

UNIVERSITÀ DEL SALENTO

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Fisica

VORTICI IN FLUIDI QUANTISTICI

Tesi di Laurea Triennale

Relatore:
PROF. LUIGI MARTINA

Candidato:
MARCO SCIGLIUZZO

Sessione autunnale
Anno Accademico 2008/2009

Indice

1	Vortici in fluidi classici	1
1.1	Equazioni del moto	1
1.2	Equazione di continuità	4
1.3	Vorticità	5
1.4	Vortici	7
1.5	Vortice di Rankine	8
1.6	Moto dei vortici in un fluido non viscoso	11
1.7	Vortici e viscosità	14
2	Transizioni di fase e difetti topologici	15
2.1	Transizioni del 2° ordine	15
2.2	Densità di energia di Ginzburg-Landau	17
2.3	Funzione di correlazione	22
2.4	Difetti topologici	24
2.5	L'equazione di Gross-Pitaevskii	27
3	Vortici nell'elio superfluido	31
3.1	Soluzione particolare dell'equazione di Gross-Pitaevskii	32
3.2	Reticoli di vortici	34
3.3	Moto dei vortici in un superfluido	36
A	Algoritmo di simulazione	39
B	Hamiltoniana in un sistema non inerziale	45

Prefazione

Fin da bambini si rimane affascinati dai vortici, sia che si presentino sotto forma di piccoli gorgi nel lavandino, o di grandi trombe d'aria, o ancora di anelli di fumo fatti da un esperto fumatore.

Altrettanto affascinante è il loro studio, in special modo la comprensione della loro natura e delle leggi che ne descrivono il comportamento.

In questo lavoro si cerca di ottenere e di studiare alcune di queste leggi. Nella prima parte ci si concentra sui vortici in fluidi classici, ricavando le equazioni che ne descrivono il moto, in assenza di viscosità e in presenza di assi-simmetria. Successivamente, poichè sono stati osservati vortici nell'elio liquido superfluido, delineamo le principali caratteristiche della teoria macroscopica di Landau per le transizioni di fase del 2° ordine. Questa teoria introduce una generalizzazione del concetto di vortice, mediante la nozione di difetto topologico, applicabile a qualsiasi sistema che presenti una transizione di fase del 2° ordine. Nel caso dell'elio II, si giunge alla descrizione macroscopica dello stato superfluido tramite l'equazione di Gross-Pitaevskii. Essa prevede l'esistenza di vortici quantizzati, ma i moti dei loro nuclei sono descritti dal sistema di Kirchoff-Onsager, come nel caso dei fluidi classici, purchè siano posti a distanza sufficientemente grande. Di questo sistema daremo alcune soluzioni numeriche in diverse situazioni.

Capitolo 1

Vortici in fluidi classici

I vortici nei fluidi classici sono stati un campo di indagine estremamente ampio e di grande interesse anche da un punto di vista applicativo [Lam32]. Nella presente trattazione ne discuteremo alcuni aspetti principali, al fine di acquisire i concetti di base che li riguardano. In un fluido classico reale la loro origine è strettamente legata alla viscosità, ma per semplificarne lo studio si può assumere che da un certo istante in poi questi effetti siano trascurabili rispetto alle caratteristiche complessive del moto. In queste condizioni poco realistiche si finisce con lo studiare, in effetti, un fluido ideale (si ricordi la locuzione “acqua asciutta” [FLS07]), che sembra essere solo un modello costruito ad hoc. Tuttavia si possono ottenere significative informazioni su questi moti nel limite di piccoli numeri di Reynolds e per brevi intervalli di tempo. Inoltre alcune delle equazioni così ottenute si ritrovano nel contesto dei fluidi quantistici.

1.1 Equazioni del moto

Con fluido classico si intende una sostanza continua, omogenea ed isotropa che non si può trovare in uno stato di equilibrio se sottoposta ad uno sforzo di taglio. La sua descrizione avviene tramite determinate grandezze fisiche, che non tengono conto direttamente delle caratteristiche microscopiche del fluido, ma tramite delle medie di grandezze fisiche macroscopiche su porzioni di dimensioni molto maggiori di quelle molecolari, ma molto più piccole delle scale di interesse, tali da poter associare ad ogni punto dello spazio occupato dal fluido il valore di tale grandezza. Queste grandezze sono per esempio la velocità del fluido, la sua pressione, la temperatura, la densità di massa o di carica.

Le equazioni del moto di un fluido si ricavano dalla seconda legge di Newton. Sia $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ la velocità del fluido, $\rho = \rho(x, y, z, t)$ la sua densità di massa; la quantità di moto per unità di volume è data da $\vec{J} = \rho\vec{v}$ ed è detta densità di corrente. Se si denota con $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z, t)$ la forza per unità di volume, la seconda legge della dinamica si esprime come

$$\frac{d}{dt}\rho\vec{v} = \vec{f},$$

che è possibile mettere nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\rho\vec{v} = \vec{f}. \quad (1.1)$$

Il membro di sinistra è il tasso di variazione della densità di quantità di moto nel tempo a cui è soggetto un elementino del fluido ed è composta da due parti: la prima è dovuta alla variazione di velocità nel tempo in un punto fissato dello spazio, e la seconda alla variazione di velocità nel passaggio da un punto all'altro dello spazio.

La forze che agiscono su un fluido possono essere dovute a campi esterni, come un campo gravitazionale o elettrico, a corpi immersi nel fluido, o possono essere generate da elementi del fluido stesso. Quest'ultime sono dovute o a sforzi longitudinali o di taglio. Come si vedrà gli sforzi longitudinali sono descritti dalla pressione, mentre quelli di taglio sono dovuti ad attriti viscosi prodotti dallo scorrimento relativo di parti di fluido.

La forza peso per unità di volume che agisce su un fluido è data da

$$\vec{f} = \rho \vec{g}.$$

Ponendo $\phi = gz + cost$, dove l'asse z è diretto antiparallelamente a \vec{g} , è possibile esprimere la forza gravitazionale (o qualunque altra forza che si possa far derivare da un potenziale) come

$$\vec{f} = -\rho \nabla \phi. \quad (1.2)$$

Sia $\vec{P} = \vec{P}(x, y, z, t)$ la pressione del fluido. Si consideri un parallelepipedo con un vertice nel punto (x, y, z) e con lati di lunghezza Δx , Δy e Δz e disposti parallelamente agli omonimi assi (vedi figura 1.1). La pressione produce sulla

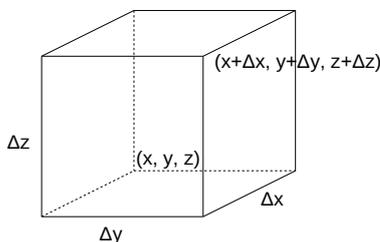


Figura 1.1: *Elemento di fluido*

faccia inferiore una forza pari a

$$\vec{F}_{z,inf} = P \Delta x \Delta y \hat{z},$$

e se il lato è sufficientemente piccolo rispetto alla scala con cui varia la pressione, sulla faccia superiore

$$\vec{F}_{z,sup} = -(P + \frac{\partial P}{\partial z} \Delta z) \Delta x \Delta y \hat{z}.$$

La forza totale lungo la direzione dell'asse z è

$$\vec{F}_z = \vec{F}_{z,sup} + \vec{F}_{z,inf} = -\frac{\partial P}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \hat{z}.$$

Ripetendo il medesimo ragionamento per le altre direzioni si ottiene:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial P}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

La forza per unità di volume prodotta dalla pressione è quindi

$$\vec{f} = -\nabla P. \quad (1.3)$$

Si consideri un fluido contenuto tra due piani paralleli distanti d . Si supponga che il piano superiore sia mantenuto ad una velocità costante \vec{v}_0 parallela al piano stesso. Sperimentalmente risulta che per mantenere questa velocità è necessario applicare al piano una forza proporzionale alla sua area A , alla velocità v_0 e inversamente proporzionale alla distanza d , cioè

$$F = \eta A \frac{v_0}{d}.$$

Il fattore di proporzionalità η dipende dal fluido ed è detto coefficiente di viscosità. Più in generale si può considerare un parallelepipedo in un fluido in movimento, come rappresentato in figura 1.2. Lo sforzo di taglio che agisce

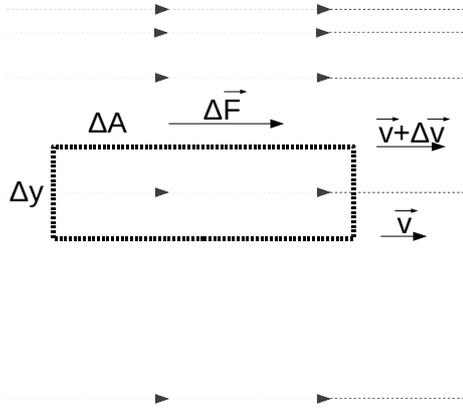


Figura 1.2: *Fluido in movimento che presenta sforzi di taglio*

su di esso, e che descrive la rapidità con cui varia la velocità della direzione ortogonale ad essa, è dato da

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta y} \rightarrow \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

In generale è possibile scrivere il tensore degli sforzi simmetrico come

$$S_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \delta_{ij} (\nabla \cdot \vec{v}),$$

da cui si ottiene

$$f_i = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = \eta \nabla^2 v_i + (\eta + \eta') \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{v}), \quad (1.4)$$

dove η' è chiamata secondo coefficiente di viscosità e descrive il comportamento viscoso durante una compressione o espansione (causati da sforzi longitudinali). Sommando i vari contributi alle densità di forza l'equazione del moto è quindi

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho \vec{v} = -\nabla P - \rho \nabla \phi + \eta \nabla^2 \vec{v} + (\eta + \eta') \nabla (\nabla \cdot \vec{v}), \quad (1.5)$$

detta equazione di Navier-Stokes.

1.2 Equazione di continuità

Si consideri una regione tridimensionale R di fluido; il flusso di materia attraverso la superficie ∂R è uguale alla variazione di materia al suo interno

$$\int_{\partial R} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_R \rho dV,$$

dove il segno negativo è presente perchè il flusso assume valori positivi quando è uscente, cioè ad una diminuzione di materia. Se è applicabile il teorema di derivazione sotto il segno di integrale la precedente relazione diventa

$$\int_{\partial R} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \int_R \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Se inoltre ci si trova nelle ipotesi del teorema della divergenza¹ si ha

$$\int_R \nabla \cdot \rho \vec{v} dV = - \int_R \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

che si può scrivere

$$\int_R \nabla \cdot \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0.$$

Poichè questo integrale vale zero qualsiasi sia il dominio di integrazione, la funzione integranda deve essere zero, cioè

$$\nabla \cdot \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.6)$$

che è detta equazione di continuità. La sua validità è estesa a tutto il fluido.

Per ottenere un'equazione che descriva il comportamento del fluido al bordo è lecito supporre che la velocità non abbia una componente perpendicolare alla superficie. In generale anche la superficie può muoversi, quindi la componente normale ν della velocità del fluido deve essere uguale alla velocità della superficie in quella stessa direzione. Detto $\hat{\nu}$ il versore normale alla superficie, la componente della velocità cercata è

$$\nu = \vec{v} \cdot \hat{\nu}. \quad (1.7)$$

Si supponga che il fluido sia contenuto in un recipiente, la cui superficie sia descritta da $F(x, y, z, t) = 0$. Essendo

$$\hat{\nu} = (l, m, n) = \frac{\nabla F}{|\nabla F|},$$

sostituendo nella (1.7) si ottiene

$$\nu = \vec{v} \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|}.$$

¹La superficie deve essere la frontiera di un dominio regolare R e la funzione integranda $f \in C^1(R)$. In queste ipotesi è valido anche il teorema di integrazione sotto il segno di integrale.

L'equazione della superficie dopo un tempo dt diventa

$$F(x + lvdt, y + mvdt, z + nvdt, t + dt) = 0.$$

Sviluppando il membro di sinistra si ottiene

$$F(x, y, z, t) + \nu \left(l \frac{\partial F}{\partial x} + m \frac{\partial F}{\partial y} + n \frac{\partial F}{\partial z} \right) dt + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \dots = 0,$$

che approssimando al primo ordine diventa

$$\nu \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \cdot \nabla F + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

Sostituendo ν

$$(\vec{v} \cdot \nabla)F + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (1.8)$$

L'equazione della superficie è nota, quindi quest'ultima equazione rappresenta una condizione per \vec{v} .

1.3 Vorticità

Il caso più semplice da trattare è quello di un fluido incomprimibile e non viscoso. La condizione di incomprimibilità è

$$\rho = cost, \quad (1.9)$$

sia nello spazio che nel tempo. Dall'equazione di continuità (1.6) segue²

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

La condizione di non viscosità equivale a porre

$$\eta = \eta' = 0. \quad (1.10)$$

Con queste condizioni l'equazione di Navier-Stokes (1.5) diventa l'equazione di Eulero

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi, \quad (1.11)$$

che si può mettere anche nella forma

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi. \quad (1.12)$$

Se $\nabla \times \vec{v} = 0$, è possibile scrivere

$$\vec{v} = \nabla \theta$$

²Questa condizione non è equivalente alla condizione di incomprimibilità. L'equazione di continuità, esprimibile anche come

$$\vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

evidenzia che un flusso non divergente non esclude la possibilità di un fluido comprimibile.

dove θ è detta potenziale velocità. In queste ipotesi l'equazione (1.12) diventa

$$\nabla \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \theta \cdot \nabla \theta + \frac{P}{\rho} + \phi \right) = 0;$$

che si può anche mettere nella forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \theta \cdot \nabla \theta + \frac{P}{\rho} + \phi = \text{costante.} \quad (1.13)$$

Se si definisce il campo vettoriale di vorticità

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}, \quad (1.14)$$

l'equazione (1.12) si può scrivere come

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi.$$

Effettuando il rotore di entrambi i membri si ottiene

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0.$$

In conclusione le equazioni che descrivono completamente la velocità di un fluido incomprimibile e non viscoso sono

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} \\ \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) + \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Una curva che in ogni punto è tangente alla vorticità $\vec{\Omega}$ è detta linea vorticoso. Una superficie formata da linee vorticoso è detta tubo di flusso per $\vec{\Omega}$. Supponendo che il campo delle velocità sia di classe C^2 nello spazio racchiuso da una superficie chiusa S_{chiusa} , la divergenza della seconda equazione di 1.15 risulta essere

$$\nabla \cdot \vec{\Omega} = 0.$$

Quindi per il teorema della divergenza il flusso di $\vec{\Omega}$ attraverso la superficie S_{chiusa} è nullo, cioè

$$\int_{S_{chiusa}} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Si prenda ora in esame la superficie S_C costituita da due sezioni qualsiasi, S_1 ed S_2 , e dalla superficie laterale S_L di un tubo di flusso di $\vec{\Omega}$. S_C è chiusa quindi

$$\int_{S_C} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} + \int_{S_L} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Per definizione di tubo di flusso, si ha

$$\int_{S_L} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = 0,$$

perciò

$$\int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S}.$$

Orientando allo stesso modo le due sezioni³ si ha pure

$$\int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S}. \quad (1.16)$$

Risulta quindi che il flusso di $\vec{\Omega}$ attraverso qualsiasi sezione di un tubo di flusso è costante. Per questo un tubo di flusso non può iniziare e terminare nel fluido: o è chiuso, oppure inizia e termina sulle superfici del fluido (che non sono necessariamente coincidenti le pareti del contenitore del fluido, ma possono essere per esempio le superfici di separazione tra fasi differenti come un liquido e il suo vapore).

Quest'ultima equazione esprime la conservazione del momento angolare per un fluido.

