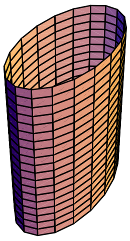
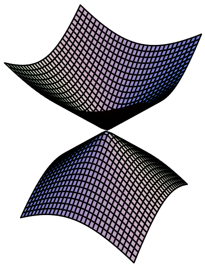
Rosa Anna Marinosci

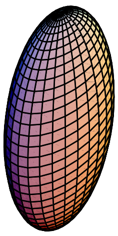


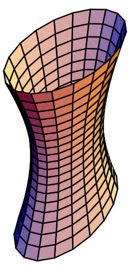


Complementi di Geometria

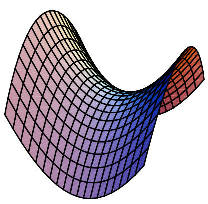
(Coniche e Quadriche)

Lezioni raccolte a cura della Dott.ssa Barbara De Leo





Università del Salento
Facoltà di Ingegneria
a.a. 2009/2010



Indice

Capitolo 1

Ampliamenti del piano euclideo

1.1 Il piano euclideo ampliato con i punti impropri

La relazione binaria $\sim$ nell'insieme $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ così definita:

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \exists \varrho \in \mathbb{R} - \{0\} \ni' (y_1, y_2, y_3) = (\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3)$$

è una relazione di equivalenza; l'insieme quoziente

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}}{\sim}$$

si chiama *piano numerico proiettivo reale*.
Nel seguito si denoterà con $p : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, la surgezione canonica, cioè l'applicazione che ad ogni terna ordinata $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ associa la classe di equivalenza da essa rappresentata.

Nell'insieme $\sum$ delle rette del piano euclideo Π, la relazione di parallelismo $\mathcal{P}$:

$$r\mathcal{P}s \Leftrightarrow r||s$$

è una relazione d'equivalenza; l'insieme quoziente:

$$i_\infty = \frac{\sum}{\mathcal{P}}$$

si chiama insieme delle *direzioni* del piano euclideo Π.
Un legame tra il piano numerico proiettivo reale ed il piano euclideo ampliato con le direzioni, è stabilito dal teorema seguente.

Teorema 1.1.1. *Il piano numerico proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è bigettivo all'insieme $\Pi \cup i_\infty$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{R}(O,x,y)$ un riferimento affine su Π; si consideri l'applicazione:

$$k : \Pi \cup i_\infty \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

così definita:

$$\forall \;\; P(x,y) \in \Pi : \;\; k(P) = p(x,y,1)$$
$$\forall \;\; R_\infty \in i_\infty : \;\; k(R_\infty) = p(b,-a,0)$$

dove $r : ax+by+c=0$ è una retta che rappresenta la direzione R_∞ (si osservi che $l=b$ e $m=-a$ sono parametri direttori della retta r).

Si prova facilmente che k è bigettiva.
Infatti, sia $p(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$; se $x_3 \neq 0$, si considera il punto $P(x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}) \in \Pi$; per esso si ha:

$$k(P) = p(x,y,1) = p(x_1,x_2,x_3);$$

se poi $x_3 = 0$ si considera la retta $r : ax+by+c=0$ con $a=-x_2$ e $b=x_1$; la direzione R_∞ della retta r soddisfa alla seguente uguaglianza:

$$k(R_\infty) = p(-b,a,0) = p(x_1,x_2,x_3);$$

si conclude così che k è suriettiva.
Per dimostrare che k è iniettiva si osserva dapprima che se due elementi di $\Pi \cup i_\infty$ hanno la stessa immagine tramite k, allora essi sono o due punti del piano euclideo oppure due direzioni. Siano allora $P(x,y)$ e $Q(x',y')$ due punti di Π tali che $k(P) = k(Q)$ ossia tali che $p(x,y,1) = p(x',y',1)$; allora esiste $\varrho \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $x' = \varrho x, y' = \varrho y, 1 = \varrho$, da cui segue $(x,y) = (x',y')$ e quindi $P = Q$. Siano R_∞ ed S_∞ due direzioni definite rispettivamente dalle rette $r : ax+by+c=0$ ed $s : a'x+b'y+c'=0$, tali che $k(R_\infty) = k(S_\infty)$; allora si ha $p(b,-a,0) = p(b',-a',0)$ e quindi esiste $\varrho \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $b' = \varrho b$ e $a' = \varrho a$, ma questo implica che $r||s$ e quindi $R_\infty = S_\infty$. $\square$

