lineare, che, come abbiamo già detto, è di notevole utilità nello studio di vari aspetti della meccanica statistica, dalla generalizzazione dell'entropia di Boltzmann-Gibbs alla descrizione di processi di diffusione anomala.

DEFINIZIONI DI SIMMETRIE DI LIE LOCALI

Nella seconda metà del secolo XIX Sophus Lie avviò uno studio delle proprietà di invarianza delle equazioni differenziali sotto l'azione di gruppi di simmetria continui, oggi chiamati gruppi di Lie. La teoria da lui elaborata, sviluppata successivamente da molti altri matematici e fisici, ha oggi applicazioni in svariati ambiti, dall'analisi numerica alla meccanica classica, dalla meccanica quantistica alla relatività. Il lavoro iniziale di Lie sull'applicazione dei gruppi di trasformazioni alle equazioni differenziali è però stato rivalutato solo in tempi relativamente recenti, quando, intorno agli anni cinquanta del XX secolo, G. Birkhoff evidenziò le potenzialità di questa teoria nello studio delle equazioni della fluidodinamica. In seguito numerose sono state le pubblicazioni che hanno ripreso e sviluppato le tecniche da lui suggerite; alcune di queste offrono una trattazione sistematica e organica [5; 14; 19; 20].

I gruppi che verranno di seguito studiati sono i gruppi di simmetria *continui*; i gruppi discreti, benché importanti, non sono trattabili con le tecniche qui presentate, come sarà evidente dalle ipotesi di differenziabilità che verranno avanzate. L'intuizione fondamentale di Lie fu che la condizione di invarianza sotto l'azione di un gruppo continuo può essere formulata mediante una condizione di invarianza di tipo infinitesimo. La potenza del metodo è ancor più evidente nel caso si applichi ad equazioni di evoluzione di tipo non lineare (molto comuni nelle applicazioni fisiche).

La ricerca del gruppo di simmetria G ammesso da un sistema di equazioni differenziali è motivata dalle sue molteplici applicazioni:

- consente di generare soluzioni nuove da soluzioni note (talvolta, data una soluzione banale, l'azione grupale restituisce soluzioni interessanti);
- permette di effettuare riduzioni per simmetria (di questo discuteremo più approfonditamente nel secondo capitolo);
- permette di identificare le equazioni mediante gruppi di simmetria isomorfi e di trasformare un'equazione in un'altra.

Nel caso di equazioni differenziali ordinarie, i gruppi di simmetria permettono, sotto certe ipotesi, di ridurre l'ordine delle equazioni considerate. Una volta risolte le equazioni si può risalire a soluzioni particolari dell'equazione di partenza. Tuttavia nel presente lavoro questo aspetto non verrà approfondito, poiché ci si dedicherà alle equazioni differenziali alle derivate parziali.

1.1 SIMMETRIE DI EQUAZIONI ALGEBRICHE

Lo studio delle simmetrie di un sistema di equazioni differenziali risulta assai più chiaro se, preliminarmente, si procede con l'analisi delle simmetrie di un sistema di equazioni algebriche. Per *sistema di equazioni algebriche*¹ intendiamo un sistema

$$F_\nu(x) = 0 \quad \nu = 1, \dots, l \quad (1.1)$$

di equazioni lisce a valori reali definite su una varietà M . Un *gruppo di simmetrie* per tale sistema è un gruppo che trasforma soluzioni del sistema in altre soluzioni.

1.1.1 L'algebra $\text{Diff}(M)$

Sia data una varietà M di dimensione k con base (x^1, \dots, x^k) . L'algebra $\text{Diff}(M)$ del gruppo $\text{Diff}(M)$ dei diffeomorfismi della varietà M è l'algebra dei campi vettoriali differenziabili esprimibili nella forma:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

I gruppi che verranno analizzati saranno intesi sempre come sottogruppi del gruppo $\text{Diff}(M)$, mentre le loro algebre si intenderanno sempre come sottoalgebre di $\text{Diff}(M)$.

1.1.2 Invarianza infinitesima e locale

Introduciamo preliminarmente le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 1.1 - Sia $G \subset \text{Diff}(M)$ un gruppo locale² di trasformazioni. Un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset M$ è detto G -invariante e G è detto *gruppo di simmetria per \mathcal{S}* se $\forall x \in \mathcal{S}$ e $\forall g \in G$, $g \cdot x \in \mathcal{S}$ ovunque sia definito.

DEFINIZIONE 1.2 - Sia $G \subset \text{Diff}(M)$ un gruppo locale di trasformazioni. Una funzione $F: M \rightarrow N$, su N varietà, è detta G -invariante se per ogni $x \in M$ e ogni $g \in G$ tali che $g \cdot x$ sia definito si abbia

$$F(g \cdot x) = F(x).$$

¹ Osserviamo che in questo contesto l'attributo *algebrico* ha il semplice scopo di distinguere tale caso da quello di sistemi di equazioni differenziali.

² Un *gruppo di Lie locale ad r parametri* consiste di aperti connessi $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ contenenti l'origine 0 , e da mappe lisce $m: V \times V \rightarrow \mathbb{R}^r$, che definiscono l'operazione di gruppo, e $i: V_0 \rightarrow V$, che definisce l'inversione di gruppo, con le seguenti proprietà:

ASSOCIATIVITÀ se $x, y, z \in V$ e $m(x, y) \in V$ e $m(x, z) \in V$, allora $m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$;

ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO per ogni $x \in V$ $m(x, 0) = x = m(0, x)$;

ESISTENZA DELL'ELEMENTO INVERSO per ogni elemento $x \in V_0$ $m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x)$.

Se la funzione è del tipo $\zeta: M \rightarrow \mathbb{R}$, allora ζ è detta semplicemente *invariante di G*, mentre $F: M \rightarrow \mathbb{R}^l$ è invariante per G se e solo se lo sono tutte le sue componenti F_ν .

Assegnato un gruppo di Lie G , è possibile associare ad esso un insieme di generatori infinitesimi, che costituiscono l'algebra di Lie \mathfrak{g} corrispondente. È noto che, esponenziando un vettore dell'algebra, si ottiene un elemento del gruppo di trasformazioni. Per di più, l'uso dei generatori infinitesimi ha il grosso vantaggio di linearizzare l'azione del gruppo in un certo intorno di $x \in M$. Pertanto si può utilizzare questa corrispondenza (locale) per fornire una condizione di invarianza per trasformazioni gruppali che ricorra ai generatori: la condizione che ne deriva è, dunque, di tipo lineare, ed è espressa dalla seguente Proposizione.

TEOREMA 1.1 - Sia $G \subset \text{Diff}(M)$ un gruppo di Lie locale connesso, con M varietà m -dimensionale. Sia $F: M \rightarrow \mathbb{R}^l$, con $l \leq m$, un sistema di equazioni algebriche del tipo (1.1). Per ipotesi, assumiamo che il sistema sia di rango massimo, ovvero che il rango della matrice jacobiana sia l . Allora G è un gruppo di simmetria del sistema se e solo se

$$\mathbf{v}[F_\nu(x)]|_{F(x)=0} = 0 \quad \nu = 1, \dots, l \quad (1.2)$$

per ogni generatore infinitesimo \mathbf{v} di G .

Dimostrazione. L'implicazione diretta si ha immediatamente differenziando $F(e^{\varepsilon\mathbf{v}}x) = 0$ e ponendo $\varepsilon = 0$. Per provare l'implicazione inversa, supponiamo che x_0 sia una soluzione del sistema. Scegliamo delle coordinate locali $y = (y^1, \dots, y^m)$ tali che $x_0 = 0$ ed $F = (y^1, \dots, y^l)$ (questo è sempre possibile in quanto abbiamo fatto l'ipotesi che il sistema sia di rango massimo). Nelle nuove coordinate un generatore infinitesimo dell'azione gruppale di G ha la forma $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \zeta^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}$. Appliciamo dunque la condizione (1.2): ciò che si ottiene è, ovviamente, $\mathbf{v}(y^\nu) = \zeta^\nu(y) = 0$ per $\nu = 1, \dots, l$ quando $y^1 = \dots = y^l = 0$. Se ora consideriamo il flusso $\varphi(\varepsilon) = e^{\varepsilon\mathbf{v}}x_0$ di \mathbf{v} attraverso x_0 , questo deve soddisfare $\forall i = 1, \dots, l$ la relazione $\frac{d\varphi^i}{d\varepsilon} = \zeta^i(\varphi(\varepsilon))$, con $\varphi^i(0) = 0$. Dall'unicità della soluzione del problema di Cauchy possiamo dedurre che $\varphi^i(\varepsilon) = 0$ identicamente in un'intorno di x_0 . Perciò per ε sufficientemente piccolo, se x_0 è soluzione, anche $e^{\varepsilon\mathbf{v}}x_0$ è soluzione. Essendo $\mathcal{S}_F = \{x : F(x) = 0\}$ chiuso, ricordando che G_{x_0} , gruppo locale ad un parametro generato da \mathbf{v} , è connesso e sfruttando la continuità dell'esponenziale, possiamo estendere questo risultato a tutti i $g = e^{\varepsilon\mathbf{v}} \in G_{x_0}$. Tuttavia è noto [19, pag. 20, Proposizione 1.24] che, dato $g \in G$, questo è esprimibile come prodotto finito di esponenziali di generatori di G_{x_0} . Dunque l'implicazione inversa è dimostrata. \square

Occorre in molti casi distinguere tra *invarianza locale* e *invarianza globale*. I due concetti sono precisati dalla seguente

DEFINIZIONE 1.3 - Sia $G \subset \text{Diff}(M)$ un gruppo di Lie locale di trasformazioni. Un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset M$ è detto *localmente G-invariante* se per ogni $x \in \mathcal{S}$ esiste un intorno $G_x \subset G$ dell'identità tale che $g \cdot x \in \mathcal{S}$ per ogni $g \in G_x$. Una funzione liscia $F: U \rightarrow N$, con $U \subset M$ aperto, è detta *localmente G-invariante* se per ogni $x \in U$ esiste un intorno $G_x \subset G$ dell'identità tale che $F(g \cdot x) = F(x)$ per ogni $g \in G_x$. F è detta *globalmente G-invariante* se per ogni $x \in U$ $F(g \cdot x) = F(x)$ per ogni $g \in G$ tale che $g \cdot x \in U$.

Anche qui si può trovare una condizione necessaria e sufficiente di invarianza (locale) espressa dalla seguente

PROPOSIZIONE 1.2 - Sia $N \subset M$ una sottovarietà di M . Allora N è localmente G -invariante se e solo se per ogni $x \in N$, l'algebra dell'azione grupitale è tale che $\mathfrak{g}|_x \subset TN|_x$, con $TN|_x$ spazio tangente ad N in x .

1.1.3 Invarianti e dipendenza funzionale

Sia G un gruppo di trasformazioni continue di parametro r . È noto che se ζ è un'invariante per G , lo sarà anche ogni funzione $F(\zeta)$; di conseguenza, in generale, esistono infiniti invarianti rispetto all'azione di un gruppo G . Tuttavia, in analogia con quanto avviene per i vettori di un campo vettoriale, è lecito chiedersi se è possibile trovare un insieme (finito) di invarianti "indipendenti" tra loro, in funzione dei quali esprimere tutti gli altri. Prima di riportare un risultato che risponde a questa domanda, diamo la seguente

DEFINIZIONE 1.4 - Siano $\zeta^1(x), \dots, \zeta^k(x)$ funzioni lisce a variabili reali, definite su una varietà M . Allora

- $\zeta^1(x), \dots, \zeta^k(x)$ sono chiamate *funzionalmente dipendenti* se per ogni $x \in M$ esiste un intorno U di x e una funzione liscia $F(z^1, \dots, z^k): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, non identicamente nulla su alcun aperto di \mathbb{R}^k , tale che, per ogni $x \in U$, $F(\zeta^1(x), \dots, \zeta^k(x)) = 0$;
- $\zeta^1(x), \dots, \zeta^k(x)$ sono chiamate *funzionalmente indipendenti* se non sono funzionalmente dipendenti ogni qualvolta si effettua una loro restrizione ad un aperto $U \subset M$ qualsiasi.

Una condizione necessaria e sufficiente per la lineare indipendenza è fornita dal seguente

TEOREMA 1.3 - Sia $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^k)$ una funzione liscia da M a \mathbb{R}^k . Allora $\zeta^1(x), \dots, \zeta^k(x)$ sono funzionalmente dipendenti se e solo se $d\zeta|_x$ ha rango strettamente minore di k per ogni $x \in M$.

Concludiamo il paragrafo con un risultato riguardante gli invarianti legati all'azione grupitale, che garantisce, sotto certe ipotesi, l'esistenza di un insieme di invarianti funzionalmente indipendenti tramite i quali può essere espresso ogni altro invariante.

TEOREMA 1.4 - Data una varietà m -dimensionale M , sia $G \subset \text{Diff}(M)$ un gruppo la cui azione è semiregolare³, con orbite di dimensione s . Se $x_0 \in M$, allora esistono esattamente

³ Ricordiamo che un'orbita di una trasformazione locale è il più piccolo sottoinsieme invariante per trasformazioni del gruppo sulla varietà M . Si ha che

- il gruppo G agisce *semiregolarmente* se tutte le orbite \mathcal{O} , sottovarietà di M , hanno la stessa dimensione;

$m - s$ invarianti locali funzionalmente indipendenti $\zeta^1(x), \dots, \zeta^{m-s}(x)$ definiti in un intorno di x_0 . Inoltre, ogni altro invariante locale dell'azione grupale nell'intorno di x_0 ha la forma $\zeta(x) = F(\zeta^1(x), \dots, \zeta^{m-s}(x))$ per una qualche funzione liscia F . Se l'azione di G è regolare, allora gli invarianti possono essere intesi globalmente invarianti in un intorno di x_0 .

1.2 GRUPPI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1.2.1 Definizioni

Consideriamo un sistema di equazioni differenziali \mathcal{S} con p variabili indipendenti $x = (x^1, \dots, x^p)$ e q variabili dipendenti $u = (u^1, \dots, u^q)$. Sia $u = f(x)$ una soluzione; ognuna delle q componenti ha la forma $u^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^p)$, di modo che $f: X \rightarrow U$, con $X \simeq \mathbb{R}^p$ spazio delle variabili indipendenti, e $U \simeq \mathbb{R}^q$ spazio delle variabili dipendenti. Sia infine G un gruppo di simmetrie che agisce su un aperto $M \subset X \times U$. Il grafico della funzione $u = f(x)$, sottovarietà di $X \times U$, è dato da

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\} \subset X \times U,$$

dove $\Omega \subset X$ è il dominio di definizione di f . Se Γ_f è nel dominio di definizione di G , allora il gruppo trasforma Γ_f in

$$g \cdot \Gamma_f = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) : (x, u) \in \Gamma_f\} = \Gamma_{\tilde{f}},$$

con $\tilde{f} = g \cdot f$ funzione ottenuta da f mediante g . Ovviamente $g \cdot \Gamma_f$ non è necessariamente il grafico di una funzione monodroma; tuttavia supporremo che si possa sempre restringere Ω in modo da ottenere, mediante g , una funzione monodroma per elementi g prossimi all'identità.

L'azione del gruppo può essere, in generale, espressa nella forma:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) = (\Xi_g(x, u), \Phi_g(x, u)),$$

con Ξ_g, Φ_g funzioni lisce. Indicando con $\mathbb{1}$ la funzione identica su X , il grafico $\Gamma_{\tilde{f}} = g \cdot \Gamma_f$ è dato dunque da

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \Xi_g(x, f(x)) = \Xi_g \circ (\mathbb{1} \times f)(x), \\ \tilde{u} &= \Phi_g(x, f(x)) = \Phi_g \circ (\mathbb{1} \times f)(x). \end{aligned} \quad (x \in \Omega)$$

Dalle due relazioni precedenti si deduce che

$$g \cdot f = [\Phi_g \circ (\mathbb{1} \times f)] \circ [\Xi_g \circ (\mathbb{1} \times f)]^{-1}, \quad (1.3)$$

valida ovunque l'espressione abbia significato.

A questo punto possiamo dare una definizione rigorosa di *gruppo di simmetrie di un sistema di equazioni differenziali* \mathcal{S} .

- il gruppo G agisce *regolarmente* se la sua azione è semiregolare ed inoltre per ogni $x \in M$ esiste un intorno arbitrariamente piccolo U di x tale che ogni orbita di G interseca U in un sottoinsieme connesso per archi.

DEFINIZIONE 1.5 - Sia \mathcal{S} un sistema di equazioni differenziali. Un *gruppo di simmetrie del sistema* \mathcal{S} è un gruppo locale di trasformazioni G la cui azione è definita su un sottoinsieme aperto M dello spazio delle variabili dipendenti e indipendenti, tale che, se $u = f(x)$ è soluzione di \mathcal{S} , allora $u = g \cdot f(x)$ è anch'essa soluzione del sistema ovunque $g \cdot f$ sia definito per $g \in G$.