1.4 Vortici

Seguendo [Don91] si hanno le seguenti definizioni: una regione di fluido classico che presenta vorticità diversa da zero, circondata da fluido irrotazionale o dalle pareti di un contenitore è detta vortice. Un tubo di flusso di vorticità circondato da fluido irrotazionale è detto filamento vorticoso. Si chiama “forza di un vortice”, che indichiamo con Γ la circuitazione della velocità lungo un cammino ℓ che circonda il vortice, cioè

$$\Gamma = \oint_{\ell} \vec{v} \cdot d\vec{l}. \quad (1.17)$$

Questa è una grandezza che caratterizza bene il vortice. Infatti applicando l'equazione (1.16) ad un filamento vorticoso che attraversa una qualunque sezione trasversale S_t avente per bordo il cammino ℓ ed utilizzando il teorema di Stokes⁴

$$\int_{S_t} \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S_t} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \text{cost.}$$

Un filamento vorticoso con una forza diversa da zero e una sezione nulla è detto vortice curvilineo. Questo tipo di vortice presenta una singolarità della vorticità lungo una linea, che sostanzialmente si identifica con il vortice, immersa in un fluido irrotazionale. La circuitazione attraverso un qualsiasi cammino che sia concatenato con il vortice è costante. Infatti se si circonda il vortice con due cammini orientati in versi opposti e uniti da un tratto che non lo attraversi (come mostrato in figura 1.3), la circuitazione lungo il percorso risultante è nulla. Se il vortice ha simmetria cilindrica, e si sceglie come circuito per il calcolo della forza una circonferenza C di raggio r , che giace nel piano perpendicolare all'asse di simmetria,

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi r v$$

³Il flusso attraverso la superficie cilindrica impone di considerare S_1 ed S_2 orientate in modo opposto. Da qui il segno discorde.

⁴Si è già nelle ipotesi del teorema avendo ipotizzato che il campo velocità sia di classe C^2 nel dominio contenente S_t .

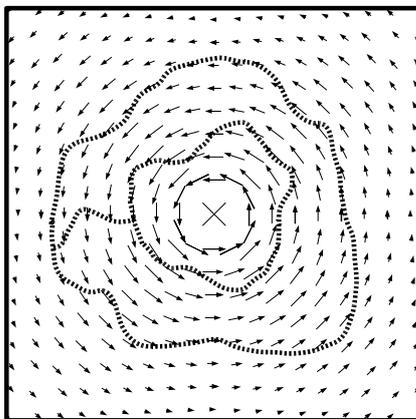


Figura 1.3: La figura rappresenta un campo di velocità di un fluido irrotazionale con un vortice curvilineo. La circuitazione lungo il cammino risultante dall'unione dei due percorsi evidenziati deve essere nulla.

che è costante. Quindi la velocità del fluido è

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (1.18)$$

ed è diretta tangenzialmente alla circonferenza.

1.5 Vortice di Rankine

Allo scopo di generare un vortice si può immaginare un fluido in un secchio, posto in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante. Dopo un certo transitorio, il fluido si muoverà rigidamente con il contenitore con velocità $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. La vorticità del fluido è quindi

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{klm} \omega_l x_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \delta_{jm} \omega_l \\ &= \delta_{jm} \delta_{jm} \omega_i - \delta_{im} \delta_{jm} \omega_j = 3\omega_i - \omega_i = 2\omega_i. \end{aligned}$$

La velocità del fluido si può allora scrivere come

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Omega}}{2} \times \vec{r}. \quad (1.19)$$

In effetti le equazioni (1.15) prevedono che il fluido resti fermo anche quando il secchio è posto in rotazione. Ma questo deriva dal fatto che nel ricavarle si è trascurata la viscosità del fluido, che consente di trasferire momento angolare dalle pareti del contenitore all'intero fluido. Nel seguito la connessione tra vorticità e viscosità sarà ulteriormente commentata. Per ora ci basti osservare che la situazione appena discussa si differenzia abbastanza da quella dei vortici curvilinei. E, in effetti, un vortice curvilineo, non è una rappresentazione sufficientemente realistica anche perchè la velocità assume valori infiniti lungo la

linea che identifica il vortice, come è evidente dalla (1.18). Una migliore descrizione di vortice in un fluido reale è data dal modello di Rankine. Questo modello suppone che il vortice sia composto da un piccolo nucleo di fluido con una vorticità costante $\vec{\Omega}$, circondato da fluido irrotazionale, come quello rappresentato in figura 1.4.

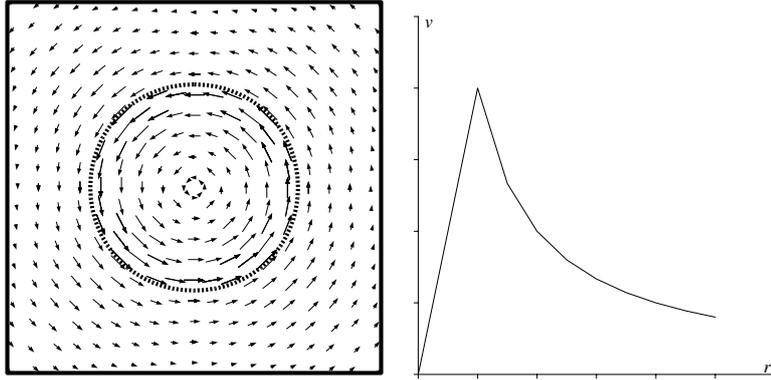


Figura 1.4: La parte destra della figura rappresenta un campo di velocità di un fluido in cui è presente un vortice Rankine. La parte di fluido esterna alla circonferenza è irrotazionale, mentre quella interna ha una vorticità costante. La parte di sinistra rappresenta il modulo della velocità in funzione della distanza dall'asse di simmetria.

L'asse di simmetria del vortice ha la direzione e il verso di $\vec{\Omega}$. La velocità è data dalla combinazione delle espressioni (1.18) e (1.19)

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{\vec{\Omega}}{2} \times \vec{r} & \text{se } r < r_0 \\ \vec{v} = \frac{r_0^2}{r^2} \frac{\vec{\Omega}}{2} \times \vec{r} & \text{se } r > r_0. \end{cases}$$

Le equazioni di Eulero in regime stazionario sono

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi,$$

e possono essere riscritte separatamente per il nucleo vorticoso e per il fluido esterno irrotazionale. Se $r < r_0$ le componenti della velocità sono

$$\vec{v} = \left(-\frac{\Omega}{2}y, \frac{\Omega}{2}x, 0\right),$$

quindi si hanno tre equazioni

$$-\frac{\Omega^2}{4}x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad -\frac{\Omega^2}{4}y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g,$$

che risolte danno

$$P = \rho \frac{\Omega^2}{4} (x^2 + y^2) - \rho g z + \text{cost.}$$

Dalla soluzione si nota che la pressione è tanto più piccola quanto più ci si avvicina all'asse z . Su quest'asse la velocità del fluido è nulla e la pressione

è data solo da quella idrostatica. È inoltre possibile ricavare la forma delle superfici isobare. Ponendo $P = P_0$ (dove P_0 è una pressione costante, per esempio quella di vapor saturo all'interfaccia liquido-gas), si ottiene l'equazione per la superficie del fluido nel nucleo, cioè

$$z = \frac{\Omega^2}{8g}(x^2 + y^2) + c_1, \quad (1.20)$$

dove c_1 è una costante che dipende dalla scelta del riferimento per z .

Se $r > r_0$ è conveniente usare le coordinate cilindriche. Le componenti della velocità si esprimono come

$$\vec{v} = \left(0, \frac{\Omega r_0^2}{2r}, 0\right). \quad (1.21)$$

Quindi si hanno le tre equazioni

$$-\frac{\Omega^2 r_0^4}{4r^3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \alpha}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g,$$

che hanno come soluzione

$$P = -\rho \frac{\Omega^2 r_0^4}{8} \frac{1}{r^2} - \rho g z + P_{0\infty},$$

dove $P_{0\infty}$ è una costante di integrazione. Anche in questo caso la pressione diminuisce avvicinandosi all'asse di simmetria, e per fissati valori di z e di $P_{0\infty}$, ad una certa distanza dall'asse prima si annulla e poi diventa negativa. In questi punti la precedente espressione non descrive correttamente il comportamento del fluido. Trascurando questa regione interna, che si suppone descritta dalla (1.19), la superficie libera del fluido è data da

$$z = -\frac{\Omega^2 r_0^4}{8g} \frac{1}{r^2} + c_2,$$

dove c_2 ha lo stesso significato di c_1 , ma è a priori un valore diverso.

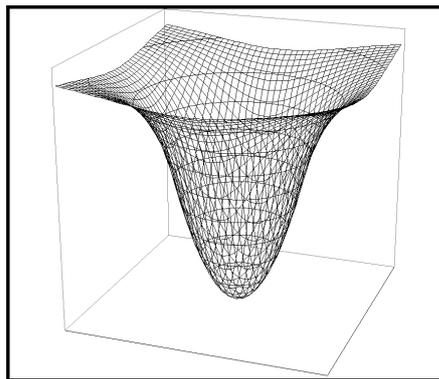


Figura 1.5: La figura rappresenta la superficie libera di un fluido in cui è presente un vortice Rankine

Le due superfici devono essere raccordate in modo da non presentare né discontinuità, né punti angolosi. Ponendo che all'infinito la superficie del fluido

coincida con il piano $z = 0$, per $r > r_0$ la superficie si ottiene ponendo $c_2 = 0$. Per $r = r_0$ le due superfici devono avere lo stesso valore di z .

$$-\frac{\Omega^2}{8g}r_0^2 = \frac{\Omega^2}{8g}r_0^2 + c_1$$

da cui si ottiene

$$c_1 = -\frac{\Omega^2}{4g}r_0^2;$$

la superficie libera è quindi descritta dall'equazione

$$z = \begin{cases} \frac{\Omega^2}{8g}(r^2 - 2r_0^2) & \text{se } r \leq r_0 \\ -\frac{\Omega^2 r_0^4}{8g} \frac{1}{r^2} & \text{se } r \geq r_0, \end{cases} \quad (1.22)$$

che è rappresentata in figura 1.5. Dall'equazione (1.22) è evidente che la superficie non presenta punti angolosi qualsiasi sia r_0 .

1.6 Moto dei vortici in un fluido non viscoso

Un vortice di Rankine in un fluido infinitamente esteso è stazionario⁵. Infatti dalla terza equazione delle (1.15)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0.$$

Ora si considerino due vortici di Rankine di forza Γ_1 e Γ_2 , rispettivamente, e posti ad una distanza d superiore alla somma dei raggi dei loro nuclei, come per esempio mostrato in figura 1.6. Il nucleo del vortice denotato con 1 è immerso nel campo di velocità generato da 2, che in quella regione ha modulo $\frac{\Gamma_2}{2\pi d}$ e direzione perpendicolare alla congiungente dei centri dei nuclei. Analogamente il nucleo del vortice 2 si trova in un fluido con una velocità pari a $\frac{\Gamma_1}{2\pi d}$ e diretta anch'essa perpendicolarmente alla congiungente.

Dette (x_1, y_1) e (x_2, y_2) le coordinate del centro dei nuclei dei due vortici, le equazioni che descrivono il loro moto sono

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \\ \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \end{cases}$$

In generale se si considerano n vortici le equazioni che descrivono il moto dell' i -esimo sono

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^n \Gamma_j \frac{(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \\ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^n \Gamma_j \frac{(x_j - x_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \end{cases} \quad (1.23)$$

⁵La velocità del fluido tende ad annullarsi a grande distanza dal nucleo, come è evidente dalla (1.21). Quindi per poter considerare un fluido infinitamente esteso è sufficiente che in prossimità del bordo la velocità sia molto più piccola di quella presente nel nucleo

$$\frac{\Omega r_0^2}{2r_B} \ll \frac{\Omega r_0}{2},$$

cioè è sufficiente che il bordo sia a una distanza molto grande rispetto alle dimensioni del nucleo $r_B \gg r_0$.

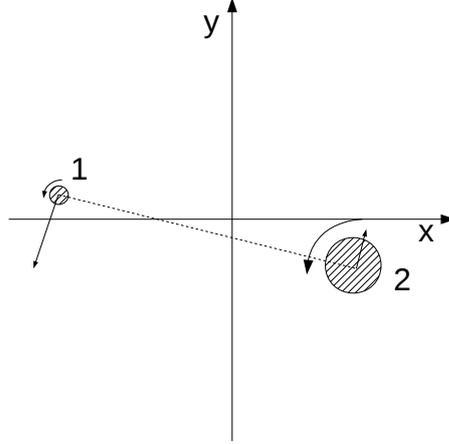


Figura 1.6: La figura rappresenta due vortici di Rankine posti in un fluido infinitamente esteso.

che si ottengono proiettando sugli assi le velocità determinate in precedenza. Questo tipo di sistema di equazioni differenziali è hamiltoniano. Infatti se si considerano come variabili coniugate

$$\{(x_i, \eta_i = \Gamma_i y_i)\}_{i=1, \dots, N},$$

è possibile costruire la funzione hamiltoniana (detta hamiltoniana di Kirchoff-Onsager)

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n \Gamma_i \Gamma_j \ln \left[\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \right],$$

in modo da ricavare le equazioni (1.23)

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial(\eta_i)} \\ \dot{\eta}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \end{cases} \quad (1.24)$$

Moltiplicando per Γ_i la prima equazione nelle (1.23) e sommando su i si ottiene

$$\frac{d}{dt} \sum_i^n \Gamma_i x_i = 0. \quad (1.25)$$

Seguendo lo stesso procedimento per la seconda equazione si giunge a

$$\frac{d}{dt} \sum_i^n \Gamma_i y_i = 0. \quad (1.26)$$

Ciò vuol dire che le grandezze (1.25) e (1.26) sono degli integrali primi del moto. Ulteriori integrali del moto sono le espressioni

$$L = \sum_{i=1}^n \Gamma_i (x_i^2 + y_i^2) \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2\pi} \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n \Gamma_i \Gamma_j \ln \left[\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \right],$$

come si può verificare derivando rispetto al tempo e sostituendo le equazioni (1.23).

Particolarmente interessante per interpretare il significato fisico degli integrali definiti dalle (1.25) e (1.26), è lo studio del moto di un sistema a due vortici, poichè le grandezze

$$X = \frac{\sum_i^n \Gamma_i x_i}{\sum_i^n \Gamma_i} \quad \text{e} \quad Y = \frac{\sum_i^n \Gamma_i y_i}{\sum_i^n \Gamma_i}$$

possono essere considerate come le coordinate di un centro di massa P_{CM} , attorno al quale il moto dei vortici si svolge seguendo delle circonferenze in esso centrate. Se le forze dei vortici hanno lo stesso segno questo punto si trova sulla retta congiungente i centri dei due nuclei, in un punto intermedio tra essi. Se invece hanno segni diversi, P_{CM} si trova sempre sulla retta congiungente i due nuclei, ma esternamente ad essi. In particolare se le forze dei due vortici diventano opposte, allora il punto P_{CM} tende all'infinito. Allora la coppia di vortici proseguirà in linea retta percorrendo una circonferenza di raggio infinito.