L'applicazione k definita nel precedente teorema si chiama *sistema di coordinate omogenee* associato al riferimento affine $\mathcal{R}(O,x,y)$ prefissato. Se $P \in \Pi \cup i_\infty$ e $k(P) = p(x_1,x_2,x_3)$, la terna ordinata (x_1,x_2,x_3) si chiama *terna delle coordinate omogenee* di P; si osservi che $(\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3)$, con $\varrho \in \mathbb{R} - \{0\}$, è ancora terna di coordinate omogenee di P. Se P è un punto del piano euclideo Π, allora le sue coordinate omogenee (x_1,x_2,x_3) hanno $x_3 \neq 0$; le coordinate cartesiane di P sono $(x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3})$. Se P è una direzione, per le coordinate omogenee (x_1,x_2,x_3) di P si ha sempre $x_3 = 0$.

Nel seguito l'insieme $\bar{\Pi} = \Pi \cup i_\infty$ si chiamerà *piano euclideo ampliato con i punti impropri*; i punti di Π si chiameranno *punti propri*, gli elementi di i_∞ si chiameranno *punti impropri* (o *punti all'infinito*).

Le *rette* del piano euclideo ampliato $\bar{\Pi}$ sono i_∞ ed i sottoinsiemi del tipo $r \cup R_\infty$ (r = retta del piano euclideo, R_∞ direzione definita dalla retta r).

La retta i_∞ si chiama *retta impropria* o anche *retta all'infinito*, una retta del tipo $r \cup R_\infty$ si chiama *retta propria* e nel seguito si indicherà semplicemente con r (sottintendendo l'ampliamento con il suo punto improprio).

Fissato su $\bar{\Pi}$ un sistema di coordinate omogenee:

$$k : \Pi \cup i_\infty \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

associato ad un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$, si può ottenere una *rappresentazione analitica delle rette* di $\bar{\Pi}$ nel modo seguente:

- Alla retta impropria i_∞ si associa l'equazione $x_3 = 0$; infatti tutti i punti impropri hanno coordinate omogenee del tipo $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$ che soddisfano ovviamente l'equazione $x_3 = 0$; viceversa ogni soluzione non banale $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ dell'equazione $x_3 = 0$ è terna di coordinate omogenee di un punto improprio.

- Alla retta propria $r \cup R_\infty$, con $r : ax + by + c = 0$ si associa l'equazione lineare omogenea:
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \tag{1.1.1}$$
infatti tale equazione è soddisfatta dalle coordinate omogenee $(b, -a, 0)$ di R_∞ e dalle coordinate omogenee $(\bar{x}, \bar{y}, 1)$ dei punti propri $P(\bar{x}, \bar{y}) \in r$. Viceversa ogni soluzione $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \neq (0, 0, 0)$ dell'equazione (1.1.1) è una terna di coordinate omogenee o di un punto $P \in r$ oppure di R_∞.

Per questo motivo l'equazione (1.1.1) si chiama *equazione in coordinate omogenee* della retta r, (rispetto al sistema di coordinate omogenee k o rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ associato).

Si osservi che $\varrho(ax_1 + bx_2 + cx_3) = 0$ con $\varrho \in \mathbb{R} - \{0\}$, è ancora equazione in coordinate omogenee della retta r.