1.2.2 Prolungamento di una funzione

Sia $f: X \rightarrow U$, tale che $X \simeq \mathbb{R}^p$ e $U \simeq \mathbb{R}$, una funzione liscia a variabili reali. Il numero di derivate parziali di ordine k è dato da $p_k = \binom{p+k-1}{k}$. Per indicare una derivata parziale di ordine k useremo la notazione:

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \dots \partial x^{j_k}},$$

in cui $J = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ è una k -upla non ordinata tale che $1 \leq j_k \leq p$. Indicheremo con $\#J \equiv k$. Analogamente, nel caso di una funzione $f: X \rightarrow U$, tale che $X \simeq \mathbb{R}^p$ e $U \simeq \mathbb{R}^q$ il numero di derivate parziali di ordine k è dato da qp_k . Se infine vogliamo considerare tutte le derivate parziali dall'ordine 0 fino all'ordine n , il loro numero è dato da:

$$q \sum_{k=0}^n p_k = q \binom{p+n}{n} \equiv qp^{(n)}.$$

Detto $U_k \equiv \mathbb{R}^{qp_k}$ lo spazio con coordinate le derivate u_j^α di ordine k , allora il prodotto cartesiano

$$U^{(n)} = U \times U_1 \times \dots \times U_n$$

è lo spazio, di dimensione $qp^{(n)}$, le cui coordinate rappresentano tutte le derivate della funzione $u = f(x)$ fino all'ordine n . Si definisce *prolungamento n -esimo della funzione* $u = f(x)$ la funzione

$$u^{(n)} = \text{pr}^{(n)} f(x),$$

data da un elemento di $U^{(n)}$ le cui componenti sono date da f e da tutte le sue derivate fino all'ordine n . Il prolungamento è dunque una funzione $\text{pr}^{(n)} f(x): X \rightarrow U^{(n)}$. Lo spazio $X \times U^{(n)}$ è detto *jet-space* dello spazio sottostante $X \times U$. Tuttavia difficilmente si lavora con l'intero $X \times U$, ma in genere si considera un aperto $M \subset X \times U$. Il prolungamento, di conseguenza, viene effettuato solo su questo aperto e si definisce l' n -esimo *jet-space* di M come

$$M^{(n)} \equiv M \times U_1 \times \dots \times U_n.$$

Questo concetto può essere adoperato utilmente nello studio dei sistemi di equazioni differenziali. Infatti, sia dato un sistema

$$\Delta_v(x, u^{(n)}) = 0, \quad v = 1, \dots, l,$$

di equazioni algebriche dipendenti da $x = (x^1, \dots, x^p)$, $u = (u^1, \dots, u^q)$ e dalle derivate di u rispetto ad x fino all'ordine n -esimo. Supponiamo che

$$\Delta: X \times U^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}^l$$

sia liscia. Il sistema di equazioni differenziali definisce una sottovarietà

$$\mathcal{D} = \{(x, u^{(n)}) : \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}$$

del *jet-space*. Per definizione, una soluzione liscia $u = f(x)$ del sistema di equazioni differenziali è tale che

$$\Delta_v(x, \text{pr}^{(n)}f(x)) = 0, \quad v = 1, \dots, l,$$

per ogni x nel dominio di f , ovvero $\Gamma_f^{(n)} \equiv \{(x, \text{pr}^{(n)}f(x))\} \subset \mathcal{D}$. In altri termini, la sottovarietà data dalla curva rappresentante $(x, u^{(n)})$ nel *jet-space* deve giacere nella sottovarietà individuata dal sistema di equazioni nel medesimo spazio.

1.2.3 Prolungamento dell'azione grupppale

Sia $G \subset \text{Diff}(M)$ un gruppo locale di trasformazioni, con $M \subset X \times U$ aperto dello spazio delle variabili dipendenti ed indipendenti. Possiamo pensare di prolungare l'azione di G su $M^{(n)}$: questa operazione è detta appunto *prolungamento n -esimo di G su $M^{(n)}$* (indicato con $\text{pr}^{(n)}G$) ed è definita in modo tale che l'azione di G trasformi le derivate della funzione $u = f(x)$ in quelle della funzione $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$, ottenuta dalla prima mediante l'azione di G . In altre parole, preso un elemento $g \in G$ sufficientemente prossimo all'identità, se $g \cdot (x_0, u_0) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0)$, allora

$$\text{pr}^{(n)}g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)}) \quad \text{con } \tilde{u}_0^{(n)} = \text{pr}^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x}_0).$$

Possiamo a questo punto introdurre il concetto di *invarianza* per i sistemi di equazioni differenziali. L'introduzione del concetto di prolungamento dell'azione grupppale permette di formulare la teoria in stretta analogia con quanto discusso nel caso di sistemi di equazioni algebriche.

TEOREMA 1.5 - *Sia M sottoinsieme aperto di $X \times U$ e si supponga che $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ sia un sistema di equazioni differenziali di ordine n definito su M , che identifica una sottovarietà $\mathcal{D} \subset M^{(n)}$. Supponiamo inoltre che $G \subset \text{Diff}(M)$ sia un gruppo locale di trasformazioni rispetto al prolungamento del quale \mathcal{D} è invariante (ovvero tale che per ogni $(x, u^{(n)}) \in \mathcal{D}$, $\text{pr}^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)}) \in \mathcal{D}$ per ogni $g \in G$ per cui ciò sia definito). Allora G è un gruppo di simmetria del sistema di equazioni differenziali, nel senso della Definizione 1.5.*

Dimostrazione. Sia $u = f(x)$ soluzione locale di $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$. Per definizione il grafico $\Gamma_f^{(n)}$ di $\text{pr}^{(n)}f$ giace interamente in \mathcal{D} . Se $g \in G$ è tale che $g \cdot f$ sia ben definita, allora $\Gamma_{g \cdot f}^{(n)} = \text{pr}^{(n)}g(\Gamma_f^{(n)})$. Per ipotesi, tuttavia, \mathcal{D} è invariante sotto l'azione di $\text{pr}^{(n)}g$, e pertanto $\Gamma_{g \cdot f}^{(n)} \subset \mathcal{D}$; ma questo significa appunto che $g \cdot f$ è soluzione del sistema Δ , e la tesi è dimostrata. \square

Così come avviene per l'azione gruppale, anche i generatori infinitesimi possono essere prolungati, in modo da agire su $M^{(n)}$.

DEFINIZIONE 1.6 - Sia $M \subset X \times U$ un aperto e si supponga che \mathbf{v} sia un campo vettoriale su M associato al gruppo locale $e^{\varepsilon \mathbf{v}}$. Definiamo *prolungamento n -esimo di \mathbf{v}*

$$\text{pr}^{(n)} \mathbf{v} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{pr}^{(n)} e^{\varepsilon \mathbf{v}}(x, u^{(n)}), \quad (1.4)$$

che è un campo vettoriale su $M^{(n)}$.

Poiché $\text{pr}^{(n)} e^{\varepsilon \mathbf{v}}$ deve coincidere con $e^{\varepsilon \mathbf{v}}$, una volta ristretto alle variabili di ordine zero, si ha che se

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \zeta^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \varphi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (1.5)$$

allora

$$\text{pr}^{(n)} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \varphi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_\alpha^J}, \quad (1.6)$$

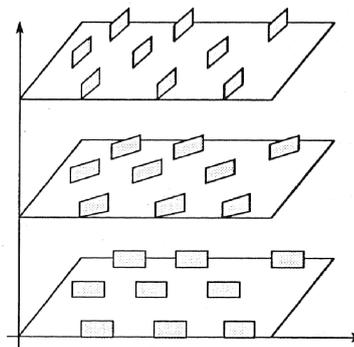
dove ζ^i e $\varphi_\alpha^0 = \varphi_\alpha$ sono le stesse funzioni che compaiono nell'espressione di \mathbf{v} . Inoltre, in generale φ_α^J dipende solo dalle derivate di ordine minore o uguale a $\#J$.

1.2.4 Struttura di contatto del jet-space ed interpretazione geometrica

È utile, a questo stadio, chiarire il significato geometrico della teoria precedente [10]. Nel *jet-space* (isomorfo localmente ad uno spazio euclideo) esiste una struttura, detta *struttura di contatto*, che esprime le relazioni esistenti tra i vari U_i . Per semplicità consideriamo il caso $q = p = 1$. Il *jet-space* ha dunque la forma $M^{(1)} = X \times U \times U_1$, dove $X \simeq \mathbb{R}$ e $U \simeq \mathbb{R}$. Se ora consideriamo un sistema di coordinate cartesiane (x, u, v) , la curva $u = u(x)$ nel piano (x, u) deve essere tale che valga la relazione

$$v = \frac{du}{dx};$$

pertanto in un riferimento a tre assi il vincolo precedente è rappresentato da un campo di piani tale che, ad ogni punto (x, u, v) , si associ $du = v dx$, di modo che la curva $\gamma(\vartheta) = (x(\vartheta), u(\vartheta), v(\vartheta))$ sia ovunque tangente a questo campo di piani. Ripetendo il ragionamento in $M^{(m)}$ si ottengono dei campi di iperpiani definiti dalle



Rappresentazione della struttura di contatto (sull'asse verticale compare $v = \frac{du}{dx}$). Immagine da [10, pag. 5].

condizioni sulle derivate parziali fino all'ordine m . Questo campo è appunto la *struttura di contatto* del *jet-space*. È interessante osservare che, se si ha una curva liscia in M , allora questa può essere "prolungata" in $M^{(m)}$ richiedendo la compatibilità con la struttura di contatto: da questa condizione di compatibilità discende l'unicità della curva in $M^{(m)}$.

Nel *jet-space* le soluzioni sono date dalla restrizione del campo di iperpiani, che definisce la struttura di contatto, alla varietà \mathcal{D} identificata dalla condizione $\Delta = 0$ (ricordiamo che in tale spazio $\Delta = 0$ è una relazione algebrica tra le diverse variabili). *Le soluzioni sono identificabili con le sottovarietà integrali della varietà individuata dalla condizione $\Delta = 0$ che hanno la proprietà di essere ovunque tangenti al campo di iperpiani.* Ricordiamo che l'integrabilità di un campo di iperpiani, ovvero la possibilità di trovare una sottovarietà integrale per ogni punto di \mathcal{D} , è equivalente, a causa del Teorema di Frobenius, alla condizione di involuzione per i vettori che generano la struttura di contatto su \mathcal{D} . La condizione di involuzione è chiaramente soddisfatta nel caso di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine: infatti in questo caso l'intersezione tra la struttura di contatto e la varietà \mathcal{D} è data da curve continue, che sono generate da un unico vettore (ad un punto fissato). Pertanto un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine è sempre integrabile.

1.2.5 Invarianza infinitesima, teorema di Lie e formula generale di prolungamento

In perfetta analogia con la teoria dei sistemi di equazioni algebriche, introduciamo il concetto di *invarianza infinitesima* per i sistemi di equazioni differenziali. Prima però diamo la seguente

DEFINIZIONE 1.7 - Sia

$$\Delta_v(x, u^{(n)}) = 0, \quad v = 1, \dots, l,$$

un sistema di equazioni differenziali. Il sistema è di rango massimo se lo è la matrice jacobiana

$$J_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_v}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_v}{\partial u_j^\alpha} \right)$$

calcolata in $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$.

Il rango di un sistema di equazioni differenziali è dunque definito intendendo Δ_v come sistema di equazioni algebriche in $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. A questo punto introduciamo, sulla falsariga del Teorema 1.1, un teorema fondamentale.

TEOREMA (DI LIE) 1.6 - *Si supponga che*

$$\Delta_v(x, u^{(n)}) = 0, \quad v = 1, \dots, l,$$

sia un sistema di equazioni differenziali di rango massimo, definite su $M \subset X \times U$. Se $G \subset \text{Diff}(M)$ è un gruppo locale di trasformazioni e

$$\text{pr}^{(n)} \mathbf{v} \left[\Delta_v \left(x, u^{(n)} \right) \right] \Big|_{\Delta(x, u^{(n)})=0} = 0, \quad v = 1, \dots, l, \quad (1.7)$$

per ogni generatore infinitesimo \mathbf{v} di G , allora G è un gruppo di simmetria per il sistema.

Per dimostrare il Teorema di Lie basta ripetere i ragionamenti fatti nella dimostrazione del Teorema 1.1, tenendo conto del Teorema 1.5. Il Teorema di Lie è alla base della ricerca dei gruppi di simmetria di un sistema di equazioni differenziali, ma non è sufficiente. Per il calcolo è infatti necessario disporre di una formula che ci fornisca esplicitamente l'espressione dei coefficienti dei generatori prolungati su $M^{(n)}$. Prima però introduciamo un nuovo operatore che semplifica notevolmente la notazione.

DEFINIZIONE 1.8 - Sia $P(x, u^{(n)})$ una funzione liscia di x, u e di tutte le derivate di u fino all'ordine n , definita su un aperto $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. La derivata totale di P rispetto ad x^i è la funzione liscia, allora $D_i P(x, u^{(n+1)})$ definita su $M^{(n+1)}$, tale che se $u = f(x)$ è una funzione liscia

$$D_i P = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J u_{ij}^\alpha \frac{\partial P}{\partial u_j^\alpha}.$$

Precisiamo che, per $J = (j_1, \dots, j_k)$, $0 \leq \#J \leq n$ (con n massimo ordine di derivazione di u che appare in P),

$$u_{ij}^\alpha = \frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial^{k+1} u^\alpha}{\partial x^i \partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \dots \partial x^{j_k}}.$$

A questo punto possiamo enunciare il risultato che ci fornisce la relazione desiderata:

TEOREMA (FORMULA GENERALE DI PROLUNGAMENTO) 1.7 - Sia

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \zeta^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \varphi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

un campo vettoriale sull'aperto $M \subset X \times U$. Il prolungamento n -esimo di \mathbf{v} è il campo vettoriale

$$\text{pr}^{(n)} \mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \varphi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} \quad (1.8)$$

definito sul jet-space $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$, dove la seconda somma corre sul multi-indice $J = (j_1, \dots, j_k)$ con $1 \leq j_k \leq p$ e $1 \leq k \leq n$. Le funzioni coefficienti di $\text{pr}^{(n)} \mathbf{v}$ sono date dalla formula:

$$\varphi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J \left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^p \zeta^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \zeta^i u_{ji}^\alpha, \quad (1.9)$$

con $u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$ e $u_{ji}^\alpha = \frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial^{k+1} u^\alpha}{\partial x^i \partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}}$.

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso $n = 1$. Sia $g_\varepsilon = e^{\varepsilon \mathbf{v}}$ il corrispondente gruppo ad un parametro, tale che

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_\varepsilon(x, u) = (\Xi_\varepsilon(x, u), \Phi_\varepsilon(x, u)),$$

ovunque le quantità sopra siano definite. Le funzioni $\Xi_\varepsilon(x, u), \Phi_\varepsilon(x, u)$ sono legate ai coefficienti di \mathbf{v} dalle relazioni

$$\begin{aligned} \zeta^i(x, u) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Xi_\varepsilon^i(x, u), \quad i = 1, \dots, p, \\ \varphi_\alpha(x, u) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Phi_\varepsilon^\alpha(x, u), \quad \alpha = 1, \dots, q, \end{aligned} \quad (1.10)$$

dove con $\Xi_\varepsilon^i(x, u), \Phi_\varepsilon^\alpha(x, u)$ si intendono le componenti di $\Xi_\varepsilon(x, u), \Phi_\varepsilon(x, u)$ rispettivamente. Dato $(x, u^{(1)}) \in X \times M^{(1)}$, sia $u = f(x)$ una funzione tale che $\text{pr}^{(1)}f(x) = u^{(1)}$, o più esplicitamente

$$u^\alpha = f^\alpha(x), \quad u_i^\alpha = \frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^i}.$$

Per ε sufficientemente piccolo, la trasformazione di f ad opera dell'elemento grupale g_ε è ben definita (almeno se nel dominio di definizione di f c'è un intorno sufficientemente piccolo di x), ed è data da:

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = (g_\varepsilon \cdot f)(\tilde{x}) = [\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{1} \times f)] \circ [\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{1} \times f)]^{-1}(\tilde{x}).$$

La matrice jacobiana $J\tilde{f}_\varepsilon(x) = \left(\frac{\partial \tilde{f}_\varepsilon^\alpha}{\partial \tilde{x}^i} \right)$ è data, ovunque la relazione sia valida, da

$$J\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = J[\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{1} \times f)](x) \cdot \{J[\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{1} \times f)](x)\}^{-1} \quad (1.11)$$

ricordando che, ove sia definita, vale l'espressione:

$$x = [\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{1} \times f)]^{-1}(\tilde{x}).$$

Gli elementi matriciali dello jacobiano forniscono direttamente il prolungamento $\text{pr}^{(1)}g_\varepsilon$, per definizione. Tuttavia siamo interessati a trovare l'espressione dei coefficienti del generatore $\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}$ della trasformazione grupale. Usiamo dunque la Definizione (1.4), differenziando la (1.11) rispetto ad ε e ponendo poi $\varepsilon = 0$.