Il caso di vortici con forze di segno opposto è importante, perchè permette di considerare il loro moto anche in una regione di fluido confinata da bordi. Per esempio, nella parte sinistra della figura 1.7 sono rappresentati due vortici che al tempo $t = 0$ sono posti nelle posizioni $(0, a)$ e $(0, -a)$, con una forza Γ di modulo uguale e di segno opposto. Una soluzione delle equazioni del moto è

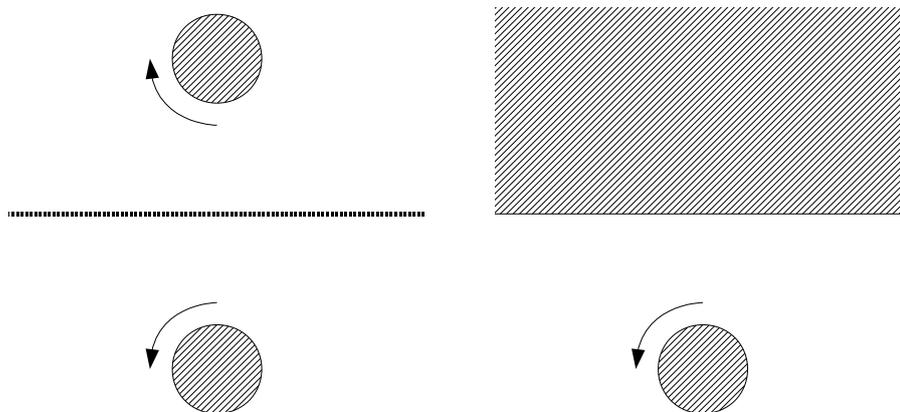


Figura 1.7: La figura di sinistra rappresenta due vortici di Rankine di medesimo raggio e della stessa forza, ma con la vorticosità del nucleo orientata in verso opposto; quella di destra è la stessa situazione con la differenza che un vortice è sostituito da una parete

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Gamma}{4\pi a} t \\ y_1 = a \\ x_2 = \frac{\Gamma}{4\pi a} t \\ y_2 = -a. \end{cases}$$

Ciò vuol dire, come si era già detto, che i due vortici procedono appaiati in un moto rettilineo uniforme. È importante notare che lungo l'asse di simmetria (in

figura è la linea tratteggiata), la velocità del fluido è sempre parallela ad esso, in ogni punto ed ad ogni istante. Questo vuol dire che, considerando la linea come un bordo di un contenitore, la legge (1.8) è verificata, supponendo la superficie statica. Quindi per una situazione come quella rappresentata nella parte destra della figura 1.7 le equazioni del moto del vortice hanno come soluzione

$$\begin{cases} x = \frac{\Gamma}{4\pi a}t \\ y = -a. \end{cases}$$

1.7 Vortici e viscosità

Le equazioni (1.15) ottenute per la descrizione del moto del centro di un vortice hanno un'importante limitazione. Infatti mentre l'ipotesi di incomprimibilità è una buona approssimazione di un fluido reale (almeno per velocità piccole rispetto a quelle del suono), l'ipotesi di assenza di viscosità descrive il comportamento di un fluido, in una rude approssimazione.

La possibilità stessa di generare dei vortici è connessa con la viscosità del fluido. Infatti la terza equazione delle (1.15) afferma che non è possibile generare una vorticità in un fluido in cui questa non sia già presente. Se ciò fosse vero allora il fluido all'interno del secchio rotante descritto nel paragrafo precedente, come si è detto, non dovrebbe cominciare a muoversi. In generale non si potrebbero generare dei vortici, al più si potrebbero modificare quelli già presenti. Le equazioni trovate descrivono solo il comportamento dei vortici quando questi sono stati già creati; non spiegano invece come essi si generano.

La generazione di un vortice è dovuta alla variazione di momento angolare del fluido: ciò è possibile solo se il fluido è viscoso. In questo caso infatti strati successivi di fluido possono produrre un momento torcente che modifica il momento angolare di parte del fluido. Tuttavia questi processi non saranno discussi nella presente tesi.

Capitolo 2

Transizioni di fase e difetti topologici

La trattazione dei vortici in fluidi quantistici può prendere le mosse dalla costruzione di una densità di energia, che descriva localmente lo stato del fluido. In particolare per l'elio superfluido, che può considerarsi una particolare fase dell'elio liquido, la densità di energia può costruirsi sulla base della teoria di Landau sulle transizioni del 2° ordine [Pis99]. In questo capitolo, dopo una breve introduzione generale sulle transizioni di fase, si costruisce la densità di energia di Ginzburg-Landau. Quindi si introduce il concetto di vortice come particolare difetto topologico.

2.1 Transizioni del 2° ordine

In termodinamica un sistema fisico con un gran numero di particelle è descritto da una funzione potenziale, che dipende da 3 variabili indipendenti. Risulta utile servirsi del potenziale di Gibbs G , definito da

$$G = E - TS + PV,$$

dove E è l'energia interna del sistema, T la sua temperatura, S l'entropia, P la pressione e V il volume. Se supponiamo di far variare il numero di particelle N , e chiamiamo μ il potenziale chimico, dal differenziale del potenziale di Gibbs

$$dG = -SdT + VdP + \mu dN \quad (2.1)$$

è evidente che, per la natura estensiva della variabile N , è sempre possibile scrivere

$$G = Nf(P, T),$$

Differenziando G si ricava

$$dG = Ndf + fdN,$$

che confrontata con il differenziale precedente permette di scrivere

$$\mu = \frac{G}{N}.$$

È noto che in un sistema in equilibrio termico la temperatura, la pressione e il potenziale chimico devono assumere lo stesso valore in ogni punto del sistema. Però questo non implica necessariamente che il sistema sia omogeneo. Infatti può avvenire che esso si trovi nello stato di equilibrio dopo essersi separato in parti omogenee distinte. Gli stati del sistema che si riferiscono a queste differenti parti sono dette fasi.

Dall'equazione (2.1) si desume che le derivate

$$-s = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_P \quad v = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T$$

sono rispettivamente l'entropia e il volume per il singolo componente del sistema.

Siano μ_1 e μ_2 i potenziali chimici di due differenti fasi. Si supponga che fissata la pressione essi varino con la temperatura come mostrato in figura 2.1. Dalla condizione di equilibrio $\mu_1 = \mu_2$ è possibile desumere la temperatura T_0

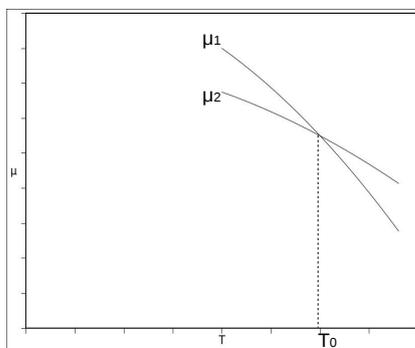


Figura 2.1: La figura mostra un possibile andamento del potenziale chimico di due diverse fasi in funzione della temperatura e a pressione fissata

del sistema ad una determinata pressione. Dalla figura si può anche arguire che la derivata del potenziale chimico rispetto alla temperatura sia discontinua, cioè l'entropia per elemento di una fase differisce da quella dell'altra fase.

Ripetendo il ragionamento per la variabile pressione, ad una determinata temperatura, è possibile trovare la pressione P_0 alla quale il sistema è in equilibrio. Anche in questo caso risulta discontinua la derivata del potenziale chimico rispetto alla pressione, ovvero il volume per elemento del sistema.

In generale, una transizione di una parte del sistema da una fase ad un'altra per le quali risulti

$$\left. \frac{\partial \mu_1}{\partial T} \right|_{T_0} \neq \left. \frac{\partial \mu_2}{\partial T} \right|_{T_0} \quad \left. \frac{\partial \mu_1}{\partial P} \right|_{P_0} \neq \left. \frac{\partial \mu_2}{\partial P} \right|_{P_0},$$

è detta transizione di fase del 1° ordine. Un esempio di queste transizioni è il passaggio dalla fase aeriforme a quella liquida, in cui la discontinuità del volume per elemento del sistema è evidente, mentre la discontinuità dell'entropia è manifesta nel calore latente di liquefazione.

Non tutte le fasi di un sistema esibiscono una discontinuità del volume o dell'entropia. Quindi una transizione da una fase ad un'altra di questo tipo non può essere classificata come del 1° ordine. In origine Ehrenfest classificò le

transizioni di ordine n -esimo come quei passaggi tra fasi che abbiano continue le prime $n-1$ derivate del potenziale chimico rispetto alla pressione e temperatura, e tali che

$$\left. \frac{\partial^n \mu_1}{\partial T^n} \right|_{T_0} \neq \left. \frac{\partial^n \mu_2}{\partial T^n} \right|_{T_0}, \quad \left. \frac{\partial^n \mu_1}{\partial P^n} \right|_{P_0} \neq \left. \frac{\partial^n \mu_1}{\partial P^n} \right|_{P_0}. \quad (2.2)$$

Una classificazione del genere non può essere usata perchè esistono sistemi che pur non presentando transizioni del 1° ordine, non possono essere descritti dalle derivate di ordine superiore. Ne è un esempio la transizione λ da elio liquido a elio superfluido, dove il calore specifico, che dipende dalla derivata seconda, diverge logicamente attorno alla temperatura critica $T_\lambda = 2.172$ K.

In generale quindi si possono distinguere transizioni del 1° ordine e transizioni di ordine superiore, comunemente e globalmente indicate con il termine di transizioni del 2° ordine.

Nella maggior parte dei casi la natura di queste transizioni risiede in un cambiamento di simmetria interna del sistema. Se nel passaggio da una fase all'altra si rompe la simmetria originaria globale del sistema in considerazione, allora è necessario introdurre una nuova variabile per descrivere il suo stato. Questa variabile è detta parametro d'ordine. In generale esso è una grandezza macroscopica, che può essere misurata sperimentalmente e che assume un determinato valore in ogni punto dello spazio occupato dal sistema. Il parametro d'ordine può essere uno scalare, un vettore o anche una grandezza tensoriale. Ad esempio occorre una matrice a due componenti per descrivere l'elio-3 superfluido. Poichè la descrizione fisica del sistema nella fase più simmetrica non necessita di questa variabile, il suo valore deve essere costante nello spazio e nel tempo e può essere posto convenzionalmente a 0. Nel seguito il parametro d'ordine sarà denotato con $u = u(\vec{r}, t)$.

La trattazione delle transizioni di fase del 2° ordine per mezzo del parametro d'ordine è utile, perchè si suppone che le altre variabili termodinamiche derivate non evidenziano comportamenti significativi, al fine di descrivere correttamente il fenomeno.

Un esempio di tale trattazione si ha nella transizione di Curie dei ferromagneti. Ad una temperatura superiore alla temperatura di Curie T_0 , la direzione di ognuno dei dipoli magnetici costituenti il sistema è orientata in modo casuale, in assenza di campo magnetico esterno. Il gruppo delle trasformazioni geometriche che lascia invariato lo stato del sistema contiene quello delle rotazioni $SO(3)$. Diminuendo la temperatura al di sotto di T_0 , il sistema spontaneamente si magnetizza in una particolare direzione, a priori arbitraria. La simmetria è quindi ridotta a quella delle rotazioni nel piano ortogonale alla magnetizzazione, ed il suo gruppo è $SO(2) \subset SO(3)$. Quindi è necessario usare la magnetizzazione \vec{M} come parametro d'ordine per descrivere la transizione in questione. Le altre variabili termodinamiche, quali pressione, volume, ecc... non mostrano comportamenti particolari che possano denotare l'avvenuta transizione.

2.2 Densità di energia di Ginzburg-Landau

Come abbiamo illustrato nel paragrafo precedente, il che vale nella maggioranza dei casi, in una transizione del 2° ordine il gruppo di simmetria della fase al di sotto della temperatura critica T_0 è un sottogruppo proprio del gruppo

di simmetria della fase a temperatura più elevata. Questa caratteristica non si riscontra in generale nelle transizioni del 1° ordine, nelle quali le simmetrie delle due fasi possono non aver niente in comune. In accordo con [Pis99] la fase meno simmetrica verrà anche chiamata *ordinata*, in contrapposizione con *disordinata* relativamente alla più simmetrica. Questa terminologia fa riferimento alla necessità di introdurre il parametro d'ordine, che interverrà nella trattazione quantitativa delle transizioni del 2° ordine come variabile del potenziale di Gibbs G . Il parametro d'ordine prende valori continui nel punto di transizione ed è nullo nella fase disordinata. Un valore del parametro d'ordine piccolo a piacere, ma non nullo, conduce già ad una diminuzione della simmetria, ovvero ad una fase ordinata. Questa variabile, però, non è a rigore indipendente dalla pressione e dalla temperatura, perchè queste possono essere fissate a priori. Invece u sarà determinata a partire dalle condizioni di equilibrio termodinamico, cioè quando G assume un valore minimo per date P e T .

Seguendo le idee sviluppate da Landau [LL86], quando le due fasi possono coesistere, il parametro d'ordine deve essere piccolo: quindi è possibile sviluppare il potenziale di Gibbs in serie di potenze di u

$$G(P, T, u) = G_0 + A(P, T)u + B(P, T)u^2 + C(P, T)u^3 + D(P, T)u^4 + \dots \quad (2.3)$$

Si supponga ora di effettuare una variazione virtuale dello stato del sistema, lasciando P e T costanti e variando u , al fine di determinare quando il potenziale G assume un minimo e il sistema si trova in uno stato di equilibrio. Se P e T sono tali da determinare la fase disordinata, il minimo deve necessariamente trovarsi in $u = 0$, come mostrato in figura 2.2. Viceversa se la pressione e la

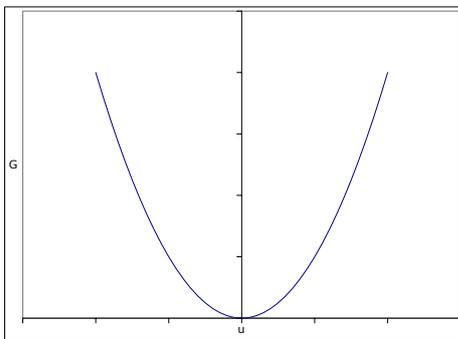


Figura 2.2: La figura mostra un possibile andamento del potenziale di Gibbs in funzione del parametro d'ordine a temperatura e pressione fissate in modo che la fase sia quella più simmetrica.

temperatura determinano la fase ordinata, il minimo deve trovarsi in $u = u_0 \neq 0$, come mostrato in figura 2.3. Nel caso della fase più simmetrica le condizioni appena discusse equivalgono a imporre

$$A = \left. \frac{\partial G}{\partial u} \right|_{u=0} = 0 \quad , \quad B = \left. \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right|_{u=0} > 0. \quad (2.4)$$

La prima di queste condizioni vale anche per la fase ordinata perchè, come detto nel paragrafo precedente, le derivate prime di G rispetto a P e T devono essere

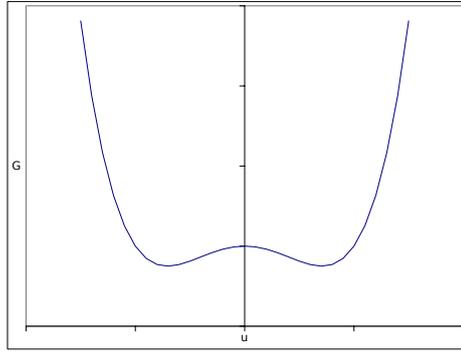


Figura 2.3: La figura mostra un possibile andamento del potenziale di Gibbs in funzione del parametro d'ordine a temperatura e pressione fissate in modo che la fase sia quella meno simmetrica

continue al punto di transizione di 2° ordine. Inoltre il sottogruppo di simmetria della fase ordinata è costituito da trasformazioni che comunque mantengono invariante lo stato della fase disordinata, caratterizzato da $u = 0$. Quindi esso deve continuare ad essere uno stato di equilibrio per il sistema, eventualmente instabile. In ogni caso il termine di primo grado nello sviluppo di G deve essere nullo nell'intorno del punto di transizione e noi porremo $A(P, T) \equiv 0$ nella (2.3). La seconda relazione in (2.4) invece deve essere modificata, in quanto sappiamo che $u = 0$ non rappresenta più uno stato di equilibrio stabile e quindi

$$B = \left. \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right|_{u=0} < 0.$$

Se la temperatura T_0 e la pressione P_0 sono tali da rendere possibile la coesistenza delle due fasi, allora per continuità risulta

$$B(P_0, T_0) = 0. \quad (2.5)$$

In queste condizioni $u = 0$ è un minimo per entrambe le fasi essendo queste in equilibrio. Quindi affinché questo sia un punto di equilibrio stabile è necessario che

$$C(P_0, T_0) = 0 \quad , \quad D(P_0, T_0) > 0 \quad (2.6)$$

Variando (P, T) in un intorno di (P_0, T_0) possiamo supporre che $D(P, T)$ rimanga dello stesso segno e le fasi in generale sono distinte. D'altra parte può accadere sia che $C(P, T) = 0$, sia che $C(P, T) \neq 0$. Nel primo caso le due fasi coesistono lungo la curva descritta dalla sola equazione (2.5). Nel secondo caso invece le equazioni (2.5) e la prima delle (2.6) determinano dei punti isolati di coesistenza delle fasi. La maggior parte delle transizioni di fase del 2° ordine presentano delle curve di transizione, in cui le due fasi coesistono, e limitandoci ad esse poniamo $C = 0$.