Proposizione 1.1.2. *Due rette distinte del piano euclideo ampliato hanno un solo punto in comune.*

Dimostrazione. Siano r ed s due rette distinte di $\bar{\Pi}$ di equazioni rispettivamente $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ ed $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0$, rispetto ad un sistema di coordinate omogenee k. Essendo le rette distinte, la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

ha rango 2, di conseguenza il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 & = & 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 & = & 0 \end{cases}$$

ammette ∞^1 soluzioni diverse da quella banale; se $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è una di queste soluzioni, tutte le altre sono del tipo $(\varrho\bar{x}_1, \varrho\bar{x}_2, \varrho\bar{x}_3)$ con $\varrho \in \mathbb{R} - \{0\}$. Di conseguenza il punto $P \in \overline{\Pi}$ di coordinate omogenee $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è un punto sia di r che di s, ed è unico per l'unicità della soluzione definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. $\square$

1.2 Il piano euclideo ampliato con i punti complessi

Mediante l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, si può ottenere un altro ampliamento del piano euclideo, oltre quello visto nel paragrafo 1.1.

Sia $\mathcal{R}(O, x, y)$ un riferimento affine sul piano euclideo Π; poichè un numero reale è un particolare numero complesso, si conviene identificare le coppie di numeri reali, pensate come elementi di $\mathbb{C}^2$, con i punti di Π che hanno tali coppie come coordinate cartesiane rispetto al riferimento prefissato. Con tale identificazione l'insieme:

$$\Pi^{\mathbb{C}} = \Pi \cup \mathbb{C}^2$$

si chiama *estensione complessa del piano euclideo* Π; i suoi elementi si chiameranno *punti*, in particolare i punti di Π si chiameranno *punti reali*; le coppie ordinate di numeri complessi che non sono coppie di numeri reali si chiameranno *punti complessi*.

Le rette di $\Pi^{\mathbb{C}}$ si definiscono nel modo seguente:

una retta complessa di $\Pi^{\mathbb{C}}$ è l'insieme dei punti di $\Pi^{\mathbb{C}}$ le cui coordinate sono tutte e sole le soluzioni (in $\mathbb{C}^2$) di un'equazione algebrica del tipo $ax+by+c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$ ed $(a, b) \neq (0, 0)$.

Quando $a, b, c \in \mathbb{R}$ allora la retta complessa si chiamerà *retta reale* di $\Pi^{\mathbb{C}}$.

Ad esempio:

-) la retta r di equazione: $(1 + 2i)x + 3y + 1 = 0$ è una retta complessa; come si può notare, essa ha sia punti reali (ad esempio $P(0, -\frac{1}{3})$) che punti complessi (ad esempio $Q(-\frac{1}{1+2i}, 0)$);

-) la retta $r : x - y + 1 = 0$ è una retta reale; essa ha sia punti reali (ad esempio $P(1, 2)$), che punti complessi (ad esempio $Q(i, i + 1)$);

-) la retta $r : x - 1 - 2i = 0$ è una retta complessa, priva di punti reali; infatti i suoi punti sono tutti del tipo $P(2i + 1, y)$.

Sia $r : ax + by + c = 0$ una retta di $\Pi^{\mathbb{C}}$; la *retta complessa coniugata* di r è la retta $\bar{r}$ di $\Pi^{\mathbb{C}}$ di equazione $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$, dove $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sono rispettivamente i numeri complessi coniugati di a, b, c. Ovviamente se r è reale si ha $r = \bar{r}$ e quindi se $P \in r$ anche il complesso coniugato di P appartiene ad r.

Si osservi che $r \cap \bar{r} = \{1 \textit{ punto reale}\}$ oppure $r \cap \bar{r} = \emptyset$;

Ad esempio la retta complessa coniugata di $r : (1+2i)x+3y+1=0$ è la retta $\bar{r} : (1-2i)x+3y+1=0$ e si ha $r \cap \bar{r} = P$, con $P(0, -\frac{1}{3})$.
La retta complessa coniugata di $r : x+1-2i=0$ è la retta $\bar{r} : x+1+2i=0$ e risulta $r \cap \bar{r} = \emptyset$.

Due rette $r : ax+by+c=0$ ed $s : a'x+b'y+c'=0$ di $\Pi^{\mathbb{C}}$ si dicono *parallele* se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ (con la solita convenzione che se uno dei denominatori è 0, allora è 0 anche il corrispondente numeratore).