Detta \mathbb{I} la matrice identità $p \times p$ osserviamo inoltre che si ha

$$J[\Xi_0 \circ (\mathbb{1} \times f)](x) = \mathbb{I} \quad J[\Phi_0 \circ (\mathbb{1} \times f)](x) = Jf(x).$$

Usando dunque la regola di Leibniz⁴, dalla (1.11)

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} J\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} J[\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{1} \times f)](x) - Jf(x) \cdot \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} J[\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{1} \times f)](x) = \\ &= J[\varphi \circ (\mathbb{1} \times f)](x) - Jf(x) \cdot J[\zeta \circ (\mathbb{1} \times f)](x), \end{aligned}$$

dove $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^p)^T$ e $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)^T$ sono vettori colonna con elementi dati dalle (1.10). Gli elementi matriciali che compaiono nell'ultima eguaglianza ci forniscono proprio i coefficienti φ_α^k di $\frac{\partial}{\partial u_\alpha^k}$ in $\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}$. L'elemento (α, k) della matrice è dato da

$$\varphi_\alpha^k(x, \text{pr}^{(1)}f(x)) = \frac{\partial \varphi_\alpha(x, f(x))}{\partial x^k} - \sum_{i=0}^p \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \zeta^i(x, f(x))}{\partial x^k}.$$

⁴ Ricordiamo che se $M(\varepsilon)$ è una matrice quadrata invertibile funzione di ε , allora

$$\frac{d[M(\varepsilon)]^{-1}}{d\varepsilon} = -M(\varepsilon)^{-1} \frac{dM(\varepsilon)}{d\varepsilon} M(\varepsilon)^{-1}.$$

In base alla Definizione 1.8, l'espressione precedente può essere riscritta:

$$\varphi_\alpha^k(x, u^{(1)}) = D_k \left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^p \zeta^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \zeta^i u_{ki}^\alpha, \quad (1.12)$$

dove $u_{ki}^\alpha = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^k \partial x^i}$. Questo prova la tesi nel caso $n = 1$.

Per provare il teorema in generale procediamo per induzione. In particolare possiamo riguardare $M^{(n+1)}$ come sottospazio di $(M^{(n)})^{(1)}$, intendendo dunque le derivate di ordine $(n+1)$ -esimo come derivate prime di derivate di ordine n -esimo. Se dunque $\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ è un campo vettoriale su $M^{(n)}$, il suo prolungamento su $(M^{(n)})^{(1)}$ può essere ottenuto proprio dalle relazioni appena ricavate (in seguito il risultato potrà essere ristretto su $M^{(n+1)}$). La formula trovata sopra si riscrive:

$$\varphi_\alpha^{Jk} = D_k \varphi_\alpha^J - \sum_{i=1}^p D_k \zeta^i \cdot u_{ji}^\alpha, \quad (1.13)$$

dove $J = (j_1, \dots, j_n)$, con $1 \leq k \leq p$ e $u_{ji}^\alpha = \frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x^k}$ (dove $1 \leq \alpha \leq q$). Esplicitando la (1.13), si trova:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{Jk} &= D_k \left[D_J \left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^p \zeta^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \zeta^i u_{ji}^\alpha \right] - \sum_{i=1}^p D_k \zeta^i \cdot u_{ji}^\alpha = \\ &= D_k D_J \left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^p \zeta^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \zeta^i u_{jik}^\alpha \end{aligned}$$

con $u_{jik}^\alpha = \frac{\partial^2 u_j^\alpha}{\partial x^k \partial x^i}$, che è proprio la (1.9). \square

L'operazione di prolungamento conserva le più importanti proprietà delle parentesi di Lie. Infatti vale il seguente

TEOREMA 1.8 - *Supponiamo che \mathbf{v} e \mathbf{w} siano campi vettoriali lisci su $M \subset X \times U$. Allora i loro prolungamenti soddisfano le relazioni:*

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(n)}(c\mathbf{v} + c'\mathbf{w}) &= c\text{pr}^{(n)}\mathbf{v} + c'\text{pr}^{(n)}\mathbf{w}, \\ \text{pr}^{(n)}[\mathbf{v}, \mathbf{w}] &= [\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}, \text{pr}^{(n)}\mathbf{w}], \end{aligned}$$

dove c, c' sono costanti e $[\cdot, \cdot]$ sono le parentesi di Lie.

Dimostrazione. La linearità può essere dimostrata abbastanza facilmente. Prima di dimostrare la seconda proprietà, facciamo due piccole osservazioni. Anzitutto, presi $g, h \in G \in \text{Diff}(M)$, gruppo di trasformazioni continue,

$$\text{pr}^{(n)}(g \cdot h) = \text{pr}^{(n)}g \cdot \text{pr}^{(n)}h;$$

inoltre, dalla definizione $(g+h) \cdot x \equiv g \cdot x + h \cdot x$, si ha

$$\text{pr}^{(n)}(g+h) = \text{pr}^{(n)}g + \text{pr}^{(n)}h.$$

Sia ora $\mathbb{1}$ la mappa identica di M , tale che $\mathbb{1}^{(n)} = \text{pr}^{(n)}\mathbb{1}$ sia la mappa identica di $M^{(n)}$. Da un noto risultato della teoria dei campi vettoriali [19, pag. 35, Teorema 1.33] si ha

$$\begin{aligned} [\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}, \text{pr}^{(n)}\mathbf{w}] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\text{pr}^{(n)}e^{-\sqrt{\varepsilon}\mathbf{w}}e^{-\sqrt{\varepsilon}\mathbf{v}}e^{\sqrt{\varepsilon}\mathbf{w}}e^{\sqrt{\varepsilon}\mathbf{v}} - \mathbb{1}^{(n)}}{\varepsilon} = \\ &= \text{pr}^{(n)} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}\mathbf{w}}e^{-\sqrt{\varepsilon}\mathbf{v}}e^{\sqrt{\varepsilon}\mathbf{w}}e^{\sqrt{\varepsilon}\mathbf{v}} - \mathbb{1}}{\varepsilon} \right\} = \\ &= \text{pr}^{(n)}[\mathbf{v}, \mathbf{w}]. \end{aligned}$$

\square

Ne consegue immediatamente che i campi vettoriali prolungati relativi alle simmetrie infinitesime di un sistema di equazioni differenziali generano un'algebra di Lie su M .

1.2.6 Riepilogo

Quanto discusso finora suggerisce l'opportunità di definire un procedimento algoritmico atto a determinare i gruppi di simmetria di un dato sistema di equazioni differenziali. Si possono delineare i seguenti passi.

1. Si ricercano i coefficienti del campo vettoriale (1.5) adoperando l'espressione generale di $\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}$, data dalla (1.6) e imponendo la condizione di invarianza (1.7) sui coefficienti stessi.
2. Nella relazione che ne risulta (che sarà un'equazione nei soli coefficienti di $\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}$) si sostituisce l'espressione degli stessi data dalla (1.9).
3. Restringendoci alla sottovarietà individuata da $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$, si ottiene un'equazione in cui una combinazione di monomi, dati in generale da prodotti di u e di sue derivate fino all'ordine n , è uguagliata a zero.
4. Eguagliando ora a zero i coefficienti delle combinazioni indipendenti delle variabili dipendenti e delle loro derivate, si ottiene un sistema sovradeterminato di equazioni differenziali lineari, dette *equazioni determinanti*, in genere risolubili con metodi elementari.
5. I campi vettoriali così ottenuti vengono esponenziati utilizzando le relazioni

$$\frac{d\tilde{x}^i}{d\varepsilon} = \zeta^i(\tilde{x}, \tilde{u}), \quad \tilde{x}^i|_{\varepsilon=0} = x^i \quad \text{per le variabili indipendenti,} \quad (1.14)$$

$$\frac{d\tilde{u}_\alpha}{d\varepsilon} = \varphi_\alpha(\tilde{x}, \tilde{u}), \quad \tilde{u}_\alpha|_{\varepsilon=0} = u_\alpha \quad \text{per le variabili dipendenti.} \quad (1.15)$$

I gruppi ottenuti costituiscono la componente connessa del gruppo di simmetrie completo G_{tot} , che a rigore include anche eventuali simmetrie di tipo discreto⁵:

$$G_{\text{tot}} = G \times G_D,$$

ove G è il gruppo connesso di simmetria dato dalla composizione dei diversi sottogruppi precedentemente determinati e G_D è il gruppo delle trasformazioni discrete. Tralascieremo in questo lavoro lo studio delle simmetrie discrete. Se dunque il numero dei parametri di integrazione è k , possono essere scelti k generatori

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

per la corrispondente algebra di Lie \mathfrak{g} .

⁵ Come indicato, la composizione avviene tramite prodotto semidiretto dei due gruppi. Se G e H sono due gruppi di Lie, con G che agisce su H di modo che $h \mapsto g \cdot h$, il loro prodotto semidiretto $G \ltimes H$ è un gruppo di Lie la cui struttura di varietà è data dal prodotto cartesiano $G \times H$, ma la moltiplicazione viene definita come $(g, h) \cdot (\tilde{g}, \tilde{h}) = (g \cdot \tilde{g}, h \cdot (g \cdot \tilde{h}))$, con $g, \tilde{g} \in G$, $h, \tilde{h} \in H$. Se si considerano le algebre corrispondenti, si parla di somma semidiretta e verrà indicata con $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{h}$.

RIDUZIONI PER SIMMETRIA

2.1 RIDUZIONI PER SIMMETRIA DI EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Una delle applicazioni più importanti della teoria di Lie riguarda la possibilità di ridurre il numero di variabili indipendenti in un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l, \quad x \in X \simeq \mathbb{R}^p, \quad u \in U \simeq \mathbb{R}^q, \quad p, q, n, l \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Questo procedimento prende il nome di *riduzione per simmetria* [17; 36]. Si considera anzitutto il sottogruppo $G_0 \subseteq G$, dove G è il gruppo di simmetria del sistema, e si cercano in seguito invarianti sotto l'azione di G_0 . Utilizzando tali invarianti si può ridurre, sotto certe ipotesi, il numero di variabili dipendenti: ciò porta ad una perdita in generalità poiché a questo punto le condizioni al contorno imponibili vanno fissate su superfici invarianti sotto G_0 . Il procedimento di riduzione per simmetria può essere suddiviso in più passi.

1. Il primo passo consiste nell'individuare il gruppo di simmetria G , e quindi la corrispondente algebra \mathfrak{g} , del sistema di equazioni in esame. Questo può essere fatto utilizzando le tecniche presentate nel capitolo precedente.
2. Dall'algebra di Lie \mathfrak{g} si ricavano le costanti di struttura c_{ij}^k , adoperando le parentesi di Lie (ricordiamo che i valori delle costanti di struttura dipendono dalla base scelta). Se poi in particolare l'algebra è esprimibile come somma diretta di sottoalgebre, allora è utile scriverla come:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n. \quad (2.2)$$

Come dimostrato da E. Levi, se \mathfrak{g}_i ha dimensione finita e non è ulteriormente decomponibile, è possibile porlo nella forma

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{s}_i \triangleright \mathfrak{r}_i,$$

nota come *decomposizione di Levi*, con \mathfrak{s}_i algebra semisemplice¹ ed \mathfrak{r}_i radicale; dunque $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i] = \mathfrak{s}_i$, $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{r}_i] \subseteq \mathfrak{r}_i$, $[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{r}_i] \subseteq \mathfrak{r}_i$.

¹ Un'algebra a finito dimensionale si dice *risolubile* se esiste una catena finita di ideali di tale algebra

$$\{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}.$$

L'ideale \mathfrak{i} di un'algebra \mathfrak{a} è una sottoalgebra tale che $[\mathfrak{a}, \mathfrak{i}] \subset \mathfrak{i}$. Il massimo ideale risolubile prende il nome di *radicale*. Un'algebra di Lie è detta infine *semisemplice* se il suo radicale è la sottoalgebra nulla.

3. Tenendo conto dei risultati ottenuti al punto precedente, si classificano le sottoalgebre in *classi di coniugazione* (vedi paragrafo 2.2.1) sotto l'azione del gruppo di Lie G (in alcuni casi si opera con $G_{\text{tot}} = G \times G_D$). La classificazione delle sottoalgebre verrà approfondita nel paragrafo 2.2, dove verrà introdotta la *rappresentazione aggiunta*.
4. Sia ora $\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}$ una delle sottoalgebre trovate nel passo precedente con base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_0}$, e sia $G_0 \subseteq G$ il suo corrispondente sottogruppo. Supponiamo che G_0 agisca regolarmente sulla varietà $M = X \times U$ delle variabili indipendenti e dipendenti. Siano inoltre gli invarianti indipendenti di G_0

$$\tilde{I}^j(x, u), \quad (j = 1, \dots, N). \quad (2.3)$$

Gli invarianti possono essere ottenuti come soluzione del sistema di equazioni alle derivate parziali del primo ordine

$$\mathbf{v}_i F(x, u) = 0, \quad (i = 1, \dots, n_0). \quad (2.4)$$

È noto (si veda il Teorema 1.4) che il numero di invarianti funzionalmente indipendenti è dato da $N = p + q - s$, dove con s abbiamo indicato la dimensione delle orbite di G_0 (ovviamente N dev'essere un intero non negativo, essendo le orbite sottovarietà di M). Si possono verificare, a questo punto, tre eventualità.

- a) Tra gli invarianti possono essere scelte q funzioni tali che

$$\left| \frac{\partial(I^1, \dots, I^q)}{\partial(u^1, \dots, u^q)} \right| \neq 0. \quad (2.5)$$

mentre i restanti $N - q = p - s$ invarianti sono tali da dipendere solo dalle variabili indipendenti; possiamo perciò riscriverli come

$$\zeta^1 = \Phi^1(x), \quad \zeta^2 = \Phi^2(x), \quad \dots, \quad \zeta^{p-s} = \Phi^{p-s}(x). \quad (2.6)$$

Se consideriamo u^j funzione delle sole x , allora possiamo riscrivere le I^i esprimendone la dipendenza da x mediante le funzioni ζ^i

$$I^i \equiv I^i(x, u) = F^i(\zeta^1, \dots, \zeta^{p-s}), \quad (i = 1, \dots, q). \quad (2.7)$$

Dalla (2.6) possiamo esprimere $p - s$ variabili indipendenti, dette *variabili principali*, in funzione di $\zeta^1, \dots, \zeta^{p-s}$ (cosa sempre possibile grazie al Teorema 1.3). Le restanti s variabili indipendenti, poniamo $\{x^1, \dots, x^s\} = \hat{x}$, vengono talvolta chiamate *variabili parametriche*. Dalla condizione (2.5), risolvendo la precedente, otteniamo

$$u^i(x) = U^i(\hat{x}, F^1(\zeta), \dots, F^q(\zeta)). \quad (2.8)$$

Sostituendo la (2.8) nel sistema di equazioni differenziali di partenza ne otteniamo uno equivalente dipendente solo dalle funzioni F^i , con

$i = 1, \dots, q$, dalle variabili ζ^a , con $a = 1, \dots, p - s$ e dalle derivate di F^i rispetto a ζ^a . Essendo $p - s < p$, il numero di variabili indipendenti è stato ridotto: le variabili \hat{x} , infatti, verranno eliminate proprio nella sostituzione nella (2.1); se così non fosse, il nuovo sistema non sarebbe invariante sotto G_0 . Il sistema che si ottiene ha la forma

$$(\Delta/G_0)_v(\zeta, F^{(n)}) = 0, \quad v = 1, \dots, l.$$

Osserviamo che se $s = p - 1$ il sistema di equazioni alle derivate parziali diventa un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

- b) Se la condizione (2.5) è soddisfatta ma le ζ^i dipendono anche da u , procediamo egualmente come sopra ma stavolta $F^i(\zeta)$ dipenderà implicitamente dalle soluzioni, perciò la (2.8) sarà un'equazione funzionale per u .
- c) Se la condizione sullo jacobiano (2.5) non è soddisfatta, allora il rango r della matrice sarà $1 \leq r \leq q$. Scelti r degli invarianti $\tilde{I}^j(x, u)$ tali che sia possibile invertire le relazioni come le (2.7) per r variabili dipendenti u^1, \dots, u^r , allora possiamo porre

$$u^i(x) = U^i(x, F^i(\zeta)), \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.9)$$

Le restanti variabili u^{r+1}, \dots, u^q sono dipendenti da tutte le p variabili indipendenti. Sostituendo la (2.9) nel sistema (2.1), alcune variabili dipendenti (u^{r+1}, \dots, u^q) mostreranno una dipendenza da tutte le p variabili indipendenti di partenza, mentre altre (le $F^i(\zeta)$) dipenderanno da un set di variabili indipendenti ridotto. Perché ciò abbia senso, si vede che è necessario imporre delle condizioni di coerenza al sistema, che qui non approfondiremo. Le soluzioni ottenute con questo metodo, introdotto da Ovsiannikov [20], sono dette *parzialmente invarianti*.

5. Si risolvono le equazioni ridotte. In genere a questo punto il metodo della riduzione per simmetria ha esaurito il suo ruolo ed occorre procedere con tecniche diverse.
6. Si analizzano le soluzioni da un punto di vista fisico (comportamenti asintotici, stabilità, calcolo di osservabili...).

2.2 CLASSIFICAZIONE DELLE SOTTOALGEBRE DELLE ALGEBRE DI LIE FINITODIMENSIONALI

Il problema della classificazione delle soluzioni invarianti per trasformazioni grupali è spesso non banale, in quanto va accompagnato da una classificazione delle sottoalgebre dell'algebra con cui si ha a che fare. Dopo aver effettuato tale classificazione, le soluzioni vengono classificate per invarianza sotto l'azione di tali sottoalgebre e raggruppate dunque in famiglie. Le soluzioni che appartengono alla medesima famiglia possono essere ottenute l'una dall'altra mediante l'applicazione di un elemento del sottogruppo relativo, mentre l'applicazione di un elemento

non appartenente al detto sottogruppo genera una soluzione non appartenente alla famiglia. Il risultato su cui basiamo la nostra analisi è il seguente.

PROPOSIZIONE 2.1 - Sia G un gruppo di simmetria di un sistema di equazioni differenziali Δ e sia $H \subset G$ un suo sottogruppo ad s parametri. Se $u = f(x)$ è soluzione del sistema Δ ed è invariante sotto H (ovvero f e $h \cdot f$, $\forall h \in H$ coincidono nel loro comune dominio di definizione), detto $g \in G$ un elemento del gruppo allora la funzione trasformata $u = \tilde{f}(x) = g \cdot f(x)$ è invariante sotto l'azione del gruppo coniugato $\tilde{H} = gHg^{-1}$.