In definitiva è possibile esprimere il potenziale di Gibbs come

$$G = G_0 + Bu^2 + Du^4,$$

dove B è positivo per la fase disordinata e negativo per quella ordinata, mentre D è sempre positivo. A pressione fissata la funzione B dipende con continuità

dalla temperatura in un intorno di $T_0 = T_0(P)$. Allora per $T \approx T_0$ ci si può limitare a considerare solo il primo termine di uno sviluppo in serie ponendo

$$B(P, T) = a(P)(T - T_0),$$

tenuto conto della equazione (2.5). In questo modo sia per la fase disordinata che per quella ordinata si ottiene l'espressione del potenziale di Gibbs

$$\Delta G = G - G_0 = a(P)(T - T_0)u^2 + Du^4 \quad (2.7)$$

Da quest'ultima formula è chiaro il modo in cui si stanno descrivendo le transizioni di fase del 2° ordine: per una temperatura $T > T_0$ lo stato di equilibrio è unico in $u = 0$; al decrescere della temperatura questa condizione è conservata fino a che $T = T_0$. Al di sotto di esso ($T < T_0$) il potenziale di Gibbs presenta due minimi, cioè il sistema presenta due possibili stati di equilibrio; in uno dei quali il sistema dovrà portarsi, rompendo la simmetria iniziale.

Per esempio nella transizione di Curie dei ferromagneti, quando il sistema scende ad una temperatura inferiore a T_{Curie} , lo stato di equilibrio è costituito da tutti i dipoli magnetici allineati lungo una sola direzione di magnetizzazione \vec{M} . La comparsa di tale direzione privilegiata rompe la simmetria sferica del sistema al di sopra T_{Curie} .

Lo studio del potenziale di Gibbs è stato svolto finora sotto le ipotesi che entrambe le fasi, ordinata e disordinata, fossero omogenee. Ma in generale può accadere che all'interno della stessa fase si abbiano delle fluttuazioni del parametro d'ordine, dando luogo ad una fase eterogenea. In queste condizioni è possibile utilizzare la densità di potenziale di Gibbs $\mathcal{G} = \mathcal{G}(P, T, \vec{x})$, esprimendo il potenziale per l'intero sistema come

$$G = \int \mathcal{G} dV,$$

dove l'integrale è esteso a tutto il corpo. L'elemento $\mathcal{G} dV$ è il potenziale di Gibbs di una porzione del sistema, piccola rispetto alle dimensioni caratteristiche dell'intero corpo, ma grande rispetto alle dimensioni microscopiche. D'altra parte il potenziale di Gibbs non può dipendere dal volume del sistema avendo, fissato il numero N di particelle, la pressione e la temperatura. Pertanto è più conveniente fissare uno specifico volumetto "macroscopico" v nel sistema, contenente un numero eventualmente variabile di particelle, e passare al potenziale Ω definito come

$$\Omega = \frac{F}{v} - \mathcal{G} = \frac{F}{v} - \mu N,$$

dove N è il numero di particelle in v ed F è l'energia libera di Helmholtz

$$F = E - TS.$$

Passando ai differenziali dei potenziali termodinamici (si veda §§ 15 e 24 di [LL86]) si ottiene la relazione

$$d\Omega = -\frac{S}{v}dT - Nd\mu,$$

in altri termini Ω è funzione della temperatura e del potenziale chimico.

Se ora si considera il teorema delle piccole correzioni (si veda § 24 di [LL86]), che afferma l'uguaglianza delle variazioni dei diversi potenziali termodinamici a variabili principali fissate, cioè

$$(\Delta E)_{S,v,N} = v(\Delta \mathcal{G})_{P,T,N} = v(\Delta \Omega)_{\mu,v,T},$$

l'equazione (2.7) si riscrive come

$$\Delta \Omega = \alpha(T - T_0)u^2 + \beta u^4, \quad (2.8)$$

dove $\alpha = \frac{a(P)}{v}$ e $\beta = \frac{D(P,T)}{v}$ con la pressione espressa mediante la variabile μ .

È ora possibile aggiungere allo sviluppo (2.8) il contributo delle fluttuazioni del parametro d'ordine, che possono essere espresse con termini proporzionali alle sue derivate spaziali. Se le fluttuazioni si verificano su una scala grande rispetto ad una lunghezza caratteristica r_{micro} del sistema¹ è possibile limitarsi a considerare i termini con le derivate di ordine inferiore. Ad esempio per fluttuazioni del tipo

$$u = u_0 \cos(kx), \quad |k| \ll \frac{2\pi}{r_{micro}},$$

risulterebbe $|\frac{d^n u}{dx^n}| \ll |u_0| r_{micro}^{-n}$. Quindi le derivate di ordine più elevato del secondo si possono trascurare. I termini lineari contenenti le derivate prime che hanno una forma del tipo

$$f(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

possono essere integrati su tutto il volume dando luogo a contributi di superficie, i quali per il momento possono essere trascurati rispetto a quelli di volume. Ciò vale anche per i termini del tipo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Invece i termini della forma

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

si trasformano gli uni negli altri sotto integrazione e danno luogo a un contributo di volume del tipo

$$g_{ij}(\mu, T) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Limitandosi al caso in cui le fluttuazioni del parametro d'ordine siano isotrope, cioè per

$$g_{ij} = g\delta_{ij},$$

la densità di potenziale Ω si può scrivere come

$$\Omega = \Omega_0 + \alpha(T - T_0)u^2 + \beta u^4 + g|\nabla u|^2,$$

¹È possibile assumere che r_{micro} sia una scala microscopica tipica, al di sotto della quale la descrizione non può essere che quantistica. Infatti si osservi che le proprietà quantitative di una sostanza, quale la stessa temperatura di transizione T_0 , sono determinate essenzialmente dalle interazioni microscopiche.

che dà luogo al potenziale termodinamico del corpo

$$W[u] = \int [\Omega_0 + \alpha(T - T_0)u^2 + \beta u^4 + g|\nabla u|^2] dV. \quad (2.9)$$

Facendo variare la funzione $u(\vec{r})$ entro un appropriato insieme, il potenziale termodinamico $W[u]$ subirà delle corrispondenti fluttuazioni, le quali rappresentano il lavoro necessario per passare da una assegnata configurazione del parametro d'ordine ad un'altra, per fissati valori di μ e T . Questo ci consente di interpretare (si veda § 147 di [LL86]).

$$\Delta W[u] = E = \int \mathcal{E} dV = \int g|\nabla u|^2 + \alpha(T - T_0)u^2 + \beta u^4 dV, \quad (2.10)$$

come l'energia efficace del sistema che subisce una transizione di fase e l'integrando è chiamato densità di energia di Ginzburg-Landau (GL) ([Pis99]). Dal punto di vista assunto, nella precedente espressione è possibile identificare due addendi di diversa natura: il primo contenente il quadrato delle derivate prime $g|\nabla u|^2$ è l'energia di distorsione, il secondo $V(u) = \alpha(T - T_0)u^2 + \beta u^4$ è il potenziale di autointerazione del parametro d'ordine. Nel caso in cui al sistema si applichi un campo esterno, appropriati termini possono essere introdotti nell'energia.

2.3 Funzione di correlazione

Le fluttuazioni del parametro d'ordine in diversi punti del sistema possono influenzarsi tra di loro: in questo paragrafo tenteremo una descrizione semplificata del fenomeno, facendo considerazioni analoghe a quelle riportate in § 146 di [LL86].

Nella fase ordinata il valore medio del parametro d'ordine si trova nel punto che minimizza il potenziale l'espressione (2.7), cioè

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{-\alpha(T - T_0)}{2\beta}}.$$

Denotando con Δu una fluttuazione arbitraria del parametro d'ordine a media spaziale nulla, è possibile scrivere

$$u = \langle u \rangle + \Delta u,$$

che sostituita nell'equazione (2.9) dà luogo alla variazione del potenziale

$$\Delta W[u] = \int \alpha(T - T_0)(\langle u \rangle + \Delta u)^2 + \beta(\langle u \rangle + \Delta u)^4 + g|\nabla(\langle u \rangle + \Delta u)|^2 dV$$

Integrando sul volume, i termini contenenti potenze dispari di Δu si annullano. Inoltre essendo per definizione Δu piccolo rispetto a $\langle u \rangle$, ovvero

$$\left| \frac{\Delta u}{\langle u \rangle} \right| \ll 1,$$

elevando alle appropriate potenze si ottengono le disuguaglianze

$$\left(\frac{\Delta u}{\langle u \rangle}\right)^4 \ll \left(\frac{\Delta u}{\langle u \rangle}\right)^2 \ll 1$$

che permettono di trascurare i termini di quarto ordine nell'integrale, che si riduce a

$$\Delta W[u] = \int \alpha(T - T_0)(\Delta u)^2 + 6\beta\langle u \rangle^2(\Delta u)^2 + g|\nabla(\Delta u)|^2 dV,$$

avendo inglobato nel membro di sinistra i termini indipendenti da Δu . Imponendo delle condizioni periodiche per Δu ai bordi di V , è possibile sviluppare le fluttuazioni in serie di Fourier

$$\Delta u = \sum_{\vec{k} \in \Lambda} \Delta u_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}},$$

dove Λ è il reticolo duale e $\Delta u_{\vec{k}} = \Delta u_{-\vec{k}}^*$, perchè per ipotesi u è reale. In questo modo

$$\nabla(\Delta u) = \sum_{\vec{k} \in \Lambda} i\vec{k} \Delta u_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Integrando sul volume restano solo i termini del tipo $\Delta u_{\vec{k}} \Delta u_{-\vec{k}} = |\Delta u_{\vec{k}}|^2$. Quindi risulta

$$\Delta W[u] = V \sum_{\vec{k} \in \Lambda} \alpha(T - T_0) |\Delta u_{\vec{k}}|^2 + 6\beta\langle u \rangle^2 |\Delta u_{\vec{k}}|^2 + gk^2 |\Delta u_{\vec{k}}|^2.$$

Se si sostituisce l'espressione di $\langle u \rangle$ si ottiene

$$\Delta W = V \sum_{\vec{k} \in \Lambda} [-2\alpha(T - T_0) + gk^2] |\Delta u_{\vec{k}}|^2. \quad (2.11)$$

La probabilità che si realizzi una particolare distribuzione del parametro d'ordine è

$$w \propto e^{-\frac{\Delta W[u]}{T}}.$$

Ma poichè nello sviluppo di $\Delta W[u]$ (2.11) ogni $|\Delta u_{\vec{k}}|^2$ è statisticamente indipendente dagli altri, allora si può introdurre la distribuzione di probabilità per modo

$$w_k \propto \exp \left[-\frac{V(-2\alpha(T - T_0) + gk^2)}{T} |\Delta u_{\vec{k}}|^2 \right].$$

Quindi la media di $|\Delta u_{\vec{k}}|^2$ si calcola dall'espressione

$$\langle |\Delta u_{\vec{k}}|^2 \rangle = \int |\Delta u_{\vec{k}}|^2 w_k du_{\vec{k}}$$

cioè

$$\langle |\Delta u_{\vec{k}}|^2 \rangle = \frac{T}{2V(-2\alpha(T - T_0) + gk^2)}.$$

La funzione di correlazione si definisce come

$$C(r) = \langle \Delta u(\vec{r}_1) \Delta u(\vec{r}_2) \rangle,$$

dove $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Dallo sviluppo di Fourier della fluttuazione si ottiene

$$\begin{aligned} C(r) &= \left\langle \sum_{\vec{k} \in \Lambda} \Delta u_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} \sum_{\vec{h} \in \Lambda} \Delta u_{\vec{h}} e^{i\vec{h} \cdot \vec{r}_2} \right\rangle \\ &= \sum_{\vec{k} \in \Lambda} \langle |\Delta u_{\vec{k}}|^2 \rangle e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \end{aligned}$$

Supponendo k continuo si può passare ad un'espressione integrale di $C(r)$, con l'utilizzo della sostituzione formale $\sum_{\vec{k} \in \Lambda} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k$, precisamente

$$C(r) = \int \langle |\Delta u_{\vec{k}}|^2 \rangle e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \int \frac{T}{2V(-2\alpha(T - T_0) + gk^2)} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k,$$

che dà

$$C(r) = \frac{T_0}{8\pi g r} e^{-\frac{r}{r_0}},$$

dove $r_0 = \sqrt{\frac{g}{-2\alpha(T - T_0)}}$ è detto raggio di correlazione. Tale distanza caratteristica del sistema delimita la regione al di là della quale la correlazione delle fluttuazioni decresce significativamente. Attorno al punto critico il raggio di correlazione diventa infinito, la corrispondente funzione decresce come $\frac{1}{r}$ e una qualunque perturbazione in un punto del corpo avrà un'influenza su tutti gli altri punti. Quindi r_0 determina la taglia tipica delle perturbazioni che può assumere il parametro d'ordine u .

2.4 Difetti topologici

Nell'espressione della densità di energia GL (2.10) una grande importanza risiede nella forma assunta dal potenziale di autointerazione che indicheremo con $V(u)$. In generale può accadere che il parametro d'ordine abbia più componenti, oppure sia una grandezza complessa. In questo caso u nell'espressione (2.10) rappresenta il modulo del parametro d'ordine u , mentre si tiene conto della fase nel contributo di distorsione. Si supponga, in accordo con [Pis99], che $V(u)$ sia invariante per la trasformazione t nello spazio dei parametri d'ordine, cioè che per ogni u risulti $V(tu) = V(u)$. Ciò non implica che $tu = u$, ma se questo accade si dirà che lo stato u è simmetrico, altrimenti asimmetrico.

Nel caso generale esiste un gruppo G di trasformazioni, chiamato gruppo di simmetria, rispetto al quale la densità di energia è invariante. È quindi possibile trovare la famiglia di stati, per i quali in generale c'è rottura di simmetria, applicando ogni trasformazione $t \in G$ ad un particolare stato u . Questa famiglia è chiamata orbita di u generata da G . L'orbita che corrisponde ad un minimo del potenziale è chiamata orbita minima. Nel caso della densità di energia GL (2.10) il potenziale ha la forma $V(u) = \alpha(T - T_0)u^2 + \beta u^4$. Se u fosse semplicemente uno scalare le simmetrie di $V(u)$ si riducono al gruppo \mathbb{Z}_2 .