1.3 Il piano euclideo ampliato con i punti complessi e con i punti impropri

L'estensione complessa $\Pi^{\mathbb{C}}$ del piano euclideo Π si può ampliare con i punti impropri considerando l'insieme $\sum^{\mathbb{C}}$ delle rette di $\Pi^{\mathbb{C}}$ con la relazione di parallelismo $\mathcal{P}$; questa è una relazione d'equivalenza. L'insieme quoziente

$$i_\infty = \frac{\sum^{\mathbb{C}}}{\mathcal{P}}$$

si chiama *insieme delle direzioni* di $\Pi^{\mathbb{C}}$.

In modo analogo al caso reale si può definire il piano numerico proiettivo complesso considerando nell'insieme $\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$ la relazione di equivalenza $\sim$:

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \exists \varrho \in \mathbb{C} - \{0\} \ni' (y_1, y_2, y_3) = (\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3);$$

l'insieme quoziente:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}}{\sim}$$

si chiama *piano numerico proiettivo complesso*.

Fissato sul piano euclideo Π un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$, risulta bigettiva l'applicazione

$$k : \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

così definita: se $P(x,y) \in \Pi^{\mathbb{C}}$, si pone $k(P) = p(x, y, 1)$; se $R_\infty \in i_\infty$ è la direzione definita da una retta $r : ax+by+c=0$, allora $k(R_\infty) = p(b, -a, 0)$. La bigezione k si chiama *sistema di coordinate omogenee* su $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$, rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$. Nel seguito gli elementi di $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ si chiameranno *punti*, più precisamente i punti di $\Pi^{\mathbb{C}}$ si chiameranno *punti propri*, quelli di i_∞ *punti impropri* (o anche *punti all'infinito*). Sia $P \in \overline{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ e $k(P) = p(x_1, x_2, x_3)$, la terna (x_1, x_2, x_3) si chiama *terna delle coordinate omogenee* del punto P (rispetto al sistema di coordinate omogenee k).

Si osservi che se P è un punto proprio di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3), allora la coppia ordinata $(x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3})$ rappresenta la coppia delle coordinate cartesiane di P rispetto a $\mathcal{R}(O, x, y)$. Se P è un punto improprio di coordinate omogenee $(x_1, x_2, x_3 = 0)$, allora $l = x_1$ ed $m = x_2$ sono i parametri direttori di una retta avente direzione $R_\infty \equiv P$.

Nel seguito l'insieme $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ si chiamerà *estensione complessa del piano euclideo ampliato con i punti impropri.*

Le *rette* di $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ sono i_∞ e tutti i sottoinsiemi di $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ del tipo $r \cup R_\infty$, dove r è una retta del piano euclideo complessificato $\Pi^{\mathbb{C}}$ ed R_∞ è la direzione da essa definita (o equivalentemente il suo punto improprio).

Rispetto ad un sistema di coordinate omogenee k assegnato, si possono rappresentare analiticamente le rette di $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ mediante equazioni lineari omogenee del tipo $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ con $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. La retta impropria i_∞ ha equazione $x_3 = 0$. Ogni altra retta propria $r \cup R_\infty$, con $r : ax + by + c = 0$ (equazione cartesiana di r rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ associato a k), ha equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$; l'equazione $ax + by + c = 0$ si chiama anche equazione della retta $r \cup R_\infty$ in coordinate non omogenee.

A titolo di esempio si vuole scrivere, in coordinate omogenee, l'equazione della retta r congiungente i punti $P(1, -1, 1)$ e $Q_\infty(1, 1, 0)$.

Sia $r : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ la generica retta del piano ampliato; imponendo le condizioni $P(1, -1, 1) \in r$ e $Q_\infty(1, 1, 0) \in r$, si ottiene $b = -a$ e $c = -2a$; quindi l'equazione di r è $ax_1 - ax_2 - 2ax_3 = 0$, con $a \neq 0$ o equivalentemente $r : x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$.

In coordinate non omogenee l'equazione di r si ottiene ponendo nell'equazione precedente

$$\frac{x_1}{x_3} = x \quad \text{e} \quad \frac{x_2}{x_3} = y$$

da cui:

$$r : x - y - 2 = 0$$

che nel piano euclideo è l'equazione della retta passante per $P(1, -1)$ ed avente parametri direttori $l = 1, m = 1$.