2.2.1 La rappresentazione aggiunta

Consideriamo un gruppo di Lie G ; allora la classe di coniugazione di $h \in G$ è data da $Cl(h) \equiv \{ghg^{-1} : g \in G\}$. Indicando con $K_g(h) = ghg^{-1}$, questo è un diffeomorfismo $G \times G \rightarrow G$. Inoltre $K_g \circ K_{g'} = K_{gg'}$, mentre $K_e = \mathbb{1}_G$; in particolare K_g risulta essere un omomorfismo. Di particolare interesse è, più che il diffeomorfismo K_g , il suo differenziale $dK_g : TG|_h \rightarrow TG|_{K_g(h)}$, che determina un mappa lineare su \mathfrak{g} . Tale mappa prende il nome di *rappresentazione aggiunta*: $Ad g(\mathbf{v}) \equiv dK_g(\mathbf{v})$. La rappresentazione aggiunta è globalmente lineare su G ed ha la fondamentale proprietà di generare la trasformazione K_g , che permette di ottenere, dato un sottogruppo H , il suo sottogruppo coniugato secondo g : se, ad esempio, \mathbf{v} genera il sottogruppo ad un parametro $H = \{e^{\varepsilon\mathbf{v}} : \varepsilon \in \mathbb{R}\}$, allora $K_g(H) = gHg^{-1} = \tilde{H}$ è il sottogruppo ad un parametro coniugato secondo g (talvolta si scrive $\tilde{H} \subset Cl(H)$). Mentre K_g permette di trovare, assegnato $H \subset G$, il sottogruppo coniugato \tilde{H} mediante g , la rappresentazione aggiunta permette di passare da un'algebra ad un'altra coniugata alla prima; essendo inoltre una relazione di equivalenza, essa è di grande utilità per la suddivisione di \mathfrak{g} in classi di coniugazione. C'è un chiaro parallelismo tra la classificazione in classi di equivalenza dei sottogruppi mediante K_g e quella delle sottoalgebre tramite la rappresentazione aggiunta; vale infatti la seguente

PROPOSIZIONE 2.2 - Siano H e \tilde{H} sottogruppi connessi ad s parametri del gruppo di Lie G con sottoalgebre di \mathfrak{g} corrispondenti \mathfrak{h} , $\tilde{\mathfrak{h}}$. Si ha che H e \tilde{H} sono coniugati se e solo se $\tilde{\mathfrak{h}} = Ad g(\mathfrak{h})$ per un qualche $g \in G$.

Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{g}$; i generatori della rappresentazione aggiunta $Ad e^{\varepsilon\mathbf{v}}\mathbf{w}$, indicati solitamente con $ad \mathbf{v}|_{\mathbf{w}}$, sono ottenuti nel solito modo:

$$ad \mathbf{v}|_{\mathbf{w}} \equiv \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} Ad e^{\varepsilon\mathbf{v}}(\mathbf{w}).$$

V'è un'importante relazione tra l'azione aggiunta infinitesima e le parentesi di Lie, che in definitiva ne giustifica l'introduzione.

PROPOSIZIONE 2.3 - Sia G un gruppo di Lie con algebra \mathfrak{g} . Per ogni $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ il vettore aggiunto ad \mathbf{v} in $\mathbf{w} \in \mathfrak{g}$ è dato da

$$ad \mathbf{v}|_{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{w}],$$

dove identifichiamo $T\mathfrak{g}|_{\mathbf{w}}$ con \mathfrak{g} stesso, essendo quest'ultimo campo vettoriale.

Per la dimostrazione del risultato precedente si rimanda a [19, pag. 200, Proposizione 3.8]. La proposizione fornisce un metodo per il calcolo di $\text{Ad } e^{\varepsilon\mathbf{v}}\mathbf{w}$, con $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{g}$. Infatti utilizzando la serie di Lie² possiamo scrivere:

$$\text{Ad } e^{\varepsilon\mathbf{v}}\mathbf{w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} (\text{ad } \mathbf{v})^n(\mathbf{w}) = \mathbf{w} - \varepsilon[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + \frac{\varepsilon^2}{2}[\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] - \dots \quad (2.10)$$

2.2.2 Classificazione dei sottogruppi e delle sottoalgebre

Al fine di classificare i sottogruppi di un gruppo di trasformazioni G introduciamo il seguente concetto ausiliario.

DEFINIZIONE 2.1 - Sia G un gruppo di Lie. Un *sistema ottimale* di sottogruppi ad s parametri è una collezione di sottogruppi ad s parametri tali che ve ne sia uno rappresentativo di ogni classe di coniugazione. Analogamente, una collezione di algebre s -dimensionali forma un sistema ottimale se ogni sottoalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ di dimensione s appartenente alla collezione non è equivalente a nessun'altra presente nella collezione stessa, mentre una generica sottoalgebra $\tilde{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ è equivalente ad un solo elemento della collezione: $\tilde{\mathfrak{h}} = \text{Ad } g(\mathfrak{h})$, $g \in G$.

Osservazione. Dalla Proposizione 2.2 segue che classificare i sottogruppi è perfettamente equivalente al classificare le sottoalgebre. Poiché la classificazione avviene adoperando una relazione di equivalenza, nel caso dello studio delle sottoalgebre unidimensionali una tecnica di classificazione è quella di considerare un generico elemento $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ e sottoporlo a varie trasformazioni aggiunte, in modo da semplificarlo quanto più possibile, passando ogni volta da una sottoalgebra ad un'altra appartenente alla stessa classe di equivalenza. Questa tecnica è, tuttavia, di difficile applicazione nel caso di sottoalgebre di dimensione superiore. Per la loro classificazione esistono tecniche particolarmente sofisticate.

Una volta classificate le sottoalgebre, è naturale classificare le soluzioni del sistema di equazioni differenziali in famiglie, ciascuna delle quali contiene soluzioni invarianti per l'azione di una classe di coniugazione. Si può provare a stendere anche in questo caso un sistema ottimale di soluzioni invarianti sotto gruppi di

² Se consideriamo una funzione $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{df(e^{\varepsilon\mathbf{v}}x)}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^m \xi^i(e^{\varepsilon\mathbf{v}}x) \frac{\partial f(e^{\varepsilon\mathbf{v}}x)}{\partial x^i} \equiv \mathbf{v}(f)(e^{\varepsilon\mathbf{v}}x);$$

perciò sviluppando in serie di Taylor $f(e^{\varepsilon\mathbf{v}}x)$, per ε sufficientemente piccolo, ed utilizzando la notazione $\mathbf{v}^k(f) = \underbrace{\mathbf{v}(\dots \mathbf{v}(f) \dots)}_{k \text{ volte}}$ otteniamo la *serie di Lie*:

$$f(e^{\varepsilon\mathbf{v}}x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \mathbf{v}^k(f)(x).$$

simmetria ad s parametri, tale che se $u = \tilde{f}(x)$ è un'altra soluzione invariante sotto un gruppo di simmetria ad s parametri, allora dev'esserci un'ulteriore simmetria g del sistema che mappa \tilde{f} in una soluzione $f = g \cdot \tilde{f}$ della collezione.

2.3 ESEMPIO: L'EQUAZIONE DEL CALORE

Studiamo ora con le tecniche messe a punto l'equazione del calore [19]

$$u_t = u_{xx}. \quad (2.11)$$

Il calcolo che effettueremo sarà utile, tra l'altro, in seguito, quando analizzeremo l'equazione di Fokker-Planck, di cui l'equazione del calore è un importante caso particolare.

2.3.1 Calcolo dei generatori dell'algebra

Le variabili indipendenti sono due, ovvero una coordinata temporale ed una coordinata spaziale. L'equazione è di secondo ordine, perciò può essere intesa come una sottovarietà lineare definita dall'equazione $\Delta(x, t, u^{(2)}) = u_t - u_{xx} = 0$ di $M^{(2)} = X \times U^{(2)}$. Cerchiamo ora i generatori nella forma

$$\mathbf{v} = \zeta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.12)$$

che, una volta prolungati, diventano

$$\text{pr}^{(2)} \mathbf{v} = \mathbf{v} + \varphi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \varphi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

Imponiamo la validità del Teorema di Lie:

$$\text{pr}^{(2)} \mathbf{v} \Delta|_{\Delta=0} = 0 \Leftrightarrow \varphi^{xx} = \varphi^t \quad (2.13)$$

Dalla formula generale del prolungamento (1.9) abbiamo che:

$$\begin{aligned} \varphi^t &= D_t(\varphi - \zeta u_x - \tau u_t) + \zeta u_{xt} + \tau u_{tt} \\ &= \varphi_t + (\varphi_u - \tau_t) u_t - \zeta_t u_x - \zeta_u u_x u_t - \tau_u u_t^2, \\ \varphi^{xx} &= D_x^2(\varphi - \zeta u_x - \tau u_t) + \zeta u_{xxx} + \tau u_{xxt} \\ &= \varphi_{xx} + (2\varphi_{xu} - \zeta_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_t + (\varphi_{uu} - 2\zeta_{xu}) u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_t - \zeta_{uu} u_x^3 + \\ &\quad - \tau_{uu} u_x^2 u_t + (\varphi_u - 2\zeta_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\zeta_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}. \end{aligned}$$

Eguagliando le due espressioni, si ottiene una relazione in funzione di u e delle sue derivate. L'espressione va calcolata per $u_t = u_{xx}$, pertanto bisogna sostituire, ad esempio, u_t con u_{xx} . Perché la (2.13) sia valida, tutti i coefficienti dei vari monomi devono essere nulli; si ottiene così la seguente serie di equazioni determinanti:

Monomi	Coefficienti	
$u_x u_{xt}$	$0 = -2\tau_u$	
u_{xt}	$0 = -2\tau_x$	$\Rightarrow \tau = \tau(t)$
u_{xx}^2	$-\tau_u = -\tau_u$	
$u_x^2 u_{xx}$	$0 = -\tau_{uu}$	
$u_x u_{xx}$	$-\tilde{\xi}_u = -2\tau_{xu} - 3\tilde{\xi}_u$	$\Rightarrow \tilde{\xi} = \tilde{\xi}(x, t)$
u_x^3	$0 = -\tilde{\xi}_{uu}$	
u_{xx}	$\varphi_u - \tau_t = -\tau_{xx} + \varphi_u - 2\tilde{\xi}_x$	$\Rightarrow \tilde{\xi}(x, t) = \frac{1}{2}\tau_t x + \chi(t)$, con χ da determinare
u_x^2	$0 = -\varphi_{uu} - 2\tilde{\xi}_{xu}$	$\Rightarrow \varphi(x, t, u) = \alpha(x, t) + u\beta(x, t)$
1	$\varphi_t = \varphi_{xx}$	$\Rightarrow \alpha$ e β sono soluzioni dell'equazione del calore
u_x	$-\tilde{\xi}_t = 2\varphi_{xu} - \tilde{\xi}_{uu}$	$\Rightarrow \beta = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{\lambda_t}x + \varrho(t)$, con ϱ da determinare

Dalla condizione $\beta_t = \beta_{xx}$ applicata all'ultima equazione otteniamo che $\tau_{ttt} = 0$, $\chi_{tt} = 0$, $\varrho_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt}$.

Riassumendo si ha dunque:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} &= k_1 + k_2 + 2k_3t + 4k_4xt, \\ \tau &= k_5 + 2k_2t + 4k_4t^2, \\ \varphi &= (k_6 - k_3x - 2k_4t - k_4x^2)u + \alpha(x, t),\end{aligned}$$

dove k_1, \dots, k_6 sono costanti arbitrarie e α è una generica soluzione dell'equazione del calore. Per trovare i generatori possiamo porre di volta in volta $k_i = \delta_{ij}$ con j che va da 1 a 6; otteniamo così:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{v}_3 &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{v}_5 &= 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_6 &= 4tx \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u \frac{\partial}{\partial u},\end{aligned}\tag{2.14}$$

più un generatore di una sottoalgebra infinito dimensionale

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha \frac{\partial}{\partial u},$$

con α soluzione della (2.11), che non esprime altro se non il fatto che se u è soluzione, anche $u + \varepsilon\alpha$ è soluzione. Il gruppo ad essa associato è

$$G_\alpha : (x, t, u + \varepsilon\alpha(x, t)).$$

	\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_3	\mathbf{v}_4	\mathbf{v}_5	\mathbf{v}_6
\mathbf{v}_1	0	0	0	\mathbf{v}_1	$-\mathbf{v}_3$	$2\mathbf{v}_5$
\mathbf{v}_2	0	0	0	$2\mathbf{v}_2$	$2\mathbf{v}_1$	$4\mathbf{v}_4 - 2\mathbf{v}_3$
\mathbf{v}_3	0	0	0	0	0	0
\mathbf{v}_4	$-\mathbf{v}_1$	$-2\mathbf{v}_2$	0	0	\mathbf{v}_5	$2\mathbf{v}_6$
\mathbf{v}_5	\mathbf{v}_3	$-2\mathbf{v}_1$	0	$-\mathbf{v}_5$	0	0
\mathbf{v}_6	$-2\mathbf{v}_5$	$2\mathbf{v}_3 - 4\mathbf{v}_4$	0	$-2\mathbf{v}_6$	0	0

Tabella 1: Tavola dei commutatori per l'algebra dell'equazione del calore. L'elemento in posizione (i, j) è dato da $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$.

Per esplicitare le altre trasformazioni gruppali dai generatori usiamo le relazioni (1.14) e (1.15):

$$\begin{aligned}
 G_1: (x + \varepsilon, t, u) & \rightarrow u^{(1)} = f(x - \varepsilon, t), \\
 G_2: (x, t + \varepsilon, u) & \rightarrow u^{(2)} = f(x, t - \varepsilon), \\
 G_3: (x, t, e^\varepsilon u) & \rightarrow u^{(3)} = e^\varepsilon f(x, t), \\
 G_4: (e^\varepsilon x, e^{2\varepsilon} t, u) & \rightarrow u^{(4)} = f(e^{-\varepsilon} x, e^{-2\varepsilon} t), \\
 G_5: (x + 2\varepsilon t, t, u e^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t}) & \rightarrow u^{(5)} = e^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t} f(x - 2\varepsilon t, t), \\
 G_6: \left(\frac{x}{1 - 4\varepsilon t}, \frac{t}{1 - 4\varepsilon t}, u \sqrt{1 - 4\varepsilon t} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1 - 4\varepsilon t}} \right) & \rightarrow u^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\varepsilon t}} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1 + 4\varepsilon t}} f\left(\frac{x}{1 + 4\varepsilon t}, \frac{t}{1 + 4\varepsilon t} \right).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Notiamo che applicando alla soluzione $u = c = \text{costante}$ la trasformazione 6 si ottiene la ben nota soluzione $\frac{c}{\sqrt{1 + 4\varepsilon t}} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1 + 4\varepsilon t}}$. Riportiamo in tabella 1 la tavola dei commutatori, che sarà utile in seguito per la classificazione delle sottoalgebre.

2.3.2 Classificazione dei sottogruppi e delle sottoalgebre unidimensionali

Proponiamoci ora di classificare le sottoalgebre e i sottogruppi unidimensionali dell'equazione del calore [19]; trascureremo, nella trattazione, il sottogruppo banale infinito dimensionale generato da \mathbf{v}_α (delle considerazioni, a riguardo, saranno fatte alla fine). La classificazione di sottoalgebre e sottogruppi di dimensione maggiore è assai delicata e non verrà trattata in questa sede. Per tale classificazione utilizzeremo i risultati del paragrafo 2.2, ed in particolare l'osservazione a pagina 18. Per tecniche più generali si veda [20; 36].

Per procedere consideriamo la tabella 2, calcolata mediante la tavola dei commutatori utilizzando la relazione (2.10).

Consideriamo ora un generico $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^6 c_i \mathbf{v}_i \in \mathfrak{g}$ e valutiamo le possibili riduzioni di quest'espressione utilizzando rappresentazioni aggiunte. È di fondamentale importanza, al fine di semplificare l'analisi, l'osservazione che $\zeta(\mathbf{v}) = c_4^2 - 4c_2c_6$

2.3 ESEMPIO: L'EQUAZIONE DEL CALORE

Ad	\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_3	\mathbf{v}_4	\mathbf{v}_5	\mathbf{v}_6
\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_3	$\mathbf{v}_4 - \varepsilon \mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_5 + \varepsilon \mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_6 - 2\varepsilon \mathbf{v}_5 - \varepsilon^2 \mathbf{v}_3$
\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_3	$\mathbf{v}_4 - 2\varepsilon \mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_5 - 2\varepsilon \mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_6 - 4\varepsilon \mathbf{v}_4 + 2\varepsilon \mathbf{v}_3 + 4\varepsilon^2 \mathbf{v}_2$
\mathbf{v}_3	\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_3	\mathbf{v}_4	\mathbf{v}_5	\mathbf{v}_6
\mathbf{v}_4	$e^\varepsilon \mathbf{v}_1$	$e^{2\varepsilon} \mathbf{v}_2$	\mathbf{v}_3	\mathbf{v}_4	$e^{-\varepsilon} \mathbf{v}_5$	$e^{-2\varepsilon} \mathbf{v}_6$
\mathbf{v}_5	$\mathbf{v}_1 - \varepsilon \mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_2 + 2\varepsilon \mathbf{v}_1 - \varepsilon^2 \mathbf{v}_3$	\mathbf{v}_3	$\mathbf{v}_4 + \varepsilon \mathbf{v}_5$	\mathbf{v}_5	\mathbf{v}_6
\mathbf{v}_6	$\mathbf{v}_1 + 2\varepsilon \mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_2 - 2\varepsilon \mathbf{v}_3 + 4\varepsilon \mathbf{v}_4 + 4\varepsilon^2 \mathbf{v}_6$	\mathbf{v}_3	$\mathbf{v}_4 + 2\varepsilon \mathbf{v}_6$	\mathbf{v}_5	\mathbf{v}_6

Tabella 2: Tavola delle rappresentazioni aggiunte dei vettori di base di \mathfrak{g} ; l'elemento della i -esima riga e j -esima colonna è dato da $\text{Ad } e^{\varepsilon \mathbf{v}_i} \mathbf{v}_j$.