In particolare, se u fosse uno scalare reale, per temperature al di sotto di T_0 esistono per esso due possibili valori di minimo per l'energia

$$u_m = \pm \sqrt{\frac{-\alpha(T - T_0)}{2\beta}},$$

soluzioni dell'equazione di equilibrio

$$V'(u) = 0.$$

L'equazione per l'equilibrio non permette, però, di conoscere in quale dei due stati il sistema si stabilisca. Questo equivale a dire che l'orbita minima rispetto a \mathbb{Z}_2 è costituita da questi due soli punti. D'altro canto la soluzione $u = 0$ ha un'orbita, rispetto a \mathbb{Z}_2 , costituita solo da se stesso, il che ci dice che esso è uno stato simmetrico.

Supponiamo allora che in due distinte regioni dello spazio il parametro d'ordine assuma rispettivamente i valori $u = \pm u_m$, come mostrato in figura 2.4. Per

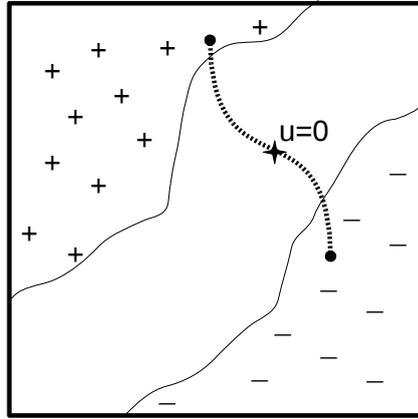


Figura 2.4: Regioni tridimensionali dove il parametro d'ordine assume il valore corrispondente a due stati di rottura della simmetria, denotata con + e con -. Il punto evidenziato sul percorso corrisponde ad un valore nullo del parametro d'ordine.

qualsiasi percorso scelto che colleghi una regione all'altra il parametro d'ordine dovrà assumere, in qualche punto, il valore 0. Quindi in quel punto si ha una densità di energia superiore a quella del vuoto (inteso come uno degli stati di minima energia). Il campo u non può disporsi in una configurazione di minima energia uniformemente in tutto lo spazio, quindi si può pensare che si produca una qualche deformazione continua dello stesso che separi le due regioni. Questo è un esempio di difetto topologico, che in questo caso particolare è chiamato parete di dominio (domain wall). Un esempio di questi difetti sono le pareti di separazioni di diversi domini magnetici nei ferromagneti.

In generale un difetto topologico può essere pensato come una regione dello spazio, nella quale il parametro d'ordine u assume il valore di un punto di equilibrio instabile per la densità di energia (falso vuoto) tra due stati distinti di vuoto effettivo.

Si definisce codimensione di un difetto topologico la differenza tra la dimensione dello spazio reale, in cui è immerso il sistema, e la dimensione del difetto. La parete di dominio è quindi un difetto di codimensione 1 in uno spazio tridimensionale.

Si supponga ora che il parametro d'ordine abbia due componenti $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Per semplicità si può assumere che \vec{u} sia rappresentato da un numero complesso $u = fe^{i\theta}$, con $f \geq 0$.

La densità di energia GL (2.10) assume la forma

$$\mathcal{E} = g\nabla\bar{u} \cdot \nabla u + \alpha(T - T_0)|u|^2 + \beta|u|^4, \quad (2.12)$$

che può essere espressa anche come

$$\mathcal{E} = g|\nabla f|^2 + gf^2|\nabla\theta|^2 + \alpha(T - T_0)f^2 + \beta f^4.$$

Il potenziale, rappresentato in figura 2.5, assume la forma di un sombrero, ed esso possiede il gruppo $SO(2)$ delle rotazioni bidimensionali e il gruppo di simmetria. L'orbita minima è data dalla circonferenza $|u| = f_m$ nello spazio del

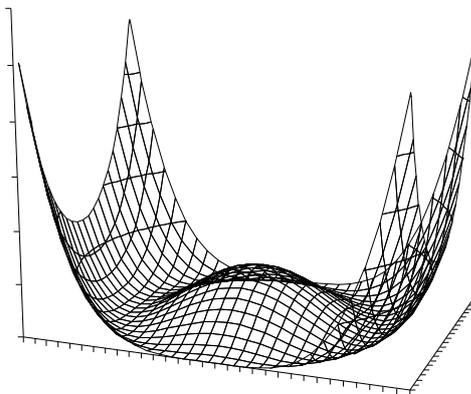


Figura 2.5: Potenziale a cappello messicano per il parametro d'ordine u

parametro d'ordine.

In questo caso non vale più il ragionamento fatto per identificare la parete di dominio. Infatti, riferendosi alla figura 2.6 si intuisce che per un qualsiasi percorso che colleghi una regione in cui $u = f_m e^{i\theta_1}$ ad un'altra in cui $u = f_m e^{i\theta_2}$, u può sempre trasformarsi con continuità pur rimanendo nell'orbita minima.

Tuttavia prendendo in considerazione un circuito chiuso, come rappresentato in figura 2.7, la variazione che la fase θ subisce lungo di esso deve essere un multiplo di 2π ; questo perchè ritornati al punto di partenza, il campo deve coincidere con se stesso. In definitiva si ha la relazione

$$\oint d\theta = 2\pi M \quad (2.13)$$

dove M è detto numero di avvolgimenti.

Per un campo come quello di figura 2.6 il numero di avvolgimenti è 0. Se però si considera un campo come quello mostrato in figura 2.7, il numero di avvolgimenti è diverso da zero e, nel caso specifico, $M = 1$. In questa situazione deve quindi esistere una singolarità puntuale all'interno del circuito, dove la fase non è definita. Questa discontinuità è un difetto topologico di codimensione due ed è chiamato vortice.

Si supponga ora che nello spazio tridimensionale sia possibile identificare un vortice per ogni elemento di una successione continua di piani paralleli (si veda figura 2.8). La curva immersa nello spazio tridimensionale, che collega tali

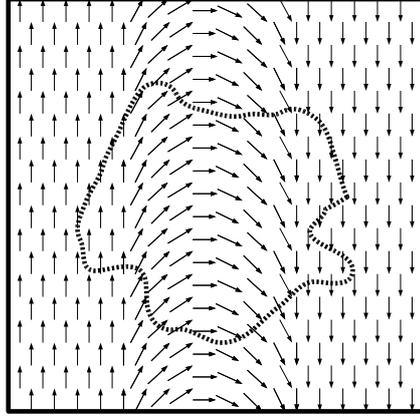


Figura 2.6: Regione bidimensionale dove il parametro d'ordine u ha modulo m e fase indicata dalla direzione delle frecce

vortici, è un difetto topologico di codimensione due ed è detto vortice curvilineo (si confronti paragrafo 1.4).

Tornando ad osservare la figura 2.7 si potrebbe essere indotti a pensare che nel punto in cui si colloca il difetto topologico (il nucleo del vortice), il parametro d'ordine u sia singolare. Questo a causa della fase θ , la quale assume valori diversi nelle diverse direzioni che si diramano da detto parametro. Questa evenienza porterebbe, però, a far divergere il termine di distorsione nella densità di energia GL (2.10).

Questo porterebbe a contributi almeno logaritmicamente divergenti nell'espressione dell'energia totale. Inoltre si avrebbe una non univocità del valore del parametro d'ordine nel nucleo del vortice. Per evitare questa situazione, necessariamente in tale punto deve essere $u = 0$, cioè il parametro d'ordine deve tendere al valore di equilibrio instabile per il potenziale $V(u)$. In analogia con quanto descritto per le pareti di dominio.

2.5 L'equazione di Gross-Pitaevskii

Nel precedente paragrafo abbiamo visto come i vortici possono emergere nel contesto dei sistemi termodinamici che sono descritti da un parametro d'ordine complesso. Quindi è lecito anche chiedersi a quali stati porti la coesistenza di più vortici nello stesso sistema. È abbastanza chiaro che l'energia debba dipendere da grandezze caratteristiche di questi stati di vortice, quali, ad esempio, le distanze relative tra i difetti topologici e il numero di avvolgimenti. A questo punto è possibile immaginare che si sviluppi una dinamica dei vortici. Per scrivere le leggi di tale dinamica, possiamo ricorrere all'idea che l'energia GL (2.10) costituisca l'hamiltoniana effettiva per il campo classico $u(\vec{r}, t)$. Sulla base di tutte le considerazioni svolte nell'ambito della teoria dei sistemi dinamici hamiltoniani (si veda [GPS05]), si è postulato ([Pis99]) che l'equazione del moto sia

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \bar{u}},$$

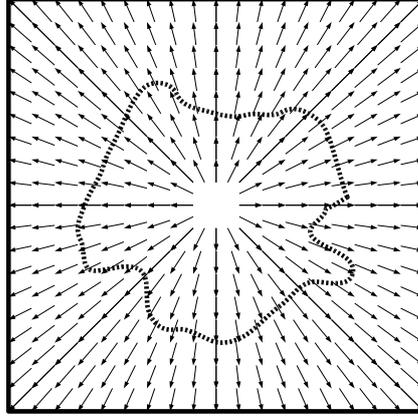


Figura 2.7: Regione bidimensionale dove il parametro d'ordine u ha modulo f_m e fase indicata dalla direzione delle frecce.

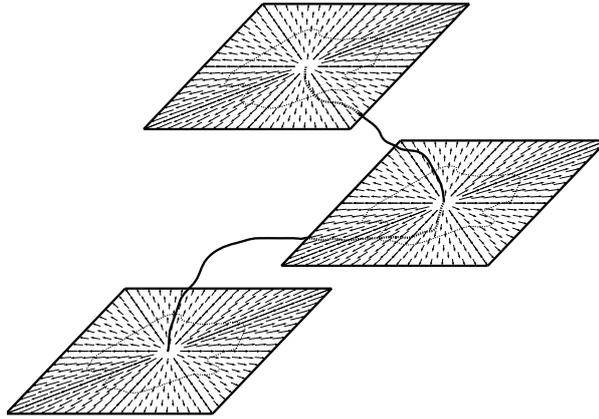


Figura 2.8: La figura mostra un possibile vortice curvilineo.

dove $\frac{\delta E}{\delta \bar{u}}$ è la derivata funzionale di E rispetto al complesso coniugato di u . Il secondo membro dell'equazione vale

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta \bar{u}} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left(\int g \nabla u \cdot \nabla (\bar{u} + \varepsilon \delta(y-x)) + \alpha(T - T_0) u (\bar{u} + \varepsilon \delta(y-x)) \right. \\ &\quad \left. + \beta (u (\bar{u} + \varepsilon \delta(y-x)))^2 dy \right) |_{\varepsilon=0} \\ &= -g \nabla^2 u + \alpha(T - T_0) u + 2\beta |u|^2 u, \end{aligned}$$

quindi l'equazione del del moto del campo u è

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -g \nabla^2 u + \alpha(T - T_0) u + 2\beta |u|^2 u, \quad (2.14)$$

che è detta equazione di Gross-Pitaevskii².

²Questo è il nome più comune che assume nell'ambito della fisica della materia condensata. Altri nomi con cui è nota sono: equazione di Schrödinger non lineare defocusing e, nel caso

Se il difetto topologico che si intende studiare è un vortice, come fatto in precedenza è opportuno scegliere per il parametro d'ordine la forma

$$u = fe^{i\theta}.$$

Sostituendo questa espressione nella (2.14) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -2g\nabla\theta \cdot \nabla f - gf\nabla^2\theta \quad (2.15)$$

per la parte immaginaria e

$$f\frac{\partial\theta}{\partial t} = g\nabla^2 f - gf|\nabla\theta|^2 - \alpha(T - T_0)f - 2\beta f^3 \quad (2.16)$$

per quella reale.

Lo studio di un singolo vortice stazionario risulta più semplice in coordinate polari (r, ϕ) . In queste coordinate un vortice posto nell'origine è esprimibile come

$$f = f(r) \quad \theta = M\phi.$$

Allora l'equazione (2.16) diventa

$$g\frac{d^2 f}{dr^2} + g\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - gM^2\frac{f}{r^2} - \alpha(T - T_0)f - 2\beta f^3 = 0.$$

Questa equazione può essere scritta in modo più conveniente adottando variabili adimensionali. Ponendo

$$\zeta = \frac{r}{\sqrt{2}r_0} = \frac{r}{\sqrt{\frac{g}{-\alpha(T - T_0)}}}$$

ed

$$f \rightarrow f\sqrt{\frac{-\alpha(T - T_0)}{2\beta}}$$

l'equazione diventa

$$\frac{d^2 f}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{df}{d\zeta} - M^2\frac{f^2}{\zeta^2} + f - f^3 = 0. \quad (2.17)$$

L'analisi di questa equazione verrà svolta nel prossimo capitolo ad applicazione dello studio dei vortici nell'elio superfluido.

Capitolo 3

Vortici nell'elio superfluido

Con la teoria di Landau, della quale si sono delineati alcuni aspetti nel capitolo precedente, è possibile dare una descrizione macroscopica della transizione superfluida che avviene nell'elio liquido alla temperatura $T_\lambda = 2.172\text{ K}$, a pressione atmosferica. Una trattazione più completa può essere svolta a partire dalla meccanica quantistica [Hua97]. Comunque questo tipo di teoria risulta essere piuttosto complessa perchè le particelle che compongono il fluido non possono essere considerate libere, come un gas ideale di particelle identiche, a causa delle forti interazioni esistenti tra gli atomi. Tuttavia, se si considera ancora valida l'approssimazione di gas reale, è possibile pensare che la transizione al superfluido sia, a tutti gli effetti, una condensazione di Bose-Einstein per gli atomi di elio, come proposto per la prima volta da London [Lon38]. In questa ipotesi la frazione di particelle N che si trovano nello stato fondamentale, rispetto al numero totale N_0 di particelle del liquido, è data dalla formula

$$\frac{N}{N_0} = 1 - \left(\frac{T}{T_\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}$$

che vale per un gas di bosoni degeneri [LL86].

Come notato da L. Tisza ([Tis38]), per adattare i dati del calore specifico misurati in laboratorio, è necessario sostituire l'esponente $\frac{3}{2}$ con 5. Nello stesso articolo Tisza fa notare che gli atomi nello stato fondamentale non dissipano la quantità di moto tramite l'emissione di fononi. Quindi egli propose di trattare l'elio superfluido come due fluidi diversi: uno composto dalle particelle nello stato fondamentale, che è propriamente chiamato superfluido, e una parte di fluido normale costituito dalle particelle negli stati eccitati.

Per una trattazione macroscopica sembra quindi utile scegliere il punto di vista di Tisza, adottando come parametro d'ordine la funzione d'onda di singola particella nello stato fondamentale. Infatti tutti gli atomi di elio, essendo bosoni, avranno la tendenza ad assumere lo stesso stato, cioè saranno descritti singolarmente dalla stessa funzione d'onda. A questo punto, però, la funzione d'onda effettiva di un sistema di bosoni è una combinazione simmetrica di tutte le funzioni d'onda di singola particella. Inoltre si dovrebbe tener conto anche delle possibili interazioni interparticellari, sintetizzate in un potenziale di campo medio. Essa assume allora il ruolo di una funzione d'onda per l'insieme degli atomi nello stato fondamentale.

3.1 Soluzione particolare dell'equazione di Gross-Pitaevskii

In base a quanto appena detto l'equazione di Gross-Pitaevskii (2.14) si può interpretare come l'equazione per la funzione d'onda degli N bosoni di massa m nello stato superfluido, precisamente

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -g\nabla^2\psi + \alpha(T - T_0)\psi + 2\beta|\psi|^2\psi, \quad (3.1)$$

con la condizione di normalizzazione

$$\int |\psi|^2 dV = N$$

dove l'integrale è esteso a tutto il volume occupato dal sistema. In questo modo, la densità di materia si può esprimere come

$$\rho = m|\psi|^2.$$

Dall'equazione (3.1) è possibile calcolare la variazione di ρ rispetto al tempo in un punto fissato dello spazio:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\nabla \cdot igm(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi).$$

Identifichiamo la quantità

$$\vec{J} = igm(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)$$

con la corrente di materia. Effettuando una trasformazione di Madelung, ovvero ponendo

$$\psi = fe^{i\theta},$$

la corrente di materia diventa

$$\vec{J} = 2gmf^2\nabla\theta = 2g\rho\nabla\theta.$$

La velocità del fluido può allora esprimersi come

$$\vec{v} = 2g\nabla\theta. \quad (3.2)$$

In analogia con l'equazione di Schrödinger poniamo

$$g = \frac{\hbar}{2m},$$

da cui

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m}\nabla\theta, \quad (3.3)$$

con la quale otteniamo una più palese interpretazione della velocità.