Particolare interesse avranno nel seguito i punti impropri $I_\infty(1, i, 0)$ e $J_\infty(1, -i, 0)$, detti *punti ciclici*; una retta propria passante per un punto ciclico si chiama *retta isotropa.*

Fissato un punto proprio P_0, vi sono due rette isotrope passanti per esso; se (x_0, y_0) sono le coordinate non omogenee di P_0 allora le rette isotrope per P_0 hanno equazione (non omogenea):

$$y - y_0 = \pm i(x - x_0);$$

come si può notare sono rette complesse coniugate di coefficiente angolare $\pm i$.

Capitolo 2

Le Coniche

In tutti i paragrafi che seguono l'ambiente in cui si considera una conica è l'estensione complessa $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ del piano euclideo ampliato con i punti impropri, su cui è fissato un sistema di coordinate proiettive omogenee (x_1, x_2, x_3) indotto da un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ (quando intervengono questioni metriche il riferimento si supporrà ortogonale).

2.1 Definizione e rango di una conica

Una *conica* è l'insieme $\mathcal{C}$ dei punti del piano $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}}$ le cui coordinate omogenee sono soluzioni di un'equazione del tipo:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \tag{2.1.1}$$

dove a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ sono numeri reali non tutti nulli.

La (2.1.1) si chiama *equazione della conica* $\mathcal{C}$ rispetto al sistema di coordinate omogenee prefissato.

Se conveniamo porre $a_{ij} = a_{ji}$, per ogni $i, j = 1, 2, 3$, allora la (2.1.1) si scrive nella forma compatta

$$\mathcal{C} : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0$$

o anche, sottintendendo il simbolo di sommatoria:

$$\mathcal{C} : a_{ij}x_ix_j = 0.$$

Ponendo nella (2.1.1) $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$, si ottiene l'equazione di $\mathcal{C}$ in coordinate non omogenee:

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{2.1.2}$$

La (2.1.2) si chiama anche *equazione cartesiana* di $\mathcal{C}$ rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ prefissato.

La matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

si chiama matrice dell'equazione della conica $\mathcal{C}$.

Si può dimostrare che, se $a'_{hk}x'_h x'_k = 0$ è l'equazione di $\mathcal{C}$ rispetto ad un altro sistema di coordinate omogenee (x'_1, x'_2, x'_3) (ottenuto a partire da un riferimento affine $\mathcal{R}'(O', x', y')$), allora la matrice $A' = (a'_{hk})_{1\leq h,k\leq 3}$ ha lo stesso rango di $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$. Per questo motivo il rango di A si chiama *rango della conica* $\mathcal{C}$.

Abbiamo così il rango come primo strumento che permette di classificare le coniche. Una conica $\mathcal{C}$ si dice

- *doppiamente degenere* se è di *rango 1*,
- *semplicemente degenere* se è di *rango 2*,
- *generale* se è di *rango 3*.

Il significato geometrico del rango è messo in luce dal seguente teorema.

Teorema 2.1.1. *Sia $\mathcal{C} : a_{ij}x_i x_j = 0$ una conica. Allora si ha:*

a) $\mathcal{C}$ ha rango 1 $\Leftrightarrow$ il polinomio $a_{ij}x_i x_j$ è scomponibile nella forma $(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)^2$, con $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$.

b) $\mathcal{C}$ ha rango 2 $\Leftrightarrow$ il polinomio $a_{ij}x_i x_j$ è scomponibile nella forma $(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) \cdot (v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)$, con rg $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$.

c) $\mathcal{C}$ ha rango 3 $\Leftrightarrow$ il polinomio $a_{ij}x_i x_j$ è irriducibile.

Come conseguenza immediata si ha:

a') $\mathcal{C}$ ha rango 1 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ si spezza in due rette coincidenti.

b') $\mathcal{C}$ ha rango 2 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ si spezza in due rette distinte.

c') $\mathcal{C}$ ha rango 3 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ non contiene rette.

Osservazione

1. Se $a_{ij}x_ix_j = 0$ è equazione di una conica $\mathcal{C}$, allora $\varrho(a_{ij}x_ix_j) = 0$, con $\varrho \neq 0$, è ancora equazione di $\mathcal{C}$.