è invariante sotto l'azione aggiunta: ovvero, preso un qualunque $g \in G$ e $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$, $\zeta(\text{Ad } g(\mathbf{v})) = \zeta(\mathbf{v})$. Questo infatti impone *a priori* delle restrizioni ai valori che possiamo richiedere per i coefficienti c_i , semplificando il calcolo. Avendo dunque individuato tale invariante, cerchiamo di operare proprio sui coefficienti c_2, c_4, c_6 in modo da valutarne i cambiamenti a seguito dell'azione della rappresentazione aggiunta:

$$\mathbf{v}' = \sum_{i=1}^6 c'_i \mathbf{v}_i = \text{Ad } e^{\varepsilon_6 \mathbf{v}_6} \circ \text{Ad } e^{\varepsilon_2 \mathbf{v}_2} \mathbf{v};$$

mediante il calcolo diretto si vede che:

$$\begin{aligned} c'_2 &= c_2 - 2\varepsilon_2 c_4 + 4\varepsilon_2^2 c_6, \\ c'_4 &= 4\varepsilon_6 c_2 + (1 - 8\varepsilon_6 \varepsilon_2) c_4 - 4\varepsilon_2 (1 - 4\varepsilon_6 \varepsilon_2) c_6, \\ c'_6 &= 4\varepsilon_6^2 c_2 + 2\varepsilon_6 (1 - 4\varepsilon_6 \varepsilon_2) c_4 + (1 - 4\varepsilon_6 \varepsilon_2)^2 c_6. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A questo punto distinguiamo tre casi:

1. Sia $\zeta(\mathbf{v}) > 0$. Consideriamo ε_2 radice reale dell'equazione $4c_6 \varepsilon_2^2 - 2c_4 \varepsilon_2 + c_2 = 0$ e poniamo $\varepsilon_6 = \frac{c_6}{8\varepsilon_2 c_6 - 2c_4}$. Sostituendo nelle equazioni (2.16) si trova che $c'_2 = c'_6 = 0$ e $c'_4 = \sqrt{\zeta(\mathbf{v})} \neq 0$. Mediante tale semplificazione si ottiene che \mathbf{v} è equivalente ad un vettore proporzionale a $\mathbf{v}' = c'_1 \mathbf{v}_1 + c'_3 \mathbf{v}_3 + c'_5 \mathbf{v}_5 + \mathbf{v}_4$ (ridefinendo i coefficienti in modo appropriato). Applicando poi mappe aggiunte generate da \mathbf{v}_5 e \mathbf{v}_1 si possono annullare i coefficienti davanti a \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_5 . In definitiva $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}_4 + c \mathbf{v}_3$, con $c \in \mathbb{R}$.
2. Sia $\zeta(\mathbf{v}) < 0$. Poniamo $\varepsilon_2 = 0$ e $\varepsilon_6 = -\frac{c_4}{4c_2}$ (in questo caso $c_2 \neq 0$ senz'altro, perché altrimenti ζ sarebbe positivo). Con tali valori si ottiene $c'_4 = 0$. Operando poi con la mappa aggiunta corrispondente a \mathbf{v}_4 si possono rendere uguali i coefficienti di \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_6 , in modo da ottenere un'espressione del tipo $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_6 + c'_1 \mathbf{v}_1 + c'_3 \mathbf{v}_3 + c'_5 \mathbf{v}_5$. A questo punto applichiamo $\text{Ad } e^{-\frac{c'_1}{2} \mathbf{v}_5} \circ \text{Ad } e^{-\frac{c'_5}{2} \mathbf{v}_1}$, ottenendo che \mathbf{v} è equivalente a $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_6 + c \mathbf{v}_3$, $c \in \mathbb{R}$.
3. Sia $\zeta(\mathbf{v}) = 0$. Allora possiamo distinguere due sottocasi.
 - a) Se non tutti i coefficienti sono nulli, possiamo scegliere ε_6 e ε_2 in modo che $c'_2 \neq 0$ ma $c'_4 = c'_6 = 0$, per cui si ottiene $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}_2 + c'_1 \mathbf{v}_1 + c'_3 \mathbf{v}_3 + c'_5 \mathbf{v}_5$.

Supponiamo $c'_5 \neq 0$. Applicando $\text{Ad } e^{\varepsilon_1 \mathbf{v}_1}$ e $\text{Ad } e^{\varepsilon_2 \mathbf{v}_2}$, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ opportuni, i coefficienti di \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_3 possono essere annullati, mentre l'azione del sottogruppo generato da \mathbf{v}_4 scala indipendentemente i coefficienti di \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_5 , di modo da ottenere $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}_2 \pm \mathbf{v}_5$.

Se invece $c'_5 = 0$ può essere utilizzato il sottogruppo generato da \mathbf{v}_5 per ridurre \mathbf{v} alla forma $\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$, $c \in \mathbb{R}$.

- b) Se tutti i coefficienti sono nulli e $c_1 \neq 0$, usando i sottogruppi generati da \mathbf{v}_5 e \mathbf{v}_6 si può ridurre \mathbf{v} al semplice \mathbf{v}_1 . Se anche c_1 è nullo ma non lo è c_5 , applicando $\text{Ad } e^{\varepsilon_2 \mathbf{v}_2}$, con ε_2 opportuno, si ha ancora $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}_1$. Se $c_1 = c_5 = 0$ rimane, ovviamente, solo \mathbf{v}_3 .

Riassumendo, le sottoalgebre unidimensionali dell'algebra di Lie \mathfrak{g} dell'equazione del calore sono

$$\mathbf{v}_4 + c\mathbf{v}_3, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_6 + c\mathbf{v}_3, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (2.17b)$$

$$\mathbf{v}_2 \pm \mathbf{v}_5, \quad (2.17c)$$

$$\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (2.17d)$$

$$\mathbf{v}_1, \quad (2.17e)$$

$$\mathbf{v}_3. \quad (2.17f)$$

Nel caso (2.17c) abbiamo contemplato assieme le due possibilità $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5$ e $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_5$ poiché si passa da una sottoalgebra all'altra tramite una simmetria discreta (che non compare quindi nella nostra analisi): $(x, t, u) \mapsto (-x, t, u)$.

Prendendo in considerazione \mathbf{v}_α l'analisi non cambia. Infatti se il vettore di partenza è $\mathbf{v} + \mathbf{v}_\alpha$, allora preso $\mathbf{v}_\beta = \beta(x, t)\partial_u$, con

$$\beta(x, t) = - \int_0^x \alpha(y, t) dy - \int_0^t \alpha_x(0, s) ds,$$

si ottiene $\text{Ad } e^{\varepsilon \mathbf{v}_\beta}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_\alpha) = \mathbf{v}$, purché quest'ultimo non sia nullo. Perciò alla classificazione precedente occorrerebbe semplicemente aggiungere la sottoalgebra generata da \mathbf{v}_α .

A questo punto si dovrebbe continuare con la classificazione delle sottoalgebre di \mathfrak{g} di dimensione superiore. Tuttavia questo compito, come già accennato, va al di là delle tecniche presentate finora.

2.3.3 Soluzione tipo onda viaggiante

A titolo di esempio, supponiamo ora di cercare soluzioni di tipo onda viaggiante, ovvero tali che

$$(x, t, u) \rightarrow (x + c\varepsilon, t + \varepsilon, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Dalle espressioni in (2.15) si vede che la sottoalgebra che ci interessa è generata da $\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}$. Gli invarianti globali ζ, I si ottengono dal campo \mathbf{v} utilizzando il metodo delle caratteristiche:

$$\frac{dx}{c} = dt \Rightarrow x = ct + \zeta \Rightarrow \zeta = x - ct, \quad I(x, u) = u.$$

Dunque una soluzione invariante sotto questa sottoalgebra ha la forma $I = F(\zeta) \Leftrightarrow u = F(x - ct)$. Perciò:

$$u_t = -cF_\zeta, \quad u_{xx} = F_{\zeta\zeta}$$

ovvero $F_{\zeta\zeta} = -cF_\zeta \Rightarrow F(\zeta) = ke^{-c\zeta} + l$, con k, l costanti arbitrarie. In definitiva la soluzione tipo onda viaggiante ha la forma:

$$u(x, t) = ke^{-c(x-ct)} + l. \quad (2.18)$$

È assai notevole che la forma della soluzione si sia ottenuta richiedendo una precisa invarianza sotto l'azione di un certo sottogruppo. La corrispondente sottoalgebra è la (2.17d): infatti $\text{Ad } e^{-\frac{1}{2}c\mathbf{v}_3}(\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2 + \frac{1}{4}c^2\mathbf{v}_3$. Da quanto detto sopra, la soluzione della forma (2.18) può essere presa come rappresentante di tutte le soluzioni invarianti sotto la sottoalgebra (2.17d), in quanto ogni altra soluzione con tale proprietà può essere ottenuta da questa mediante una trasformazione del sottogruppo corrispondente alla sottoalgebra (2.17d). Per le altre sottoalgebre si può procedere in modo del tutto analogo a quanto fatto in questo caso.

L'EQUAZIONE DI FOKKER-PLANCK UNIDIMENSIONALE

3.1 IL MOTO BROWNIANO E L'EQUAZIONE DI FOKKER-PLANCK

*... multa minuta modis multis per inane videbis
 corpora misceri radiorum lumine in ipso
 et vel ut aeterno certamine proelia pugnas
 edere turmatim certantia nec dare pausam,
 conciliis et discidiis exercita crebris...*

LUCREZIO, *De rerum natura*, II, 116-120

Il moto browniano prende il nome da Robert Brown, che nel 1827 osservò al microscopio il moto di particelle di polline e polvere in sospensione acquosa. Egli notò che particelle di dimensione del micron, sospese in un fluido in equilibrio termico, tendevano ad assumere un moto totalmente disordinato, apparentemente indipendente dalla natura della particella in sospensione, contrariamente a quanto ci si poteva inizialmente aspettare (ovvero uno stato di quiete o di vibrazione attorno ad una posizione di equilibrio). La spiegazione di questo fenomeno è nel numero molto alto di urti che la particella subisce ad opera delle molecole del fluido in cui si trova. L'osservazione di Brown non ebbe inizialmente alcuna interpretazione fisica e rimase di natura qualitativa fino all'inizio del secolo xx, quando Bachelier [2] ed Einstein [12] tentarono di trovare delle leggi alla base del fenomeno. Quest'ultimo in particolare si propose di studiare il moto di una singola particella di polvere e presentò, nel famoso articolo del 1905, l'argomento che segue.

Assumiamo che la particella si muova in modo pressoché indipendente rispetto alle altre particelle presenti in sospensione e che non abbia memoria del suo moto per tempi maggiori di un certo tempo molto piccolo t_0 (ovvero, in definitiva, il suo moto dipenda fortemente solo dalle interazioni subite negli istanti immediatamente precedenti a quello preso in considerazione). Se ci sono dunque N particelle in sospensione, allora la loro posizione muterà nel tempo t_0 di una quantità δ diversa per ogni particella. Sia δ_x lo spostamento lungo l'asse x . Ci aspettiamo che δ_x segua una certa distribuzione di probabilità, chiamiamola $\omega(\delta_x)$. Allora il numero di particelle che si sposterà lungo x di un intervallo compreso tra δ_x e $\delta_x + d\delta_x$ sarà dato da

$$dN = N\omega(\delta_x) d\delta_x,$$

supponendo ω normalizzata ad 1. Per ragioni di simmetria assumiamo $\omega(-\delta_x) = \omega(\delta_x)$; è ragionevole supporre, inoltre, che ω sia diversa da zero solo per valori assai piccoli (è improbabile che una particella in sospensione percorra grandi distanze in un tempo infinitesimo). Se $u(x, t)$ è il numero di particelle per unità di

volume (che per semplicità poniamo dipendente solo dalla coordinata x), allora il numero di particelle per unità di volume tra x e $x + dx$ al tempo $t + t_0$ è dato da

$$u(x, t + t_0) dx = dx \int_{-\infty}^{+\infty} u(x + \delta_x, t) \omega(\delta_x) d\delta_x. \quad (3.1)$$

Ma essendo t_0 molto piccolo possiamo porre

$$u(x, t + t_0) = u(x, t) + t_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t};$$

espandendo in serie di Taylor per δ_x piccolo, abbiamo che

$$u(x + \delta_x, t) = u(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_x^n}{n!} \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n}.$$

Usando le espressioni trovate integriamo rispetto a δ_x , ricordando però che nell'integrale (3.1) ω ha supporto limitato; di conseguenza l'integrazione tra $-\infty$ e $+\infty$ rispetto alla variabile δ_x è un'espressione formale. Dunque

$$u + t_0 \frac{\partial u}{\partial t} = u \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\delta_x) d\delta_x + \frac{\partial u}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_x \omega(\delta_x) d\delta_x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_x^2 \omega(\delta_x) d\delta_x,$$

dove si sono trascurati i termini di ordine superiore al secondo. Per la parità di ω il secondo integrale è nullo, mentre il primo è uguale all'unità, cosa che permette di semplificare la u al primo membro; in definitiva abbiamo, posto $D = \frac{1}{t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_x^2 \omega(\delta_x) d\delta_x$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.2)$$

Quella ottenuta è una tipica equazione di diffusione (equazione del calore), con coefficiente di diffusione $\frac{D}{2}$ ed è in definitiva un caso particolare dell'equazione di Fokker-Planck (in seguito EFP). Una possibile soluzione ha la forma (si veda pagina 21)

$$u(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (3.3)$$

Un'interessante derivazione alternativa fu ottenuta da Kolmogorov negli anni '30 [11], nel contesto dei suoi studi sui processi marcoviani. Egli riuscì ad ottenere in maniera pressoché indipendente la EFP, che, per questa ragione, ha anche il nome di *equazione prospettica* (o *in avanti*) di Kolmogorov.

L'equazione ha trovato applicazione nei campi più disparati: fisica delle particelle elementari, astrofisica, sorgenti di raggi x , fisica dei plasmi.

In fisica dei plasmi l'equazione compare in riferimento alla diffusione tra particelle cariche. Se indichiamo con $u(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ la distribuzione di probabilità nello spazio delle fasi, studiando la diffusione della particella 1 sulla particella 2 si perviene ad un'equazione del tipo [21]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v_1} [f_1(v_1) u_1] + \frac{\partial}{\partial v_1} \left[f_2(v_1) \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \right],$$

con v_1 velocità della particella 1 avente distribuzione di probabilità u_1 . La precedente, come si vedrà in seguito, è una tipica equazione di Fokker-Planck.

3.1.1 Derivazione della EFP

L'equazione di Fokker-Planck lineare può ricavarsi in diversi modi. Uno di questi [3] è quello di partire da una *master equation*¹. Pensando ad esempio ad un moto browniano lungo l'asse x , sia $u(x, t) dx$ la probabilità che una particella al tempo t si trovi nell'intervallo tra x e $x + dx$ e $w(x', x) dx \Delta t$ la probabilità che detta particella passi dall'intervallo $(x, x + dx)$ all'intervallo $(x', x' + dx)$ nell'intervallo temporale Δt ; allora la *master equation* corrispondente assume la forma:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x', t)w(x', x) - u(x, t)w(x, x')] dx'. \quad (3.4)$$

Supponendo che $w(x, x') = \omega(x, \delta)$, con $\delta = x - x'$, abbia un picco attorno a $\delta = 0$ (ovvero non vi sono transizioni per $x - x'$ grande), possiamo espandere l'integrando attorno a questo valore ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -\delta \frac{\partial}{\partial x} [u(x, t)\omega(x, \delta)] + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(x, t)\omega(x, \delta)] \right\} d\delta \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[u(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \omega(x, \delta) d\delta \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[u(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2 \omega(x, \delta) d\delta \right] \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x)u(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x)u(x, t)], \quad (3.5)$$

che è appunto la EFP unidimensionale. Il coefficiente $a(x)$ viene solitamente detto *coefficiente di deriva (drift)*, mentre $b(x)$ viene detto *coefficiente di diffusione*. Si noti inoltre che, per come è definito, $b(x) \geq 0$. Il significato di $a(x)$ diventa chiaro se supponiamo che, introdotta una forza esterna $F_x = -\frac{d\varphi}{dx}$, questa sia legata linearmente alla velocità media della particella nella direzione x : $F_x(x) = \lambda a(x)$. Infatti, data la definizione di $a(x)$, questa è proprio la velocità media in quanto l'integrale non è altro che lo spostamento medio lungo x per unità di tempo.