Dalla condizione di quantizzazione (2.13) e con l'uso della precedente relazione, si ottiene

$$\oint d\theta = \oint \nabla\theta \cdot d\vec{l} = \frac{m}{\hbar} \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi M, \quad (3.4)$$

3.1. SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE DI GROSS-PITAEVSKI33

cioè la forza di un vortice è sempre un multiplo intero (M) del quanto di circuitazione $\Gamma_0 = 2\pi\frac{\hbar}{m}$, ovvero

$$\Gamma = 2\pi M \frac{\hbar}{m}, \quad (3.5)$$

che fu trovata per la prima volta da Onsager (si veda §2.3.1 di [Don91]).

Effettuando la stessa trasformazione di Madelung anche per l'equazione (3.1), e separando parte reale e parte immaginaria si ottengono le due equazioni (2.15) e (2.16). Dividendo per f entrambi i membri di quest'ultima equazione si ottiene

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\hbar}{2m} \frac{\nabla^2 f}{f} + \frac{1}{2} \nabla\theta \cdot \nabla\theta + \alpha(T - T_0) + 2\beta \frac{\rho}{m} = 0. \quad (3.6)$$

Ricordando che le particelle della fase superfluida sono descritte tutte dalla funzione d'onda ψ , l'ultimo termine nell'equazione (3.1) tiene conto della interazione tra le stesse. Infatti esso può essere fatto derivare da un'espressione di energia potenziale per il campo ψ del tipo

$$U(x) = \int V(x - x') |\psi(x')|^2 dx'.$$

Se le particelle del superfluido si considerano puntiformi e si respingono a contatto, scegliendo $V(x - x') = 2\hbar\beta\delta(x - x')$ si ottiene

$$U(x) = 2\hbar\beta |\psi(x)|^2.$$

In altri termini l'autointerazione cubica di ψ fornisce l'effetto di campo medio di tutte le possibili interazioni che intercorrono tra le particelle. Questa autointerazione può essere riespressa tramite il cosiddetto termine di "pressione barotropica"

$$P = \frac{2\beta}{m} \rho^2.$$

Fissando la temperatura T ad un valore inferiore a T_0 e ponendo

$$\alpha(T - T_0) = \text{costante}$$

l'equazione (3.6) diventa

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\hbar}{2m} \frac{\nabla^2 f}{f} + \frac{1}{2} \nabla\theta \cdot \nabla\theta + \frac{P}{\rho} + \text{costante} = 0.$$

A meno del potenziale gravitazionale e del termine

$$B = \frac{\nabla^2 f}{f}, \quad (3.7)$$

detto potenziale quantico nella terminologia di Bohm [Boh52], questa è l'equazione di Eulero (1.13) per un fluido irrotazionale. Il termine (3.7) è di natura quantistica, infatti deriva dalla curvatura del modulo della funzione d'onda. Questo termine normalmente è trascurabile, perchè $|\psi| \approx \text{costante}$ in tutto il fluido, tranne che in prossimità delle pareti o dei nuclei dei vortici. Quindi il

superfluido può essere quasi sempre trattato come un fluido classico non viscoso e irrotazionale a meno di punti isolati.

In regime idrostatico la velocità del fluido è nulla e la sua densità è costante. La prima condizione equivale a dire che la fase globale può eventualmente cambiare in funzione del tempo, mentre la fase relativa tra i vari punti dello spazio deve essere costantemente nulla. Per semplicità poniamo

$$\theta = \text{costante.}$$

nell'equazione (3.6), che diventa

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 f}{f} + \alpha(T - T_0) + 2\beta f^2 = 0.$$

Dalla condizione che anche la densità del fluido sia costante deriva che

$$f = \bar{f},$$

dove \bar{f} è una costante. Con l'annullarsi delle sue derivate l'ultima equazione si riduce alla relazione algebrica

$$\bar{f}^2 = \frac{-\alpha(T - T_0)}{2\beta}, \quad (3.8)$$

che fornisce il valore della densità del superfluido (a meno della massa m) nel caso di distribuzioni uniformi. Nell'eventuale presenza di perturbazioni localizzate di questo stato, si assumerà il valore in (3.8) come valore asintotico per $|\psi|^2$.

Si consideri ora un vortice in regime stazionario $\psi = f(r)e^{iM\phi}$, posto nel centro di un sistema di coordinate cilindriche (r, ϕ, z) . L'equazione (3.6), in variabili adimensionali, si scrive

$$\frac{d^2 f}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{df}{d\zeta} - M^2 \frac{f^2}{\zeta^2} + f - f^3 = 0, \quad (3.9)$$

che coincide con la (2.17). L'equazione può essere risolta numericamente con la condizione $f \rightarrow 1$ quando $r \rightarrow \infty$ (si veda [Don91] e [Pis99]). Essa ha un andamento monotonamente crescente come quello riportato in figura 3.2, che è stata ottenuta integrando con il metodo di Eulero l'equazione (3.9). Si noti che nonostante la rozzezza dell'algoritmo adottato, l'andamento è simile a quello ottenuto con metodi più raffinati.

Si noti come la densità di superfluido sia costante in tutto il volume del sistema, tranne in prossimità del nucleo del vortice, dove decresce fino ad annullarsi sull'asse di simmetria. Inoltre le dimensioni del nucleo sono dell'ordine di grandezza del raggio di correlazione.

3.2 Reticoli di vortici

Si è visto che un vortice isolato può essere descritto in coordinate cilindriche (r, ϕ, z) da

$$\theta = M\phi \quad \text{e} \quad f = f(r),$$

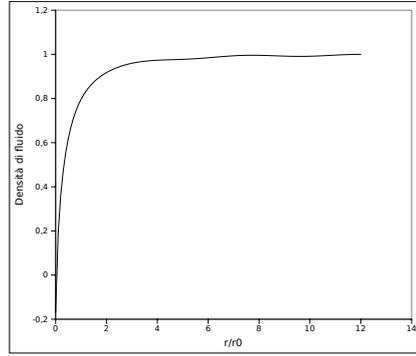


Figura 3.1: Queste figure mostrano l'andamento della densità di superfluido in prossimità del nucleo del vortice.

dove f è soluzione dell'equazione (3.9). L'energia del vortice può essere quindi calcolata come

$$E_0 = \int \frac{1}{2} \rho v^2 dV,$$

effettuato sull'intero volume occupato dal fluido. Se il vortice coincide con l'asse di simmetria di un contenitore cilindrico di raggio R e altezza w , trascurando il contributo del nucleo è possibile affermare che

$$E_0 = 2\pi w \int_{r_0}^R \frac{1}{2} \rho v^2 r dr,$$

dove r_0 è il raggio del nucleo. Dalla (3.2) è chiaro che il fluido è irrotazionale, quindi con lo stesso ragionamento usato per ricavare la (1.18), si conclude che

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} = M \frac{\hbar}{m} \frac{1}{r},$$

dove si è usata la (3.5). L'energia del vortice diventa quindi

$$E_0(M) = \pi w \rho M^2 \frac{\hbar^2}{m^2} \ln \left(\frac{R}{r_0} \right).$$

I contributi all'energia dovuti alla regione contenente il nucleo sono finiti, ma sono calcolabili solo per via numerica ([Don91] equazione (2.85)).

Sotto le stesse ipotesi, è possibile calcolare il momento angolare del fluido rispetto all'asse di simmetria. La sua espressione, approssimando ρ costante, è

$$L(M) = \int r \rho v dV = 2\pi w \rho M \frac{\hbar}{m} \int_0^R r dr = \pi w \rho M \frac{\hbar}{m} R^2.$$

Se il contenitore del fluido è posto in rotazione lungo il suo asse di simmetria, l'energia E del vortice può essere espressa come l'energia E_0 , calcolata nel sistema non inerziale, con l'aggiunta di un termine correttivo (si veda appendice B)

$$E = E_0(M) - \omega L(M),$$

dove ω è la velocità angolare con cui ruota il fluido e L è il momento angolare del vortice.

Mettendo in rotazione il contenitore, con il fluido inizialmente in condizioni idrostatiche, si avrà la formazione del primo vortice quando l'energia nel sistema in rotazione assume il valore minimo corrispondente ad una situazione statica, cioè 0 (si veda [Gho08]). Ma ciò si verifica quando $E_0(1) = L(1)\omega$ nell'espressione precedente. Questo si verificherà quando la velocità angolare del contenitore diventa

$$\omega \geq \frac{E_0(1)}{L(1)} = \frac{\hbar}{m} \frac{1}{R^2} \ln \left(\frac{R}{r_0} \right).$$

Con il progressivo aumento della velocità angolare, si generano una serie di vortici che tendono a disporsi in configurazioni regolari (detti reticoli di Abrikosov) tali da minimizzare l'energia totale del sistema. Questa minimizzazione può essere ottenuta grazie alla presenza di effetti dissipativi, dei quali non terremo conto. Una tale configurazione sperimentalmente osservata ([Pis99]) è rappresentata in figura 3.2.

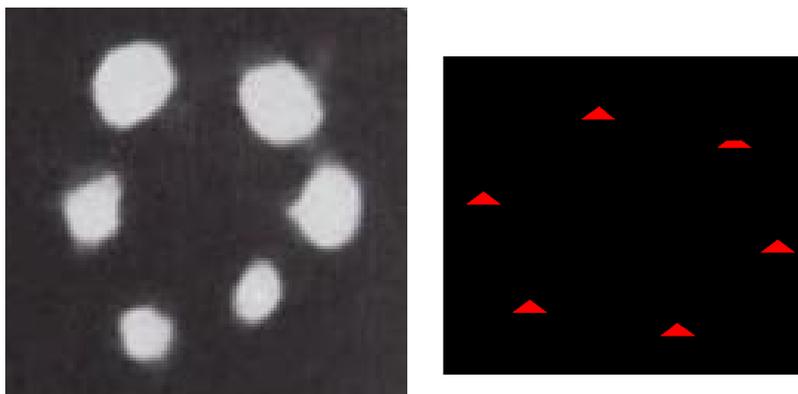


Figura 3.2: La figura mostra nella parte destra una configurazione stabile di vortici generati in un contenitore rotante. Nella parte sinistra è riportato il risultato della simulazione per le stesse condizioni.

3.3 Moto dei vortici in un superfluido

Lo studio dell'equazione di Gross-Pitaevskii (3.1) nella sua generalità è di grande complessità ed è spesso necessario ricorrere a delle rudi condizioni semplificatrici. Poichè nel presente lavoro siamo principalmente interessati al moto di vortici, immaginiamo di ridurre la teoria ad un fluido bidimensionale. Da un punto di vista sperimentale una simile situazione può essere raggiunta sottoponendo il superfluido ad una rotazione, in modo che il flusso sia confinato ovunque al piano ortogonale all'asse di rotazione. Se la velocità di rotazione non è eccessivamente elevata rispetto alle scale tipiche di quelle dei vortici (si confronti con quanto appena esposto nel paragrafo precedente), allora si generano dei vortici rettilinei, con assi di simmetria paralleli a quello di rotazione. Quando gli effetti

di diffusione della vorticità (dovuti alla viscosità della componente normale di fluido) si saranno propagati e si sarà ottenuto un flusso stazionario, si otterrà una dinamica di vortici puntuali sul piano.

In assenza di rotazione, venendo a mancare un asse preferenziale, i vortici possono incurvarsi all'interno del superfluido, a causa delle reciproche interazioni. Quindi il loro moto diventa estremamente più complesso (capitolo 5 di [Pis99]), il che esula dallo scopo del presente lavoro.

Supponiamo ora che le dimensioni del contenitore siano molto più grandi rispetto al sistema di vortici generato. Inoltre si è visto nel paragrafo 3.1 che la scala spaziale tipica dei vortici è il raggio di correlazione r_0 . Allora la maggior parte del fluido sarà uniformemente distribuito, con densità $\rho = m\bar{f}^2$, data dalla relazione (3.8). Quindi in “quasi” tutto il fluido la fase θ sarà determinata dall'equazione di Laplace

$$\nabla^2\theta = 0, \quad (3.10)$$

come si ricava dall'equazione (2.15). Il “quasi” si riferisce al fatto che l'equazione (3.10) è valida in un'approssimazione che necessita di ulteriori specificazioni, in una regione che si estenda a tutto il piano, ad esclusione di un numero di dischi, comprendenti i nuclei dei vortici, di raggi $r_i \gg r_0$.

Per semplicità di trattazione supponiamo inoltre che esista un insieme Q finito di tali dischi che non si sovrappongono, anzi che

$$L = \min\{L_{ij}\}_{ij \in Q} \gg \max\{r_i\}_{i \in Q}$$

dove $\{L_{ij}\}_{ij \in Q}$ sono le distanze tra i nuclei. Questa ipotesi fa emergere una scala naturale delle distanze, che si indicherà con $\epsilon = \frac{r_0}{L}$, per il sistema di vortici.

L'equazione di Laplace (3.10) deve essere completata con delle condizioni al bordo appropriate. Qui adottiamo delle condizioni di tipo Neumann imponendo che all'infinito il numero di avvolgimenti M è

$$M = \sum_{i \in Q} M_i,$$

dove $M_i \geq 0$ è il numero di avvolgimenti di un singolo vortice. Gli avvolgimenti sono presi tutti con lo stesso segno a causa delle modalità di generazione dei vortici (esposta nel paragrafo precedente).

Per quanto visto nei paragrafi precedenti circa la fase di un singolo vortice, tenendo conto della linearità dell'equazione di Laplace, possiamo affermare che, nelle regioni di validità della stessa, una soluzione è data da

$$\theta = \sum M_i \phi(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

dove $\phi(\vec{r}) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. La velocità del superfluido è data dalla (3.3), quindi si ottiene

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla\theta = \frac{\hbar}{m} \sum_i M_i \nabla\phi(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (3.11)$$

che è singolare nei punti in cui sono localizzati i nuclei dei vortici. Isolando il singolo vortice si nota che esso è soggetto ad un effetto di trascinamento dovuto a tutti gli altri, cioè

$$\vec{v}_s(j) = \frac{\hbar}{m} \sum_{i \neq j} M_i \nabla\phi(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (3.12)$$

Il contributo del vortice j –esimo nella (3.11) sarà molto più grande di $\vec{v}_s(j)$. Al fine di trovare il rapporto delle intensità di queste velocità si osservi che

$$|\vec{v}_s(j)| \sim \frac{\hbar}{mL},$$

mentre

$$|\vec{v}(\vec{r}_j)| \sim \frac{\hbar}{mr_0}.$$

Quindi

$$\frac{|\vec{v}_s(j)|}{|\vec{v}(\vec{r}_j)|} \approx \epsilon$$

Quindi il singolo vortice sarà trascinato con una velocità relativa

$$|\vec{v}_s| \sim O(\epsilon),$$

mantenendo in questo modo una sua identità strutturale.