L'equazione ottenuta, a differenza della (3.2), contiene termini in u e u_x . Questo perché non abbiamo fatto ipotesi sulla parità di ω ; inoltre abbiamo supposto sin dall'inizio una dipendenza di ω da x . A parte tale osservazione, le considerazioni che portano alla (3.5) sono essenzialmente le stesse usate per ricavare la (3.2). Osserviamo infine che in tutti i casi visti finora si è fatta l'ipotesi implicita di un processo omogeneo, ovvero di assenza di dipendenza di ω da t . Tuttavia, in alcuni contesti fisici, questa ipotesi non è verificata.

¹ Per una derivazione della *master equation* si rimanda a [3]. In generale, osserviamo qui che l'equazione è essenzialmente conseguenza dell'ipotesi di Markov:

$$P_f(t + \Delta t) = \sum_i \omega_{i \rightarrow f}(\Delta t) P_i(t),$$

dove $P_f(t)$ è la probabilità di trovare il sistema nello stato f al tempo t , mentre $\omega_{i \rightarrow f}(\Delta t)$ è la probabilità che al tempo $t + \Delta t$ ci sia una transizione dallo stato i allo stato f . In definitiva, l'ipotesi di Markov consiste nel supporre uno stato dipendente solo dallo stato immediatamente precedente, ma non da come questo stato è venuto a crearsi.

Solo per esemplificare alcune applicazioni, menzioniamo le seguenti EFP di particolare interesse [29]:

- diffusione in un campo gravitazionale (g, D costanti):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

- processi di Ornstein-Uhlenbeck (k, D costanti):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (kxu) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

- processi tipo Rayleigh (γ, μ costanti):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\gamma x - \frac{\mu}{x} \right) u \right] + \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

- modelli di genetica delle popolazioni (α, c costanti):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \beta \frac{\partial}{\partial x} [(x - c)u] + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(x - c)^2 u], \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1 - x^2)^2 u], \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 (1 - x^2)^2 u]. \end{aligned}$$

Uno dei metodi per affrontare la risoluzione di un'equazione di tipo EFP è quello di riscriverla sotto forma di un'equazione di Schrödinger (che in effetti è un caso particolare di EFP) e risolverne l'equazione agli autovalori, come si è soliti fare in meccanica quantistica non relativistica. Questo metodo, tuttavia, è efficace solo quando l'equazione agli autovalori associata è risolubile esattamente. Tuttavia talvolta la conoscenza di un numero adeguato di autofunzioni può permettere di risolvere l'equazione agli autovalori (e quindi la EFP ad essa associata) in modo approssimato. Questa tecnica è detta *espansione in autofunzioni* [13]. Noi studieremo l'equazione analizzandola mediante le tecniche algebrico-gruppali messe a punto nei capitoli precedenti.

3.1.2 Derivazione della EFP non lineare

Per derivare una EFP non lineare, scriviamo anzitutto, come nel caso precedente, la *master equation*, ma questa volta su un reticolo di punti equispaziati:

$$\frac{\partial u(n, t)}{\partial t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [u(m, t)\omega_{m,n}(t) - u(n, t)\omega_{n,m}(t)], \quad (3.6)$$

con $u(n, t)$ che rappresenta la probabilità di trovare un sistema nello stato n al tempo t , mentre $\omega_{m,n}(t)$ è la probabilità di transizione $m \rightarrow n$ al tempo t . Indichiamo con Δ il passo reticolare e scriviamo $u(n, t) \equiv u(n\Delta, t)$. Introduciamo la nonlinearietà nel sistema ponendo [9; 25]

$$\omega_{k,l}(t) = -\frac{1}{\Delta}\delta_{k,l+1}a(k\Delta)v[u(k\Delta, t)] + \frac{1}{\Delta^2}(\delta_{k,l+1} + \delta_{k,l-1})Y[u(k\Delta, t), w(l\Delta, t)],$$

dove $a(x)$ rappresenta la forza esterna (adimensionale), $v[u]$ è un funzionale dipendente da u mentre $Y[u, w]$ è un funzionale dipendente dalle probabilità associate a due stati diversi ($w(k\Delta, t) \equiv u(k\Delta, t)$). Sostituendo nella (3.6) e ponendo $n\Delta \equiv x$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = & -\frac{1}{\Delta} \{u(x + \Delta, t)a(x + \Delta)v[u(x + \Delta, t)] - u(x, t)a(x)v[u(x, t)]\} \\ & + \frac{1}{\Delta^2} \{u(x + \Delta, t)Y[u(x + \Delta, t), w(x, t)] + u(x - \Delta, t)Y[u(x - \Delta, t), w(x, t)]\} \\ & - \frac{u(x, t)}{\Delta^2} \{Y[u(x, t), w(x + \Delta, t)] + Y[u(x, t), w(x - \Delta, t)]\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sviluppando ora $Y[u(x, t), w(x \pm \Delta, t)]$ per piccoli Δ e considerando il fatto che, per definizione, $w(x \pm \Delta, t) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} u(x, t)$, si ottiene

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x)\Psi[u(x, t)]] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\Omega[u(x, t)] \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right], \quad (3.8)$$

con

$$\begin{aligned} \Psi[u(x, t)] &= u(x, t)v[u(x, t)] \\ \Omega[u(x, t)] &= \left[Y[u, w] + u(x, t) \left(\frac{\partial Y[u, w]}{\partial u} - \frac{\partial Y[u, w]}{\partial w} \right) \right]_{w=u}, \end{aligned}$$

entrambe supposte essere quantità positive, finite ed almeno di classe C^1 . Inoltre si suppone che $\Psi[u]$ sia un funzionale di $u(x, t)$ monotono crescente.

3.2 LA EFP E LE STATISTICHE NON ESTENSIVE: UN'INTRODUZIONE

La EFP lineare è una tra le più importanti equazioni che governano l'evoluzione della distribuzione di probabilità nel caso di un sistema fisico soggetto ad un campo di forze esterno, e quindi della meccanica statistica dei sistemi non in equilibrio. La distribuzione di Boltzmann compare come soluzione della EFP lineare nel caso stazionario. Ciò ha suggerito di pensare ad una teoria più generale, che includa la teoria di Boltzmann per il caso stazionario, ma che contempli anche casi non stazionari e ricollegabile alle proprietà statistiche della EFP. Una delle teorie più promettenti è stata proposta da Tsallis [31], che ha introdotto una nuova forma di entropia, S_q , dipendente da un parametro q , che coincide con l'entropia di Boltzmann-Gibbs nel limite $q \rightarrow 1$. Il fatto che le usuali proprietà estensive

delle grandezze termodinamiche vengano meno quando $q \neq 1$ ha fatto sì che ci si riferisca a questo formalismo col nome di *meccanica statistica non estensiva*² [33]. Essa sembra essere intimamente legata con la EFP, in particolare con la EFP non lineare: si è visto infatti che molte soluzioni di EFP non lineari corrispondono a distribuzioni che massimizzano l'entropia di Tsallis. Nel seguito si analizzerà solo il caso di una EFP unidimensionale.

3.2.1 Caso stazionario

Consideriamo la EFP non lineare (3.8) [25]:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x)\Psi[u(x, t)]] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\Omega[u(x, t)] \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]. \quad (3.9)$$

Il sistema è in presenza di un campo esterno, associato ad una forza $a(x) = -\frac{d\varphi(x)}{dx}$. Assumiamo che tutte le funzioni in gioco siano analitiche e che inoltre

$$u(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad a(x)\Psi[u(x, t)] \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0. \quad (3.10)$$

Infatti integrando a destra e a sinistra la (3.9) diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t_0) dx = 1.$$

A questo punto possiamo riscrivere la (3.9) come un'equazione di continuità

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = 0, \quad j(x, t) = a(x)\Psi[u(x, t)] - \Omega[u(x, t)] \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad (3.11)$$

da cui nel caso stazionario, ricordando l'espressione di $a(x)$ e imponendo che valgano le (3.10) si deduce che

$$-\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\Omega[u_{st}(x)]}{\Psi[u_{st}(x)]} \frac{\partial u_{st}(x)}{\partial x},$$

che permette in linea di principio di ricavare u_{st} ³.

² Per una raccolta di referenze, si veda anche <http://tsallis.cat.cbpf.br/TEMUCO.pdf>.

³ Una delle espressioni più utilizzate [24] per i funzionali che compaiono nella EFP non lineare è $\Psi[u] = u$, $\Omega[u] = a\kappa u^{\kappa-1} + b(2-q)u^{q-1}$, dove a, b, κ, q sono costanti reali. Utilizzando tali coefficienti si ottengono le relazioni

$$-\frac{d\varphi(x)}{dx} = [a\kappa u^{\kappa-2}(x) + b(2-q)u^{q-2}(x)] \frac{\partial u(x)}{\partial x}$$

$$\varphi(0) - \varphi(x) = a \frac{\kappa}{\kappa-1} u^{\kappa-1}(x) + b \frac{2-q}{q-1} u^{q-1}(x)$$

L'equazione precedente permette di ottenere, una volta assegnati q, κ, φ , l'espressione di u in caso stazionario in presenza di un campo esterno. Osserviamo che nel caso della EFP lineare u avrebbe una forma di tipo esponenziale (ad esempio ponendo $\Omega[u] = \text{costante} = \frac{1}{\beta}$, $\Psi[u] = u$ e $\varphi(0) = 0$ si otterrebbe $u_{st}(x) = \text{costante} \cdot e^{-\beta\varphi(x)}$, che è la distribuzione di Boltzmann).

3.2.2 Il teorema H e l'entropia di Tsallis

Nel 1872 Boltzmann riuscì a dimostrare un teorema di notevole importanza nell'ambito della teoria cinetica dei gas. Egli provò che in un processo irreversibile l'energia libera di un gas ideale soddisfa la relazione

$$\frac{\partial F}{\partial t} \leq 0.$$

Questo risultato, che prende il nome di *teorema H*, è fortemente legato al secondo principio della termodinamica: infatti, per un sistema isolato, esso equivale alla legge dell'aumento dell'entropia.

Vediamo ora come si può dimostrare il teorema *H* in un contesto più generale utilizzando la (3.9) [24]. Supponiamo che si possa trovare un funzionale entropico che soddisfi le seguenti proprietà:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} g[u(x, t)] dx; \quad g[0] = 0, \quad g[1] = 0, \quad \frac{d^2 g}{du^2} \leq 0. \quad (3.12)$$

Si suppone che g sia almeno di classe C^2 . Introduciamo quindi una funzione energia libera, sempre in analogia con quanto noto dalla meccanica statistica:

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) u(x, t) dx - \frac{1}{\beta} S = U - \frac{1}{\beta} S,$$

con $\beta > 0$. Perciò

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) u(x, t) dx - \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} g[u(x, t)] dx \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi(x) - \frac{1}{\beta} \frac{\partial g[u(x, t)]}{\partial u} \right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Integrando per parti, usando le condizioni (3.10) e la relazione (3.11):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d\varphi}{dx} \Psi[u] + \Omega[u] \frac{\partial u}{\partial x} \right] \left[\frac{d\varphi}{dx} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 g[u]}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx. \quad (3.14)$$

Assumiamo ora che la (3.9) e la (3.12) siano soddisfatte. *Imponiamo* dunque la condizione

$$\frac{\partial^2 g[u]}{\partial u^2} = -\beta \frac{\Omega[u]}{\Psi[u]}, \quad (3.15)$$

da cui, ricordando che $\Psi[u]$ è positiva e monotona crescente per u , segue il *teorema H*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi[u] \left[\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\Omega[u]}{\Psi[u]} \frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 dx \leq 0. \quad (3.16)$$

Nella (3.15) sono presenti delle ipotesi implicite. Anzitutto deve essere $\Omega[u] \geq 0$, condizione plausibile avendo Ω il ruolo di un coefficiente di diffusione; in

secondo luogo essa esprime una relazione tra la EFP di partenza e un'entropia, permettendo così di identificare l'entropia di un sistema data la sua specifica EFP. In particolare è così possibile identificare le forme entropiche associate a sistemi con diffusione anomala, ma descritti da una EFP non lineare.

Nel caso di un sistema isolato $\varphi = \text{costante} = \varphi_0$; dunque $U = \varphi_0 \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \varphi_0$, da cui $S = \beta(\varphi_0 - F)$ e dunque $\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta \frac{\partial F}{\partial t} \geq 0$.

Vediamo quindi come, imponendo la condizione (3.15), si ottengono diversi tipi di entropie a seconda della scelta dei funzionali $\Omega[u]$ e $\Psi[u]$ [25; 26].

- Sia $\Psi[u] = v[u]u$ e $\Omega[u] = v[u]D$, con D costante. Allora la relazione (3.15) diventa:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = -\beta \frac{D}{u} \Rightarrow g[u] = -\beta D u \ln u;$$

posto $\beta = \frac{k_B}{D}$, con k_B costante di Boltzmann, si ottiene che $S = -k_B \int u \ln u dx$, espressione dell'entropia classica di Boltzmann-Gibbs.

- Se invece poniamo $\Psi[u] = u$ e $\Omega[u] = qDu^{q-1}$, con D costante e $q \neq 1$, allora troviamo:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = -\beta \frac{qDu^{q-1}}{u} \Rightarrow g[u] = k \frac{u - u^q}{q - 1}.$$

Anche qui $k = \beta D$ ha le dimensioni di un'entropia. L'entropia trovata in questo caso è l'entropia di Tsallis, dipendente dal parametro q :

$$S = k \frac{1 - \int u^q dx}{q - 1}. \quad (3.17)$$

La teoria di Tsallis [31] prevede tre diversi vincoli che legano l'energia e la distribuzione di probabilità. Si distingue quindi tra tre possibili versioni, o scelte.

La prima scelta è quella di porre, se u_i è la probabilità ed ε_i l'energia associate allo stato i -esimo,

$$\sum_i u_i \varepsilon_i = \langle \varepsilon \rangle^{(1)},$$

che ricalca la forma standard dell'energia media. La distribuzione che se ne ricava è la seguente:

$$u_i^{(1)} = \frac{1}{Z^{(1)}} \left[1 - \beta^{(1)} \varepsilon_i (q - 1) \right]^{\frac{1}{q-1}}, \quad (3.18)$$

dove $Z^{(1)}$ è la costante di normalizzazione (oltre che funzione di partizione) e $\beta^{(1)}$ è una costante.

Una seconda scelta prevede

$$\sum_i u_i^q \varepsilon_i = \langle \varepsilon \rangle^{(2)},$$

che genera la seguente distribuzione all'equilibrio:

$$u_i^{(2)} = \frac{1}{Z^{(2)}} \left[1 - \beta^{(2)} \varepsilon_i (1 - q) \right]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (3.19)$$

con notazione analoga a quella precedente.

Infine, la terza scelta, che è la più usuale, è porre

$$\frac{\sum_i u_i^q \varepsilon_i}{\sum_i u_i^q} = \langle \varepsilon \rangle_q,$$

che all'equilibrio fornisce:

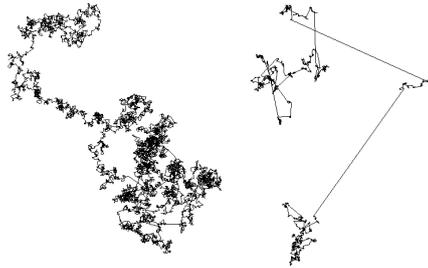
$$u_i = \frac{1}{Z_q} \left[1 - \frac{\beta(1-q)}{\sum_i u_i^q} (\varepsilon_i - \langle \varepsilon \rangle_q) \right]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (3.20)$$

Abbiamo dimostrato che l'entropia di Tsallis è una soluzione di stato stazionario di un'opportuna EFP. Viceversa, assumendo che l'entropia abbia proprio la forma (3.17), si deduce, ripercorrendo i passaggi precedenti, che anche per la statistica di Tsallis vale il teorema H .

In definitiva abbiamo ricavato il teorema H dalla EFP non lineare richiedendo una precisa relazione tra vari funzionali (la (3.15), oltre che altre proprietà necessarie per essere in presenza di funzioni di distribuzione di probabilità). Tale relazione consente, dato un sistema dalle proprietà inusuali ma di cui si conosce la EFP che ne descrive il comportamento, di estrarre l'espressione dell'entropia che gli è più consona.

3.2.3 Diffusione anomala ed entropia

Utilizzando l'argomento di Einstein abbiamo costruito per la (3.2) una soluzione di tipo gaussiano, ossia la relazione (3.3). In tale soluzione si nota che $\sigma^2 = 2Dt$, ovvero che è presente una dipendenza lineare tra il tempo e la varianza della distribuzione. Questo caso, detto di *diffusione normale*, non è l'unico che può verificarsi in natura, ma possono avvenire anche casi di *diffusione anomala*, in cui la distribuzione si "allarga" in modo non lineare in funzione del tempo. Nel caso della diffusione anomala si ha in generale $\sigma^2 \propto Dt^\alpha$, con D costante di diffusione e $\alpha > 1$ (superdiffusione) o $\alpha < 1$ (subdiffusione). La diffusione anomala, osservata in processi di turbolenza, trasporto di cariche in solidi anomali, dinamiche caotiche, vetri porosi [1], è governata evidentemente da una statistica diversa da quella di Gauss. Questo ha stimolato



Due processi di diffusione a confronto: a sinistra la diffusione normale, a destra la diffusione anomala.

un'intensa attività di ricerca e una vasta bibliografia è attualmente disponibile a riguardo [1; 16; 26; 32]. Di recente è stata utilizzata per spiegare effetti di diffusione anomala proprio la EFP *lineare* [1; 16] nella forma (3.5), scritta però nello spazio degli impulsi:

$$\frac{\partial w(p, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial p} [K(p)w(p, t)] + \frac{\partial}{\partial p} \left[D(p) \frac{\partial w(p, t)}{\partial p} \right], \quad (3.21)$$

con K e D che prendono egualmente il nome di coefficienti di deriva e di diffusione. La relazione, ricavata per il trasporto di atomi all'interno di un reticolo ottico, ha i coefficienti nella forma:

$$K(p) = -\frac{\alpha p}{1 + \left(\frac{p}{p_c}\right)^2}, \quad D(p) = D_0 + \frac{D_1}{1 + \left(\frac{p}{p_c}\right)^2},$$

dove α , p_c , D_0 , D_1 sono costanti legate al sistema. Si può vedere che i due coefficienti sono tali da soddisfare la seguente relazione:

$$\frac{K(p)}{D(p)} = \frac{d}{dp} \ln [1 - \beta(1 - q)\varepsilon]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (3.22)$$

dove $\beta = \frac{\alpha}{2(D_0 + D_1)}$, $\varepsilon(p) = p^2$ e $q = 1 + \frac{2D_0}{\alpha p_c^2}$, mentre $(a)_+ = \max\{0, a\}$. Dalla precedente si ottiene come soluzione stazionaria della EFP la distribuzione di Tsallis [1; 28]

$$w_q(p) = \frac{1}{Z} [1 - \beta(1 - q)\varepsilon]_+^{\frac{1}{1-q}}. \quad (3.23)$$

Un'alternativa, coerente con quanto visto nel sottoparagrafo 3.2.2, è quella di utilizzare una EFP *non lineare* [26]. Poiché vogliamo studiare il processo utilizzando l'entropia di Tsallis, poniamo $a(x) = x$ (ovvero richiediamo che la forza esterna dipenda linearmente da x , ipotesi tipica dei processi di Uhlenbeck-Ornstein), $\Psi[u] = u$ e $\Omega[u] = u^{q-1}$ (nella notazione utilizzata finora, si pone $D = \frac{1}{q}$). L'equazione (3.9) assume dunque la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [xu] + \frac{\partial}{\partial x} \left[u^{q-1} \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (3.24)$$

che ha in caso stazionario soluzione data da

$$u_{\text{st}}(x) = \frac{1}{Z} \left[1 - \frac{q-1}{2} Z^{q-1} x^2 \right]_+^{\frac{1}{q-1}}, \quad \text{per } 0 < q < 3, \quad (3.25)$$

dove Z è la costante di normalizzazione come al solito, la cui espressione è

$$Z = \begin{cases} \left[\frac{\sqrt{\frac{1-q}{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{2}\right)} \right]^{-\frac{2}{q-1}} & \text{se } 0 < q < 1, \\ \left[\frac{\sqrt{\frac{q-1}{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{q-1} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)} \right]^{-\frac{2}{q-1}} & \text{se } 1 < q < 3. \end{cases}$$

La distribuzione ottenuta non è altro che la distribuzione di Tsallis di parametro q . È notevole osservare che, come si può dimostrare [26; 31], per $q \rightarrow 1$ si ottiene la distribuzione gaussiana $u_{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Se si impone come condizione iniziale $u(x,0) = \delta(x)$ si ha, come soluzione dipendente dal tempo,

$$u(x,t) = \frac{1}{Z} \left(1 - e^{-(q+1)t}\right)^{-\frac{1}{q+1}} \left[1 - \frac{q-1}{2} Z^{q-1} \left(1 - e^{-(q+1)t}\right)^{-\frac{2}{q+1}} x^2\right]_+^{\frac{1}{q-1}}. \quad (3.26)$$

Da questa si ricava $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle \propto t^{\frac{2}{q+1}}$, per $q > \frac{1}{3}$ (per $q < \frac{1}{3}$ diverge) e $t \ll 1$ (osserviamo che per $q \rightarrow 1$, e quindi per una statistica di tipo Boltzmann-Gibbs, la dipendenza da t diventa lineare, come c'è da aspettarsi in caso di diffusione normale). Per tempi più lunghi il sistema tende al suo stato stazionario, quindi $\langle x^2 \rangle \rightarrow \langle x^2 \rangle_{st}$: la convergenza è di tipo esponenziale, quindi assai veloce.

Osserviamo, per inciso, che non necessariamente una EFP non lineare descrive un processo di diffusione anomala. Ad esempio, nel caso in cui l'equazione abbia la forma

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [xu^2(x,t)] + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

si osserva numericamente [26] una relazione del tipo $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle \propto t$ per $t \ll 1$.

3.3 SOLUZIONI ALGEBRICHE DI LIE DI EFP LINEARI

In questa sezione e nelle seguenti applicheremo le tecniche gruppali precedentemente descritte allo studio di soluzioni esatte della EFP. Consideriamo una EFP lineare della forma

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \{[a(t)x + b(t)]u(x,t)\} + c(t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \quad (3.27)$$

A differenza dei casi precedenti, l'equazione ha coefficienti dipendenti dal tempo, sebbene di una forma comunque particolare. Cerchiamo soluzioni del tipo $u(x,t) = U(t)u(x,0)$, in cui U svolge il ruolo di operatore di evoluzione. Sia ora $U(0) = 1$ e consideriamo la relazione operatoriale

$$\frac{dU(t)}{dt} = \left[-a(t) \frac{\partial}{\partial x} x - b(t) \frac{\partial}{\partial x} + c(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] U(t) = A(t)U(t). \quad (3.28)$$

La formulazione del problema ci permette di utilizzare un metodo di risoluzione di tipo algebrico, introdotto da Wei e Norman [34; 35] per risolvere equazioni come le precedenti. Infatti, consideriamo un'equazione del tipo

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \quad U(0) = 1.$$

Se $A(t)$ ha la forma

$$A(t) = \sum_{i=1}^M a_i(t) \mathbf{t}_i$$

con \mathbf{t}_i insieme di operatori temporali indipendenti e $a_i(t)$ insieme di funzioni scalari, e l'algebra di Lie con base $\{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_N\}$, $N \geq M$ è finito dimensionale, allora la soluzione all'equazione può essere rappresentata (almeno localmente) come

$$U(t) = e^{g_1 \mathbf{t}_1} e^{g_2 \mathbf{t}_2} \dots e^{g_N \mathbf{t}_N},$$

in cui le funzioni g_i possono essere determinate dal sistema di equazioni differenziali

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{11} & \dots & \zeta_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \zeta_{N1} & \dots & \zeta_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{g}_1 \\ \vdots \\ \dot{g}_N \end{pmatrix}$$

con condizioni iniziali $g_i(0) = 0$ per $i = 1, \dots, N$, mentre le ζ_{kl} sono funzioni analitiche delle g_i (si pone eventualmente $a_i(t) = 0$ per $i > M$ se $N > M$). Per applicare questo metodo alla EFP occorre che questa abbia un'algebra risolubile. Infatti considerando una base rispetto alla quale si possa scrivere

$$\{\mathbf{0}\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_{N-1} \subset \mathfrak{g}_N = \mathfrak{g}, \quad (3.29)$$

dove ogni ideale \mathfrak{g}_i ha dimensione i , allora si prova [35] che il sistema diventa:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \zeta_{12} & \zeta_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \zeta_{N1} & \dots & \dots & \dots & \zeta_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{g}_1 \\ \vdots \\ \dot{g}_N \end{pmatrix},$$

che è triangolare e inoltre l'elemento ζ_{kl} dipende solo da g_j , con $j < k$. Ciò permette di trovare le $g_i(t)$ per quadrature.

Nel nostro caso [38] l'algebra ha come base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x} x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\}$. Quest'algebra si può scrivere nella forma (3.29) come

$$\{\mathbf{0}\} \subset \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \subset \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x} \right\} \subset \left\{ \frac{\partial}{\partial x} x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\}.$$

Come si può verificare, dunque, in questo caso \mathfrak{g} è risolubile. L'espressione per U da cercare è dunque $U(t) = e^{\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x} x} e^{\beta(t) \frac{\partial}{\partial x}} e^{\gamma(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2}}$. Sostituendo nella (3.28) si ottiene il sistema

$$\begin{pmatrix} -a(t) \\ -b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha(t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\alpha(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{pmatrix}.$$

Da questo sistema si ricavano i coefficienti cercati. Dunque

$$u(x, t) = e^{\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x} x} e^{\beta(t) \frac{\partial}{\partial x}} e^{\gamma(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2}} u(x, 0).$$

Applicando i generatori si trova che

$$u(x, t) = \frac{e^{\alpha(t)}}{\sqrt{4\pi\gamma(t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, 0) e^{-\frac{[y - (xe^{\alpha(t)} + \beta(t))]^2}{4\gamma(t)}} dy.$$

3.4 SIMMETRIE DI LIE DI UNA EFP LINEARE

L'importanza della EFP in ambiti così diversi ha suggerito l'utilizzo delle tecniche sviluppate nei primi due capitoli per la ricerca delle simmetrie delle equazioni tipo EFP. All'equazione possono essere applicati dunque i metodi di Lie, ricercando trasformazioni continue che permettano di ottenere soluzioni da soluzioni; per questo seguiremo il procedimento di Cicogna e Vitali [7; 8], ripreso anche da Gaeta [10]. Ricerchiamo dunque simmetrie di Lie, generate da campi vettoriali della forma usuale:

$$\mathbf{v} = \zeta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (3.30)$$

Anzitutto, riscriviamo l'equazione (3.5) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \left(-\frac{\partial a(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b(x)}{\partial x^2} \right) u(x, t) + \left(\frac{\partial b(x)}{\partial x} - a(x) \right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{b(x)}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \\ &= A(x)u(x, t) + B(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + C(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

In seguito supporremo che tutte le funzioni in gioco siano di classe opportuna. In maniera del tutto analoga a quanto fatto nel capitolo precedente, ricaviamo le equazioni determinanti imponendo la validità del Teorema di Lie 1.7. Si ottiene dunque

$$\tau_x = \tau_u = 0 \Rightarrow \tau = \tau(t) \quad (3.32)$$

$$\zeta_u = 0 \Rightarrow \zeta = \zeta(x, t) \quad (3.33)$$

$$\varphi_{uu} = 0 \Rightarrow \varphi = \alpha(x, t) + \beta(x, t)u \quad (3.34)$$

È noto che $b(x) > 0$, come si è visto nel paragrafo 3.1.1, pertanto possiamo porre $b(x) = g^2(x)$. Valgono dunque le relazioni

$$\zeta_x = \zeta \frac{C_x}{2C} + \frac{\tau_t}{2} \Rightarrow \zeta = c(t)g + \frac{1}{2}\tau_t gG, \quad (3.35)$$

$$B_x \zeta + (\tau_t - \zeta_x)B + \zeta_t + (2\varphi_{xu} - \zeta_{xx})C = 0, \quad (3.36)$$

$$A_x \zeta u + u(\tau_t - \varphi_u)A + A\varphi + B\varphi_x + C\varphi_{xx} - \varphi_t = 0, \quad (3.37)$$

con $c(t)$ arbitraria funzione di t e $G \equiv G(x) = \int \frac{dx}{g(x)}$. Utilizzando l'espressione di φ fornita dalla (3.34) nella (3.37) si ha

$$A_x \zeta u + u A \tau_t - u \beta A + A \alpha + A u \beta + B \alpha_x + B u \beta_x + C \alpha_{xx} + C u \beta_{xx} - \alpha_t - u \beta_t = 0 \Rightarrow A \alpha + B \alpha_x + C \alpha_{xx} - \alpha_t = 0$$

ovvero $\alpha(x, t)$ deve essere soluzione della EFP.

Prima di procedere, facciamo alcune considerazioni sulle equazioni determinanti ottenute. Osserviamo che esse sono soddisfatte ponendo

$$\tau = k_1, \quad \beta = k_2, \quad \varphi = \alpha + k_2 u, \quad c = 0, \quad \zeta = 0,$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Pertanto i generatori infinitesimi che si ottengono da queste condizioni sono

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_2 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{v}_\alpha = \alpha \frac{\partial}{\partial u}.$$

Questi generatori saranno presenti nell'algebra di una EFP in ogni caso e sono associati a simmetrie immediatamente deducibili dell'equazione. Il generatore \mathbf{v}_1 suggerisce che, data u soluzione dell'equazione, anche $u + \varepsilon$ è soluzione dell'equazione. Dal generatore \mathbf{v}_2 si ha che, se u è soluzione, lo è anche εu , mentre la presenza del generatore \mathbf{v}_α comporta che, qualora u sia soluzione dell'equazione, lo è anche $u + \varepsilon \alpha$. In particolare, la linearità dell'equazione emerge proprio dagli ultimi due generatori (ricordiamo che α deve essere soluzione dell'equazione).

A questo punto adoperiamo l'espressione (3.34) nella (3.36) e nella (3.37):

$$2C\beta_x = B\zeta_x - B_x\zeta - \zeta_t - B\tau_t + C\zeta_{xx}, \quad (3.38)$$

$$\beta_t = A_x\zeta + B\beta_x + C\beta_{xx} + A\tau_t. \quad (3.39)$$

Esplicitando anche ζ mediante la (3.35) si ottiene

$$\beta_x = p_1 c + p_2 c_t + p_3 \tau_t + p_4 \tau_{tt} \quad p_i = p_i(x), \quad (3.40)$$

$$\beta_t = q_1 c + q_2 c_t + q_3 \tau_t + q_4 \tau_{tt} \quad q_i = q_i(x), \quad (3.41)$$

dove precisamente

$$p_1 = \frac{Bg_x}{g^2} - \frac{B_x}{g} + \frac{g_{xx}}{2}, \quad q_1 = Bp_1 + \frac{g^2 p_{1x}}{2} + A_x g,$$

$$p_2 = -\frac{1}{g}, \quad q_2 = Bp_2 + \frac{g^2 p_{2x}}{2},$$

$$p_3 = \frac{Bg_x G}{2g^2} - \frac{B}{2g^2} - \frac{B_x G}{2g} + \frac{g_{xx} G}{4} + \frac{g_x}{4g}, \quad q_3 = Bp_3 + \frac{g^2 p_{3x}}{2} + \frac{A_x g G}{2} + A,$$

$$p_4 = -\frac{G}{2g}, \quad q_4 = Bp_4 + \frac{g^2 p_{4x}}{2}.$$

Supponendo che β sia tale da soddisfare le ipotesi del teorema di Schwarz, richiediamo che $\beta_{tx} = \beta_{xt}$. Dalle equazioni (3.40) e (3.41) si ha, dopo opportuni calcoli, l'equazione

$$c_{tt} + gq_{1x}c = -\left(\frac{1}{2}G\tau_{ttt} + gq_{3x}\tau_t\right). \quad (3.42)$$

Effettuando una mera operazione di riscrittura [8], la condizione precedente diventa:

$$c_{tt} + M_x c = -\frac{x\tau_{tt} + xM_x\tau_t + 3M_{tt}}{2g}, \quad (3.43)$$

dove abbiamo definito

$$M = -\frac{(a^2 + g^2 a_x)_x}{2}.$$

Nei calcoli successivi porremo $g = \text{costante} \neq 0$. Questa assunzione non comporta una perdita in generalità, poiché si prova che, mediante un opportuno cambio di coordinate, è sempre possibile riscrivere la (3.5) in modo da ricadere in questo caso [7].

Per trovare simmetrie non banali, distinguiamo due casi:

1. $M_{xx} = 0$, ovvero $a^2 + g^2 a_x = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$. Differenziando la (3.43) si ottengono le relazioni:

$$\begin{aligned} \tau_{ttt} - 4\beta_2 \tau_t &= 0, \\ c_{tt} - \beta_2 c &= \frac{3\beta_1}{4g} \tau_t. \end{aligned} \quad (3.44)$$

In questo caso si vede che i generatori infinitesimi cercati sono quelli riportati in tabella 3 (nell'ipotesi $\beta_2 \neq 0$). Se invece $\beta_2 = 0$ i generatori possono essere trovati dalle relazioni (3.35), (3.40), (3.41) e (3.44).

2. $M_{xx} \neq 0$. Supponiamo che esistano due costanti λ, λ_0 tali che sia soddisfatta l'equazione

$$(M_x + \lambda)(x + \lambda_0) + 3M = 0. \quad (3.45)$$

Se soddisfatta, la precedente deve essere necessariamente compatibile con la (3.43). Imponendo questa compatibilità si ricavano le relazioni

$$\tau_{ttt} - \lambda \tau_t = 0, \quad c = \frac{\lambda_0}{2g} \tau_t.$$

La precedente permette di riscrivere la condizione (3.45) nella forma

$$a^2 + g^2 a_x = \frac{\lambda}{4}(x + \lambda_0)^2 + \frac{\lambda_1}{(x + \lambda_0)^2} + \lambda_2, \quad (3.46)$$

dove λ_1, λ_2 sono costanti. Tale relazione può essere utile per identificare questo particolare sottocaso, valutando se, assegnata l'equazione (3.5), il coefficiente $a(x)$ soddisfa la (3.46) per una qualche coppia di costanti. In tabella 3 sono riportati i risultati ottenuti a seconda che la (3.46) sia soddisfatta o meno.