Possiamo allora scrivere una soluzione approssimata dell'equazione di Gross-Pitaevkii nella forma

$$\theta = \sum_i M_i \nabla \phi(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

e

$$f = \bar{f} + O(\epsilon^2),$$

dove il termine $O(\epsilon^2)$ contiene le perturbazioni della densità entro i dischi, del tipo illustrato per il singolo vortice, cioè $f(\vec{r} \rightarrow \vec{r}_i(t)) \rightarrow 0$. Infine l'equazione per $\vec{r}_i(t)$ è data dalla (3.12), cioè

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^n \Gamma_j \frac{(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \\ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^n \Gamma_j \frac{(x_j - x_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \end{cases} \quad (3.13)$$

che è esattamente il sistema di Kirchhoff-Onsager (1.23) illustrato per i vortici classici.

Queste equazioni sono scritte nel sistema di riferimento inerziale in cui il fluido è a riposo. Se il fluido è posto in rotazione come nel caso trattato nei reticoli di vortici, ad una velocità angolare non troppo elevata è ancora possibile usare queste equazioni. Il moto osservato di un vortice sarà dato dalla composizione dei moti dati dalla rotazione del contenitore e dal moto proprio.

Per esempio nell'algoritmo presente in appendice A le condizioni iniziali sono tali da porre i vortici in una configurazione stabile di reticolo di vortici (vedi [Don91]). Il moto dei vortici appare come una rotazione rigida, che composta ad una seconda rotazione nel senso opposto produce la configurazione osservata sperimentalmente.

La procedura delineata è piuttosto rude e si dovrebbe in effetti adottare una versione modificata dello sviluppo multiscala, come quella sviluppata nei lavori [OS98a], [OS98b] e [OS96]. Lo studio dettagliato di questi lavori è al di là dello spazio concesso e non sarà trattato nella presente tesi. Qui osserviamo solo il fatto che con le tecniche adottate sopra, è possibile descrivere gli effetti di perturbazioni di piccola ampiezza (la cosiddetta radiazione) che viene eccitata nel fluido dall'interazione tra vortici.

Appendice A

Algoritmo di simulazione

Di seguito è riportato il codice sorgente del programma scritto per la risoluzione numerica delle equazioni del moto di 6 vortici. Le condizioni iniziali sono state poste in modo da ottenere un moto “rigido” dei vortici. Per la compilazione in Ubuntu è possibile usare il comando:

```
gcc -o nome nome_file.c -lglut
```

Il programma apre una finestra in cui appaiono dei triangoli di due possibili colori: i triangoli rossi corrispondono ad una circuitazione positiva, quelli blu ad una negativa. La dimensione di base dei triangoli è proporzionale alla forza del vortice.

```
#include <GL/gl.h>          /*****  
#include <GL/glu.h>        /*  Librerie grafiche Open GL  */  
#include <GL/glut.h>      /*****  
  
#define GAMMA1 1  
#define GAMMA2 1          /*****  
#define GAMMA3 1          /*    Circuitazione della velocità    */  
#define GAMMA4 1          /*          di ogni vortice          */  
#define GAMMA5 1          /*****  
#define GAMMA6 1          /*****  
  
#define INCREMENTO 0.001 /*  Passo utilizzato nella risoluzione  */  
/*  numerica delle equazioni differenziali */  
#define X1ZERO 0.25      /*****  
#define Y1ZERO 0.433    /*****  
  
#define X2ZERO 0.5  
#define Y2ZERO 0  
  
#define X3ZERO 0.25  
#define Y3ZERO -0.433   /*****  
/*    Condizioni iniziali della posizione  */  
/*          di ogni vortice          */  
#define X4ZERO -0.25    /*****  
#define Y4ZERO -0.433   /*****  
  
#define X5ZERO -0.5  
#define Y5ZERO 0  
  
#define X6ZERO -0.25  
#define Y6ZERO 0.433  
  
float x1=X1ZERO, y1=Y1ZERO, x2=X2ZERO, y2=Y2ZERO, x3=X3ZERO, y3=Y3ZERO,
```

```

x4=X4ZERO, y4=Y4ZERO, x5=X5ZERO, y5=Y5ZERO, x6=X6ZERO, y6=Y6ZERO,
x1_temp=0, y1_temp=0, x2_temp=0, y2_temp=0, x3_temp=0, y3_temp=0,
x4_temp=0, y4_temp=0, x5_temp=0, y5_temp=0, x6_temp=0, y6_temp=0;

int sign(float x)
{
    int segno;

    if (x<0.)
    {
        segno=-1;
    }
    else if (x==0.)
    {
        segno=0;
    }
    else
    {
        segno=1;
    }

    return segno;
}

void disegno(void)          /* Funzione che disegna gli oggetti sullo schermo */
{
    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT | GL_DEPTH_BUFFER_BIT);

    /******
    /*      VORTICE 1      */
    /******
    glLoadIdentity();
    glTranslatef(x1_temp-X1ZERO, y1_temp-Y1ZERO, 0.0);    /* Trasla oggetto triangolo*/

    glBegin(GL_TRIANGLES);    /* Oggetto triangolo */
    glColor3f((1+sign(GAMMA1))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA1))/2);    /* Colore del I vertice */
    glVertex3f(X1ZERO, Y1ZERO, 0.0);    /* Coordinate del I vertice */
    glColor3f((1+sign(GAMMA1))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA1))/2);    /* Colore del II vertice */
    glVertex3f(X1ZERO-0.02*abs(GAMMA1), Y1ZERO-0.02*abs(GAMMA1), 0.0);    /* Coordinate del II vertice */
    glColor3f((1+sign(GAMMA1))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA1))/2);    /* Colore del III vertice */
    glVertex3f(X1ZERO+0.02*abs(GAMMA1), Y1ZERO-0.02*abs(GAMMA1), 0.0);    /* Coordinate del III vertice */
    glEnd();    /* Fine oggetto triangolo */

    /******
    /*      VORTICE 2      */
    /******
    glLoadIdentity();
    glTranslatef(x2_temp-X2ZERO, y2_temp-Y2ZERO, 0.0);

    glBegin(GL_TRIANGLES);
    glColor3f((1+sign(GAMMA2))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA2))/2);
    glVertex3f(X2ZERO, Y2ZERO, 0.0);
    glColor3f((1+sign(GAMMA2))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA2))/2);
    glVertex3f(X2ZERO-0.02*abs(GAMMA2), Y2ZERO-0.02*abs(GAMMA2), 0.0);
    glColor3f((1+sign(GAMMA2))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA2))/2);
    glVertex3f(X2ZERO+0.02*abs(GAMMA2), Y2ZERO-0.02*abs(GAMMA2), 0.0);
    glEnd();

    /******

```

```

/*          VORTICE 3          */
/*****/
glLoadIdentity();
glTranslatef(x3_temp-X3ZERO, y3_temp-Y3ZERO, 0.0);

glBegin(GL_TRIANGLES);
glColor3f((1+sign(GAMMA3))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA3))/2);
glVertex3f(X3ZERO, Y3ZERO, 0.0);
glColor3f((1+sign(GAMMA3))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA3))/2);
glVertex3f(X3ZERO-0.02*abs(GAMMA3), Y3ZERO-0.02*abs(GAMMA3), 0.0);
glColor3f((1+sign(GAMMA3))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA3))/2);
glVertex3f(X3ZERO+0.02*abs(GAMMA3), Y3ZERO-0.02*abs(GAMMA3), 0.0);
glEnd();

/*****/
/*          VORTICE 4          */
/*****/
glLoadIdentity();
glTranslatef(x4_temp-X4ZERO, y4_temp-Y4ZERO, 0.0);

glBegin(GL_TRIANGLES);
glColor3f((1+sign(GAMMA4))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA4))/2);
glVertex3f(X4ZERO, Y4ZERO, 0.0);
glColor3f((1+sign(GAMMA4))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA4))/2);
glVertex3f(X4ZERO-0.02*abs(GAMMA4), Y4ZERO-0.02*abs(GAMMA4), 0.0);
glColor3f((1+sign(GAMMA4))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA4))/2);
glVertex3f(X4ZERO+0.02*abs(GAMMA4), Y4ZERO-0.02*abs(GAMMA4), 0.0);
glEnd();

/*****/
/*          VORTICE 5          */
/*****/
glLoadIdentity();
glTranslatef(x5_temp-X5ZERO, y5_temp-Y5ZERO, 0.0);

glBegin(GL_TRIANGLES);
glColor3f((1+sign(GAMMA5))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA5))/2);
glVertex3f(X5ZERO, Y5ZERO, 0.0);
glColor3f((1+sign(GAMMA5))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA5))/2);
glVertex3f(X5ZERO-0.02*abs(GAMMA5), Y5ZERO-0.02*abs(GAMMA5), 0.0);
glColor3f((1+sign(GAMMA5))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA5))/2);
glVertex3f(X5ZERO+0.02*abs(GAMMA5), Y5ZERO-0.02*abs(GAMMA5), 0.0);
glEnd();

/*****/
/*          VORTICE 6          */
/*****/
glLoadIdentity();
glTranslatef(x6_temp-X6ZERO, y6_temp-Y6ZERO, 0.0);

glBegin(GL_TRIANGLES);
glColor3f((1+sign(GAMMA6))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA6))/2);
glVertex3f(X6ZERO, Y6ZERO, 0.0);
glColor3f((1+sign(GAMMA6))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA6))/2);
glVertex3f(X6ZERO-0.02*abs(GAMMA6), Y6ZERO-0.02*abs(GAMMA6), 0.0);
glColor3f((1+sign(GAMMA6))/2, 0.0, (1-sign(GAMMA6))/2);
glVertex3f(X6ZERO+0.02*abs(GAMMA6), Y6ZERO-0.02*abs(GAMMA6), 0.0);
glEnd();

```

```

/*****
/*          EQUAZIONE 1          */
/*****
    x1_temp=x1+INCREMENTO*( (GAMMA2/6.28)*(y2-y1)/((x2-x1)*(x2-x1)+(y2-y1)*(y2-y1))+
(GAMMA3/6.28)*(y3-y1)/((x3-x1)*(x3-x1)+(y3-y1)*(y3-y1))+
(GAMMA4/6.28)*(y4-y1)/((x4-x1)*(x4-x1)+(y4-y1)*(y4-y1))+
(GAMMA5/6.28)*(y5-y1)/((x5-x1)*(x5-x1)+(y5-y1)*(y5-y1))+
(GAMMA6/6.28)*(y6-y1)/((x6-x1)*(x6-x1)+(y6-y1)*(y6-y1)) );

y1_temp=y1+INCREMENTO*( -(GAMMA2/6.28)*(x2-x1)/((x2-x1)*(x2-x1)+(y2-y1)*(y2-y1))
-(GAMMA3/6.28)*(x3-x1)/((x3-x1)*(x3-x1)+(y3-y1)*(y3-y1))
-(GAMMA4/6.28)*(x4-x1)/((x4-x1)*(x4-x1)+(y4-y1)*(y4-y1))
-(GAMMA5/6.28)*(x5-x1)/((x5-x1)*(x5-x1)+(y5-y1)*(y5-y1))
-(GAMMA6/6.28)*(x6-x1)/((x6-x1)*(x6-x1)+(y6-y1)*(y6-y1)) );

/*****
/*          EQUAZIONE 2          */
/*****
    x2_temp=x2+INCREMENTO*( (GAMMA1/6.28)*(y1-y2)/((x1-x2)*(x1-x2)+(y1-y2)*(y1-y2))+
(GAMMA3/6.28)*(y3-y2)/((x3-x2)*(x3-x2)+(y3-y2)*(y3-y2))+
(GAMMA4/6.28)*(y4-y2)/((x4-x2)*(x4-x2)+(y4-y2)*(y4-y2))+
(GAMMA5/6.28)*(y5-y2)/((x5-x2)*(x5-x2)+(y5-y2)*(y5-y2))+
(GAMMA6/6.28)*(y6-y2)/((x6-x2)*(x6-x2)+(y6-y2)*(y6-y2)) );

y2_temp=y2+INCREMENTO*( -(GAMMA1/6.28)*(x1-x2)/((x1-x2)*(x1-x2)+(y1-y2)*(y1-y2))
-(GAMMA3/6.28)*(x3-x2)/((x3-x2)*(x3-x2)+(y3-y2)*(y3-y2))
-(GAMMA4/6.28)*(x4-x2)/((x4-x2)*(x4-x2)+(y4-y2)*(y4-y2))
-(GAMMA5/6.28)*(x5-x2)/((x5-x2)*(x5-x2)+(y5-y2)*(y5-y2))
-(GAMMA6/6.28)*(x6-x2)/((x6-x2)*(x6-x2)+(y6-y2)*(y6-y2)) );

/*****
/*          EQUAZIONE 3          */
/*****
    x3_temp=x3+INCREMENTO*( (GAMMA1/6.28)*(y1-y3)/((x1-x3)*(x1-x3)+(y1-y3)*(y1-y3))+
(GAMMA2/6.28)*(y2-y3)/((x2-x3)*(x2-x3)+(y2-y3)*(y2-y3))+
(GAMMA4/6.28)*(y4-y3)/((x4-x3)*(x4-x3)+(y4-y3)*(y4-y3))+
(GAMMA5/6.28)*(y5-y3)/((x5-x3)*(x5-x3)+(y5-y3)*(y5-y3))+
(GAMMA6/6.28)*(y6-y3)/((x6-x3)*(x6-x3)+(y6-y3)*(y6-y3)) );

y3_temp=y3+INCREMENTO*( -(GAMMA1/6.28)*(x1-x3)/((x1-x3)*(x1-x3)+(y1-y3)*(y1-y3))
-(GAMMA2/6.28)*(x2-x3)/((x2-x3)*(x2-x3)+(y2-y3)*(y2-y3))
-(GAMMA4/6.28)*(x4-x3)/((x4-x3)*(x4-x3)+(y4-y3)*(y4-y3))
-(GAMMA5/6.28)*(x5-x3)/((x5-x3)*(x5-x3)+(y5-y3)*(y5-y3))
-(GAMMA6/6.28)*(x6-x3)/((x6-x3)*(x6-x3)+(y6-y3)*(y6-y3)) );

/*****
/*          EQUAZIONE 4          */
/*****
    x4_temp=x4+INCREMENTO*( (GAMMA1/6.28)*(y1-y4)/((x1-x4)*(x1-x4)+(y1-y4)*(y1-y4))+
(GAMMA2/6.28)*(y2-y4)/((x2-x4)*(x2-x4)+(y2-y4)*(y2-y4))+
(GAMMA3/6.28)*(y3-y4)/((x3-x4)*(x3-x4)+(y3-y4)*(y3-y4))+
(GAMMA5/6.28)*(y5-y4)/((x5-x4)*(x5-x4)+(y5-y4)*(y5-y4))+
(GAMMA6/6.28)*(y6-y4)/((x6-x4)*(x6-x4)+(y6-y4)*(y6-y4)) );

y4_temp=y4+INCREMENTO*( -(GAMMA1/6.28)*(x1-x4)/((x1-x4)*(x1-x4)+(y1-y4)*(y1-y4))
-(GAMMA2/6.28)*(x2-x4)/((x2-x4)*(x2-x4)+(y2-y4)*(y2-y4))
-(GAMMA3/6.28)*(x3-x4)/((x3-x4)*(x3-x4)+(y3-y4)*(y3-y4))
-(GAMMA5/6.28)*(x5-x4)/((x5-x4)*(x5-x4)+(y5-y4)*(y5-y4))
-(GAMMA6/6.28)*(x6-x4)/((x6-x4)*(x6-x4)+(y6-y4)*(y6-y4)) );