Generatori sempre presenti	$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{v}_2 &= u \frac{\partial}{\partial u} \\ \mathbf{v}_\alpha &= \alpha \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$
$M_{xx} = 0$	$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \frac{e^{2\sqrt{\beta_2}t}}{2\sqrt{\beta_2}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(x + \frac{\beta_1}{2\beta_2} \right) e^{2\sqrt{\beta_2}t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e^{2\sqrt{\beta_2}t}}{2g^2} \left[a \left(x + \frac{\beta_1}{2\beta_2} \right) - \sqrt{\beta_2}x^2 - \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_2}}x - \frac{\beta_0}{2\sqrt{\beta_2}} - \frac{\beta_1^2}{8\beta_2\sqrt{\beta_2}} - \frac{g^2}{2} \right] u \frac{\partial}{\partial u} \\ \mathbf{v}_4 &= -\frac{e^{-2\sqrt{\beta_2}t}}{2\sqrt{\beta_2}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(x + \frac{\beta_1}{2\beta_2} \right) e^{-2\sqrt{\beta_2}t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e^{-2\sqrt{\beta_2}t}}{2g^2} \left[a \left(x + \frac{\beta_1}{2\beta_2} \right) - \sqrt{\beta_2}x^2 - \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_2}}x - \frac{\beta_0}{2\sqrt{\beta_2}} - \frac{\beta_1^2}{8\beta_2\sqrt{\beta_2}} - \frac{g^2}{2} \right] u \frac{\partial}{\partial u} \\ \mathbf{v}_5 &= ge^{\sqrt{\beta_2}t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e^{\sqrt{\beta_2}t}}{g} \left[a - \sqrt{\beta_2} \left(\frac{\beta_1}{2\beta_2} + x \right) \right] u \frac{\partial}{\partial u} \\ \mathbf{v}_6 &= ge^{-\sqrt{\beta_2}t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e^{-\sqrt{\beta_2}t}}{g} \left[a + \sqrt{\beta_2} \left(\frac{\beta_1}{2\beta_2} + x \right) \right] u \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$
$M_{xx} \neq 0$	$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \frac{e^{\sqrt{\lambda}t}}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (x + \lambda_0) e^{\sqrt{\lambda}t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}t}}{2g^2} \left(a(x + \lambda_0) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} (x + \lambda_0)^2 + \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda}} - \frac{g^2}{2} \right) u \frac{\partial}{\partial u} \\ \mathbf{v}_4 &= -\frac{e^{-\sqrt{\lambda}t}}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (x + \lambda_0) e^{-\sqrt{\lambda}t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e^{-\sqrt{\lambda}t}}{2g^2} \left(a(x + \lambda_0) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} (x + \lambda_0)^2 + \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda}} - \frac{g^2}{2} \right) u \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$
La (3.46) è soddisfatta	Si ha il solo caso $\tau_t = c = 0$, che non ammette simmetrie non banali.
La (3.46) non è soddisfatta	Si ha il solo caso $\tau_t = c = 0$, che non ammette simmetrie non banali.

Tabella 3: Generatori infinitesimi del gruppo di simmetria della EFP lineare [7; 8]. Come si vede, l'algebra può avere solo dimensione 2, 4 o 6.

I generatori appena calcolati permettono di ottenere le trasformazioni gruppali che mappano soluzioni in soluzioni. In alcuni casi la EFP è riconducibile ad equazioni di cui sono note soluzioni esatte, come ad esempio l'equazione del calore ($u_t = u_{xx}$, si veda [29]). Applicando le trasformazioni gruppali a tali soluzioni se ne possono ottenere di nuove non banali.

I coefficienti $A(x), B(x), C(x)$ sono, come si è visto, cruciali per quanto riguarda la natura delle simmetrie di cui è dotata l'equazione e, ovviamente, per ciò che concerne il suo significato fisico di volta in volta. Finora si è fatta l'ipotesi implicita di analiticità dei coefficienti. Un caso particolare, in cui i coefficienti hanno forma logaritmica, in modo da tener conto di fenomeni di diffusione e deriva, è trattato in [30].

3.4.1 Sottoalgebre dell'algebra di Lie della EFP

I risultati presentati finora sono a carattere generale (nell'ottenerli non sono stati precisati i coefficienti $A(x), B(x), C(x)$). Come abbiamo visto sopra, l'algebra di Lie corrispondente al gruppo di simmetria di una EFP può avere due, quattro o sei dimensioni, ma Bluman [4] ha dimostrato che tutte le EFP con gruppo di Lie di dimensione 6 appartengono ad una stessa classe di equivalenza: in particolare, ogni EFP di questo tipo può essere riscritta nella forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.47)$$

che è l'equazione del calore. Questa equazione è già stata trattata nel paragrafo 2.3. Le sottoalgebre dell'algebra a 6 dimensioni della EFP sono perciò essenzialmente quelle dell'equazione del calore. Qualora invece l'algebra abbia dimensione 4, non sono noti risultati analoghi e la classificazione deve essere effettuata, caso per caso, in funzione dei coefficienti $A(x), B(x), C(x)$. Se invece l'algebra è di dimensione 2, le sottoalgebre di dimensione 1 sono date semplicemente da $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2, c \in \mathbb{R}$.

3.5 SIMMETRIE NON LOCALI

Lo studio delle proprietà di simmetria della EFP può essere esteso anche al caso di simmetrie di tipo non locale, ovvero simmetrie che manifestano una dipendenza da variabili non locali, come possono essere ad esempio integrali di campi o campi definiti implicitamente come soluzioni di equazioni ausiliarie.

Un caso particolare di simmetrie non locali sono le cosiddette *simmetrie potenziali*: queste furono introdotte da Bluman et al. nel 1988 (per una trattazione vedasi [5]). Diamo comunque una breve introduzione, nei limiti degli interessi di questa trattazione.

Consideriamo un'equazione alle derivate parziali del tipo

$$\Delta(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}) = 0, \quad (3.48)$$

con x, t variabili dipendenti e u variabile indipendente. Supponiamo che la precedente possa scriversi nel modo seguente:

$$D_x F(x, t, u, u_x, u_t) - D_t G(x, t, u, u_x, u_t) = 0, \quad (3.49)$$

dove con D abbiamo indicato come solito l'operatore derivata totale. Allora possiamo introdurre un *potenziale ausiliario* $v = v(x, t)$ tale che

$$v_t = F(x, t, u, u_x, u_t), \quad v_x = G(x, t, u, u_x, u_t), \quad (3.50)$$

che è una condizione equivalente alla (3.49). A questo punto calcoliamo le simmetrie locali di Lie classiche introducendo il generatore infinitesimo

$$\mathbf{v} = \zeta(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \varphi(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial v}, \quad (3.51)$$

che ha prolungamento

$$\text{pr}^{(1)} \mathbf{v} = \mathbf{v} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial v_x} + \varphi^t \frac{\partial}{\partial v_t}, \quad (3.52)$$

dove i nuovi coefficienti sono dati dalla formula generale del prolungamento (1.9). Si utilizza poi una relazione equivalente a quella fornita dal teorema di Lie, ovvero:

$$\text{pr}^{(1)} \mathbf{v} \Delta_S \Big|_{\Delta_S=0} = 0 \quad (3.53)$$

dove con Δ_S abbiamo indicato il sistema di equazioni ausiliario (3.50). Questa relazione permette di trovare simmetrie diverse, dette appunto potenziali, che in generale non emergono dall'analisi delle simmetrie di Lie puntuali. L'utilizzo delle simmetrie potenziali, unito a quello delle simmetrie generalizzate (o di Lie-Bäcklund, non analizzate nel presente lavoro), permette di ricavare le eventuali leggi di conservazione presenti nella EFP [18].

3.5.1 Simmetrie potenziali nella EFP unidimensionale

Affrontiamo ora il problema dello studio delle simmetrie potenziali nella EFP unidimensionale. Come mostrato molto brevemente nel paragrafo precedente, l'introduzione del potenziale ausiliario v permette di cercare i generatori \mathbf{v} seguendo la stessa procedura che si è soliti utilizzare nel caso delle simmetrie puntuali. Supponiamo anzitutto che l'equazione (3.5) possa essere scritta nella forma (3.49); questo può essere fatto scrivendo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [p(x)u_x + q(x)u], \quad (3.54)$$

dove $a(x) = \frac{\partial p(x)}{\partial x} - q(x)$, $b(x) = 2p(x)$, da cui $v_x = u$, $v_t = pu_x + qu$. Il generico generatore di simmetria, una volta prolungato, assume la forma:

$$\text{pr}^{(1)} \mathbf{v} = \zeta \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \varphi \frac{\partial}{\partial v} + \eta^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial v_x} + \varphi^t \frac{\partial}{\partial v_t},$$

dove $\eta^x, \eta^t, \varphi^x, \varphi^t$ si ottengono utilizzando la solita formula di prolungamento.

A questo punto l'algoritmo da utilizzare è identico a quello delle simmetrie di Lie puntuali; come però già sottolineato, l'espedito dell'introduzione del potenziale ausiliario è tale da rendere tali simmetrie non locali, e quindi capaci di fornirci gruppi di trasformazioni più generali rispetto a quelli forniti dall'approccio standard delle simmetrie di Lie puntuali. La complessità dei calcoli dipende dall'espressione di $p(x)$ e $q(x)$. A titolo di esempio, per $p(x) = a = \text{costante}$ e $q(x) = x$ si ottiene [15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= -(a+1)xe^{2t}\frac{\partial}{\partial x} - (a+1)e^{2t}\frac{\partial}{\partial t} + [4xv + 2x^2u + (3a+1)u]e^{2t}\frac{\partial}{\partial u} \\ &\quad + 2(x^2+a)ve^{2t}\frac{\partial}{\partial v}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{a+1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - (xu+v)e^t\frac{\partial}{\partial u} - xve^t\frac{\partial}{\partial v}, \\ \mathbf{v}_3 &= e^{-t}\frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{v}_4 &= -xe^{-2t}\frac{\partial}{\partial x} + e^{-2t}\frac{\partial}{\partial t} + ue^{-2t}\frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_5 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{v}_6 &= u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Si osservi che le ultime due relazioni riguardano l'invarianza per traslazioni temporali e la linearità dell'equazione rispetto a u e rispetto a v .

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. ABE, *Dilatation symmetry of the Fokker-Planck equation and anomalous diffusion*, Physical Review E **69**, 016102 (2007). (Citato alle pagine [33](#) e [34](#).)
- [2] L. BACHELIER, *Théorie de la speculation*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **17**, 21-86. (Citato a pagina [25](#).)
- [3] A. BARACCA, *Manuale critico di meccanica statistica*, CULC, 1980, Catania. (Citato a pagina [27](#).)
- [4] G.W. BLUMAN, *On the transformation of diffusion processes into the Wiener process*, SIAM J. Appl. Math., **39**, 238-247 (1980). (Citato a pagina [41](#).)
- [5] G.W. BLUMAN, S. KUMEI, *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, 1989, New York. (Citato alle pagine [1](#) e [41](#).)
- [6] H.J. CARMICHAEL, *Statistical Methods in Quantum Optics: Master equations and Fokker-Planck equations*, Springer (1999).
- [7] G. CICOGNA, D. VITALI, *Generalised symmetries of Fokker-Planck-type equations*, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, L453-L456 (1989). (Citato alle pagine [37](#), [39](#) e [40](#).)
- [8] G. CICOGNA, D. VITALI, *Classification of the extended symmetries of Fokker-Planck equations*, J. Phys. A: Math. Gen. **23**, L85-L88 (1990). (Citato alle pagine [37](#), [39](#) e [40](#).)
- [9] E.M.F. CURADO, F.D. NOBRE, *Derivation of Fokker-Planck equations by means of approximations to the master equation*, Physical Review E **67**, 021107 (2003). (Citato a pagina [29](#).)
- [10] G. GAETA, *Nonlinear Symmetries and Nonlinear Equations*, Kluwer Academic Publisher (1994). (Citato alle pagine [8](#) e [37](#).)
- [11] E.B. DYNKIN, *Kolmogorov and the theory of Markov processes*, The Annals of Probability **17**(3), 822-832 (1989). (Citato a pagina [26](#).)
- [12] A. EINSTEIN, *Investigations on the Theory of Brownian Movement*, Dover publications, 1956, New York (ristampa tradotta in inglese dell'originale *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, Annalen der Physik **17**, 549-560). (Citato a pagina [25](#).)
- [13] C. HO, R. SASAKI, *Quasi-exactly solvable Fokker-Planck equations*, J. Math Phys. **44**, 2704-2722 (2006) (Citato a pagina [28](#).)
- [14] N.H. IBRAGIMOV, *Transformation groups applied to mathematical physics*, Reidel, 1985, Boston. (Citato a pagina [1](#).)
- [15] A.H. KHATER, M.H.M. MOUSSA, S.F. ABDUL-AZIZ, *Potential symmetries and invariant solutions for the generalized one-dimensional Fokker-Planck equation*, Physica A **304**, 395-408 (2002). (Citato a pagina [43](#).)
- [16] E. LUTZ, *Anomalous diffusion and Tsallis statistics in an optical lattice*, Phys. Rev. A **67**, 051402 (2003). (Citato a pagina [34](#).)
- [17] L. MARTINA, P. WINTERNITZ, *Partially invariant solutions of nonlinear Klein-Gordon and Laplace equations*, J. Math Phys. **33**, 2718-2727 (2006). (Citato a pagina [14](#).)

Bibliografia

- [18] J. MEI, H. ZHANG, *Potential Symmetries and Associated Conservation Laws to Fokker-Planck and Burgers Equation*, International Journal of Theoretical Physics **11**, 2095-2102 (2006). (Citato a pagina [42](#).)
- [19] P.J. OLVER, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, 2000, New York. (Citato alle pagine [1](#), [3](#), [12](#), [18](#), [19](#) e [21](#).)
- [20] L.V. OVSIANNIKOV, *Group properties of differential equations*, Novosibirsk, 1962, Mosca. (Citato alle pagine [1](#), [16](#) e [21](#).)
- [21] A.G. PEETERS, D. STRINTZI, *The Fokker-Planck equation, and its application in plasma physics*, Ann. Phys. **17**(2-3), 142-157 (2008). (Citato a pagina [26](#).)
- [22] E. PUCCI, G. SACCOMANDI, *Potential symmetries and solutions by reduction of partial differential equations*, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 681-690 (1993).
- [23] C.C.A. SASTRI, K.A. DUNN, *Lie symmetries of some equations of the Fokker-Planck type*, J. Math Phys. **26**(12), 3042-3047 (1985).
- [24] V. SCHWÄMMLE, E.M.F. CURADO, F.D. NOBRE, *A general nonlinear Fokker-Planck equation and its associated entropy*, Eur. Phys. J. B **58**, 159-165 (2007). (Citato alle pagine [30](#) e [31](#).)
- [25] V. SCHWÄMMLE, E.M.F. CURADO, F.D. NOBRE, *Consequences of the H theorem from nonlinear Fokker-Planck equations*, Phys. Rev. E **76**, 041123 (2007). (Citato alle pagine [29](#), [30](#) e [32](#).)
- [26] V. SCHWÄMMLE, E.M.F. CURADO, F.D. NOBRE, *Dynamics of normal and anomalous diffusion in nonlinear Fokker-Planck equations*, Eur. Phys. J. B DOI: 10.1140/epjb/e2009-00172-9 (2009). (Citato alle pagine [32](#), [34](#) e [35](#).)
- [27] M. SHIINO, *H-Theorem with Generalized Relative Entropies and the Tsallis Statistics*, J. Phys. Soc. of Japan **67**, 3658-3660 (1998).
- [28] M. SHIINO, *Free energies based on generalized entropies and H-theorems for nonlinear Fokker-Planck equations*, J. Math Phys. **42**, 2540-2553 (2001). (Citato a pagina [34](#).)
- [29] W.M. SHTELEN, V. I. STOGNY, *Symmetry properties of one-two-dimensional Fokker-Planck equations*, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, L539-L543 (1989). (Citato alle pagine [28](#) e [41](#).)
- [30] É.M. SILVA, T.M. ROCHA FILHO, A.E. SANTANA, *Lie Symmetries of Fokker-Planck Equations with Logarithmic Diffusion and Drift Times*, Journal of Physics: Conference Series **40** 150-155 (2006). (Citato a pagina [41](#).)
- [31] C. TSALLIS, *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988). (Citato alle pagine [29](#), [32](#) e [35](#).)
- [32] C. TSALLIS, D.J. BUKMAN, *Anomalous diffusion in the presence of external forces: exact time-dependent solutions and their thermostatical basis*, Physical Review B **54**, R2197-R2200 (1996). (Citato a pagina [34](#).)
- [33] C. TSALLIS, E. BRIGATTI, *Nonextensive statistical mechanics: a brief introduction*, arXiv:cond-mat/0305606v1 [cond-mat.stat-mech] (2003). (Citato a pagina [30](#).)
- [34] J. WEI, E. NORMAN, *Lie algebraic solution of linear differential equations*, J. Math Phys. **4**, 575 (1963). (Citato a pagina [35](#).)
- [35] J. WEI, E. NORMAN, *On the global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials*, Proc. Am. Math. Soc. **15**, 327 (1963). (Citato alle pagine [35](#) e [36](#).)

Bibliografia

- [36] P. WINTERNITZ, *Lie groups and solutions of nonlinear partial differential equations*, in *Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theories*, edito da L. A. Ibort e M. A. Rodríguez, pagg. 429-495, Kluwer Academic Publishers, 1993, Netherlands. (Citato alle pagine [14](#) e [21](#).)
- [37] P. WINTERNITZ, *Lie groups, singularities and solutions of nonlinear partial differential equations*, Lect. Notes Phys. **632**, 223-273 (2003).
- [38] F. WOLF, *Lie algebraic solution of linear Fokker-Planck equations*, J. Math Phys. **29**(2), 305-307 (1988). (Citato a pagina [36](#).)