```

```

/*****/
/*      EQUAZIONE 5      */
/*****/
x5_temp=x5+INCREMENTO*( (GAMMA1/6.28)*(y1-y5)/((x1-x5)*(x1-x5)+(y1-y5)*(y1-y5))+
(GAMMA2/6.28)*(y2-y5)/((x2-x5)*(x2-x5)+(y2-y5)*(y2-y5))+
(GAMMA3/6.28)*(y3-y5)/((x3-x5)*(x3-x5)+(y3-y5)*(y3-y5))+
(GAMMA4/6.28)*(y4-y5)/((x4-x5)*(x4-x5)+(y4-y5)*(y4-y5))+
(GAMMA6/6.28)*(y6-y5)/((x6-x5)*(x6-x5)+(y6-y5)*(y6-y5)) );

y5_temp=y5+INCREMENTO*( -(GAMMA1/6.28)*(x1-x5)/((x1-x5)*(x1-x5)+(y1-y5)*(y1-y5))
-(GAMMA2/6.28)*(x2-x5)/((x2-x5)*(x2-x5)+(y2-y5)*(y2-y5))
-(GAMMA3/6.28)*(x3-x5)/((x3-x5)*(x3-x5)+(y3-y5)*(y3-y5))
-(GAMMA4/6.28)*(x4-x5)/((x4-x5)*(x4-x5)+(y4-y5)*(y4-y5))
-(GAMMA6/6.28)*(x6-x5)/((x6-x5)*(x6-x5)+(y6-y5)*(y6-y5)) );

/*****/
/*      EQUAZIONE 6      */
/*****/
x6_temp=x6+INCREMENTO*( (GAMMA1/6.28)*(y1-y6)/((x1-x6)*(x1-x6)+(y1-y6)*(y1-y6))+
(GAMMA2/6.28)*(y2-y6)/((x2-x6)*(x2-x6)+(y2-y6)*(y2-y6))+
(GAMMA3/6.28)*(y3-y6)/((x3-x6)*(x3-x6)+(y3-y6)*(y3-y6))+
(GAMMA4/6.28)*(y4-y6)/((x4-x6)*(x4-x6)+(y4-y6)*(y4-y6))+
(GAMMA5/6.28)*(y5-y6)/((x5-x6)*(x5-x6)+(y5-y6)*(y5-y6)) );

y6_temp=y6+INCREMENTO*( -(GAMMA1/6.28)*(x1-x6)/((x1-x6)*(x1-x6)+(y1-y6)*(y1-y6))
-(GAMMA2/6.28)*(x2-x6)/((x2-x6)*(x2-x6)+(y2-y6)*(y2-y6))
-(GAMMA3/6.28)*(x3-x6)/((x3-x6)*(x3-x6)+(y3-y6)*(y3-y6))
-(GAMMA4/6.28)*(x4-x6)/((x4-x6)*(x4-x6)+(y4-y6)*(y4-y6))
-(GAMMA5/6.28)*(x5-x6)/((x5-x6)*(x5-x6)+(y5-y6)*(y5-y6)) );

/*****/
/*      ASSEGNAMENTI      */
/*****/

x1=x1_temp;
y1=y1_temp;

x2=x2_temp;
y2=y2_temp;

x3=x3_temp;
y3=y3_temp;

x4=x4_temp;
y4=y4_temp;

x5=x5_temp;
y5=y5_temp;

x6=x6_temp;
y6=y6_temp;

glutSwapBuffers(); /* Disegna oggetti*/
}

int main(int argc, char** argv)
{
glutInit(&argc, argv);

```

```
glutInitDisplayMode(GLUT_DOUBLE | GLUT_RGB);
glutInitWindowSize(800, 600);      /*Dimensione finestra*/
glutInitWindowPosition(100, 100);  /*Punto dello schermo in cui disegnare la finestra*/

glutCreateWindow("Simulatore");     /*Nome programma*/
glutDisplayFunc(disegno);
glutIdleFunc(&disegno);
glutMainLoop();                    /*Inizia ciclo di visualizzazione*/
return 0;
}
```

Appendice B

Hamiltoniana in un sistema non inerziale

Se si vuole che le equazioni di Eulero-Lagrange descrivano correttamente il moto in un sistema di riferimento non inerziale, la forma della lagrangiana deve essere modificata.

Si consideri un sistema di riferimento non inerziale K_1 che si muove a velocità $\vec{V}(t)$ rispetto a un sistema inerziale K_0 . Data una particella che si muove a velocità \vec{v}_1 in K_1 , la velocità in K_0 sarà data dalla relazione tra velocità

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{V}(t)$$

In K_0 la lagrangiana della particella assume la forma

$$L_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - U(\vec{r}_0)$$

dove m è la massa della particella, \vec{r}_0 è il suo raggio vettore in K_0 e $U(\vec{r}_0)$ la sua energia potenziale.

Applicando le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_0} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_0} = 0$$

si ottiene la nota equazione di Newton:

$$m \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_0}$$

Sostituendo l'espressione della velocità \vec{v}_0 nella lagrangiana si ottiene

$$L_1 = \frac{1}{2}m \left(v_1^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{V}(t) + V^2(t) \right) - U(r_1)$$

dove \vec{r}_1 è il raggio vettore della particella nel sistema di riferimento K_1 . La funzione $V^2(t)$ può essere considerata come la derivata totale rispetto al tempo di un'altra funzione, quindi le equazioni del moto rimangono invariate se viene eliminata. Inoltre

$$m\vec{v}_1 \cdot \vec{V}(t) = m\vec{V}(t) \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{V}(t) \cdot \vec{r}_1) - m \frac{d\vec{V}(t)}{dt} \cdot \vec{r}_1$$

Come detto sopra è possibile eliminare la derivata totale e quindi

$$L_1 = \frac{1}{2}v_1^2 - m\vec{A}(t) \cdot \vec{r}_1 - U(\vec{r}_1)$$

dove $\vec{A}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ l'accelerazione del sistema K_1 misurata nel sistema inerziale K_0 . Per scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange si calcola che

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} = m\vec{v}_1 \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} = -m\vec{A}(t) - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}$$

e quindi le equazioni del moto sono

$$m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -m\vec{A}(t) - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}$$

Si nota che nell'equazione di Newton si è aggiunto un termine, $-m\vec{A}(t)$ che è una forza fittizia, cioè non prodotta da nessun oggetto reale, ma dovuta alla non inerzialità del sistema di riferimento.

Si consideri ora un sistema K in cui l'origine coincide con quella di K_1 , ma ha una rotazione con velocità angolare $\vec{\Omega}$. Data una particella con velocità \vec{v} nel sistema K , la velocità \vec{v}_1 in K_1 è

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

dove \vec{r} è il raggio vettore della particella in K e coincide con quello in K_1 . Sostituendo questa espressione nella lagrangiana si ha

$$L = \frac{1}{2}m \left[v^2 + 2\vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + |\vec{\Omega} \times \vec{r}|^2 \right] - m\vec{A}(t) \cdot \vec{r} - U(\vec{r})$$

Il primo termine nelle equazioni di Eulero-Lagrange è

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m \frac{\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + m\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Per ottenere la derivata rispetto ad \vec{r} conviene calcolare il differenziale della lagrangiana

$$dL = m\vec{v} \cdot d\vec{v} + m d\vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + m\vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times d\vec{r}) + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\Omega} \times d\vec{r}) - m\vec{A}(t) \cdot d\vec{r} - \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial d\vec{r}} d\vec{r}$$

È possibile riscrivere i termini $\vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times d\vec{r})$ e $(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\Omega} \times d\vec{r})$ in modo da porre in evidenza $d\vec{r}$. Infatti

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times d\vec{r}) &= \delta_{ij} v_i \epsilon_{jkl} \Omega_k dr_l \\ &= v_1(\Omega_2 dr_3 - \Omega_3 dr_2) + v_2(\Omega_3 dr_1 - \Omega_1 dr_3) + v_3(\Omega_1 dr_2 - \Omega_2 dr_1) \\ &= v_1 \Omega_2 dr_3 - v_1 \Omega_3 dr_2 + v_2 \Omega_3 dr_1 - v_2 \Omega_1 dr_3 + v_3 \Omega_1 dr_2 - v_3 \Omega_2 dr_1 \\ &= dr_1(v_2 \Omega_3 - v_3 \Omega_2) + dr_2(v_3 \Omega_1 - v_1 \Omega_3) + dr_3(v_1 \Omega_2 - v_2 \Omega_1) \\ &= d\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{\Omega}) \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo

$$\begin{aligned}
(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\Omega} \times d\vec{r}) &= \delta_{ij} (\vec{\Omega} \times \vec{r})_i (\vec{\Omega} \times d\vec{r})_j = \delta_{ij} \epsilon_{ikl} \Omega_k r_l \epsilon_{jmn} \Omega_m dr_n \\
&= (\Omega_2 r_3 - \Omega_3 r_2) (\Omega_2 dr_3 - \Omega_3 dr_2) + (\Omega_3 r_1 - \Omega_1 r_3) (\Omega_3 dr_1 - \Omega_1 dr_3) \\
&\quad + (\Omega_1 r_2 - \Omega_2 r_1) (\Omega_1 dr_2 - \Omega_2 dr_1) \\
&= dr_1 (\Omega_3^2 r_1 - \Omega_3 \Omega_1 r_3 + \Omega_2^2 r_1 - \Omega_1 \Omega_2 r_2) \\
&\quad + dr_2 (\Omega_1^2 r_2 - \Omega_1 \Omega_2 r_1 + \Omega_3^2 r_2 - \Omega_2 \Omega_3 r_3) \\
&\quad + dr_3 (\Omega_2^2 r_3 - \Omega_2 \Omega_3 r_2 + \Omega_1^2 r_3 - \Omega_3 \Omega_1 r_1) \\
&= dr_1 [(\Omega_3 r_1 - \Omega_1 r_3) \Omega_3 - (\Omega_1 r_2 - \Omega_2 r_1) \Omega_2] \\
&\quad + dr_2 [(\Omega_1 r_2 - \Omega_2 r_1) \Omega_1 - (\Omega_2 r_3 - \Omega_3 r_2) \Omega_3] \\
&\quad + dr_3 [(\Omega_2 r_3 - \Omega_3 r_2) \Omega_2 - (\Omega_3 r_1 - \Omega_1 r_3) \Omega_1] \\
&= dr_1 [(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}]_1 + dr_2 [(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}]_2 + dr_3 [(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}]_3 \\
&= d\vec{r} \cdot [(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}].
\end{aligned}$$

Combinando assieme questi risultati si ottiene

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m(\vec{v} \times \vec{\Omega}) + m[(\vec{\Omega} \times \vec{v}) \times \vec{\Omega}] - m\vec{A}(t) - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}.$$

In definitiva le equazioni del moto sono

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{A}(t) + 2m(\vec{v} \times \vec{\Omega}) + m\vec{r} \times \frac{d\vec{\Omega}}{dt} + m[(\vec{\Omega} \times \vec{v}) \times \vec{\Omega}].$$

I termini aggiuntivi sono tutte forze fittizie: il termine con la derivata totale rispetto al tempo di $\vec{\Omega}$ è dovuto alla accelerazione della rotazione, il termine $m[(\vec{\Omega} \times \vec{v}) \times \vec{\Omega}]$ è chiamato forza centrifuga e infine il termine $2m(\vec{v} \times \vec{\Omega})$ è detto forza di Coriolis.

Per ottenere l'hamiltoniana della particella nel sistema di riferimento non inerziale è sufficiente effettuare la trasformata di Legendre:

$$H = m\vec{r} \cdot \vec{v} - L$$

Per definizione il momento coniugato è

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m(\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

da cui

$$\begin{aligned}
H &= mv^2 + m\vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - L \\
&= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m|\vec{\Omega} \times \vec{r}|^2 + m\vec{A}(t) \cdot \vec{r} + U(\vec{r})
\end{aligned}$$

Un caso particolare è quello in cui il sistema di riferimento non inerziale ha solo un moto di rotazione costante. In questo caso risulta

$$\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

che sostituita nell'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) - \frac{1}{2}m|\vec{\Omega} \times \vec{r}|^2$$

rende possibile esprimerla in termini di grandezze misurate nel sistema inerziale K_0 :

$$H = \frac{1}{2}mv_0^2 - m\vec{v}_0 \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + U(\vec{r}) = H_0 - m\vec{v}_0 \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

Esprimendo il termine

$$m\vec{v}_0 \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times (\vec{r} \times m\vec{v}_0) = \vec{\Omega} \cdot \vec{L}_0$$

dove \vec{L}_0 il momento angolare della particella rispetto all'origine in K_0 , l'hamiltoniana diventa

$$H = H_0 - \vec{\Omega} \cdot \vec{L}_0$$

Bibliografia

- [Boh52] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. i. *Phys. Rev.*, 85(2):166–179, Jan 1952.
- [Don91] R. J. Donnelly. *Quantized Vortices in Helium II*. Cambridge University Press, 1991.
- [FLS07] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *La Fisica di Feynman*, volume 2-Elettromagnetismo e materia. Zanichelli, second edition, 2007.
- [Gho08] S. Ghosh. Vortices in atomic bose-einstein condensates: an introduction. *arXiv:cond-mat/0405589v1*, 2008.
- [GPS05] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Meccanica Classica*. Zanichelli, 2005.
- [Gro61] E. P. Gross. Structure of quantized vortex in boson system. *Il Nuovo Cimento*, 20(3):454, 1961.
- [Hua97] K. Huang. *Meccanica Statistica*. Zanichelli, 1997.
- [Lam32] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, sixth edition, 1932.
- [LL86] L. D. Landau and E. M. Lifšic. *Fisica Statistica, Fisica Teorica 5*. Editori Riuniti, 1986.
- [Lon38] F. London. The λ -phenomenon of liquid helium and the bose-einstein degeneracy. *Nature*, 141:643, 1938.
- [OS96] Yu.N. Ovchinnikov and I.M. Sigal. The ginzburg-landau equation ii. *Pre-print*, 1996.
- [OS98a] Yu.N. Ovchinnikov and I.M. Sigal. The ginzburg-landau equation. iii. vortex dynamics. *Nonlinearity*, 11:1277–1294, 1998.
- [OS98b] Yu.N. Ovchinnikov and I.M. Sigal. On the ginzburg-landau and related equations. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)*, 1998.
- [Pis99] L. M. Pismen. *Vortices in Nonlinear Fields*. OXFORD University Press, 1999.
- [Tis38] L. Tisza. Transport phenomena in helium ii. *Nature*, 141:913, 1938.

Indice analitico

- Algoritmo di simulazione, 39
- Condizione
 - di incomprimibilità, 5
 - di non viscosità, 5
- Densità di energia
 - di Ginzburg-Landau (GL), 17
- Difetto topologico, 24
 - codimensione, 24
 - parete di dominio, 24
 - vortice, 24
 - vortice curvilineo, 24
- Energia di un vortice, 34
- Equazione
 - di Eulero, 5
 - del bordo del fluido, 4
 - del moto di un vortice, 11, 36
 - di continuità, 4
 - di Gross-Pitaevskii, 27, 32
 - di Navier-Stokes, 1
- Fase di un sistema, 15
- Filamento vorticoso, 7
- Fluido classico, 1
- Forza
 - centrifuga, 45
 - di Coriolis, 45
 - fittizia, 45
- Hamiltoniana
 - di Kirchoff-Onsager, 11
 - sistema non inerziale, 45
- Lagrangiana
 - sistema non inerziale, 45
- Linea vorticoso, 5
- Numero di avvolgimenti, 24
- Parametro d'ordine, 15
- fluttuazioni, 17
- Potenziale velocità, 5
- Reticoli di vortici, 34
- Rottura della simmetria, 15, 17
- Transizione di fase, 15
- Tubo di flusso, 5
- Viscosità, 1, 14
- Vortice
 - curvilineo, 7
 - di Rankine, 8
 - forza di, 7
 - generazione, 14
 - in un fluido classico, 7
- Vorticità, 5