2. L'equazione $a_{ij}x_ix_j = 0$ di una conica $\mathcal{C}$ dipende da cinque parametri essenziali; questo vuol dire che ci vogliono cinque condizioni indipendenti per individuare una conica. Assegnati cinque punti a tre a tre non allineati, esiste una ed una sola conica non degenere passante per essi.

2.2 Ordine di una conica - Retta tangente

Poichè l'equazione di una conica è un'equazione algebrica di secondo grado, si dice anche che la conica è una curva algebrica del secondo ordine. Il significato geometrico dell'ordine si vede studiando le intersezioni della generica retta del piano con una conica generale.

Siano $\mathcal{C} : a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale ed $r : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ una retta del piano. Le intersezioni di $\mathcal{C}$ con r si ottengono studiando il sistema:

$$\begin{cases} a_{ij}x_ix_j = 0 \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Caso I

La retta r è la retta impropria $i_\infty : x_3 = 0$; allora il sistema (2.2.1) si scrive:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Posto:

$$D_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

si può dimostrare che D_{33} è un'invariante della conica (cioè non dipende dal sistema di riferimento). Si hanno tre possibilità:

- $D_{33} > 0 \Leftrightarrow i_\infty \cap \mathcal{C}=\{\textit{due punti complessi coniugati}\}$.
- $D_{33} < 0 \Leftrightarrow i_\infty \cap \mathcal{C}=\{\textit{due punti reali e distinti}\}$.
- $D_{33} = 0 \Leftrightarrow i_\infty \cap \mathcal{C}=\{\textit{due punti reali e coincidenti}\}$.

Se $D_{33} > 0$ la conica $\mathcal{C}$ si chiama **ellisse**; se $D_{33} < 0$, $\mathcal{C}$ si chiama **iperbole**; se $D_{33} = 0$, $\mathcal{C}$ si chiama **parabola**.

Sia $\mathcal{C}$ un'iperbole, si indichino con $R_\infty(l, m, 0)$ ed $S_\infty(l', m', 0)$ i punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con la retta impropria; le direzioni definite da R_∞ ed S_∞ si dicono *direzioni asintotiche* dell'iperbole $\mathcal{C}$.

Supposto il riferimento $\mathcal{R}(O, x, y)$ ortonormale, si può dimostrare che vale la seguente equivalenza

$$ll' + mm' = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_{11} + a_{22} = 0,$$

cioè le direzioni asintotiche dell'iperbole sono perpendicolari se e solo se $T = a_{11} + a_{22} = 0$. In questo caso si dice che $\mathcal{C}$ è un' **iperbole equilatera**. Si può dimostrare che $T = a_{11} + a_{22}$ è un invariante della conica.

Caso II
Sia r la retta propria di equazioni parametriche $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$. Il sistema (2.2.1) in coordinate non omogenee (x, y) si scrive :

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

o equivalentemente:

$$\begin{cases} a_{11}(x_0 + lt)^2 + a_{22}(y_0 + mt)^2 + 2a_{12}(x_0 + lt)(y_0 + mt) + \\ 2a_{13}(x_0 + lt) + 2a_{23}(y_0 + mt) + a_{33} = 0 \\ x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Ponendo:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \\ \beta & = & (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})l + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})m \\ \gamma & = & a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}, \end{array} \tag{2.2.4}$$

la (2.2.3) diviene

$$\begin{cases} \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0 \\ x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$, il punto improprio $R_\infty(l, m, 0)$ della retta r appartiene alla conica $\mathcal{C}$; poichè deve essere $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ (altrimenti si ha un assurdo), l'altro punto d'intersezione di r con $\mathcal{C}$ si ottiene per t soluzione dell'equazione $2\beta t + \gamma = 0$. Se $\alpha \neq 0$, l'equazione $\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0$ ammette due soluzioni in corrispondenza delle quali si hanno i due punti di intersezione di r con la conica $\mathcal{C}$.
Concludiamo allora che:

l'ordine di una conica generale $\mathcal{C}$ rappresenta il numero di intersezioni che la generica retta r del piano ha con la conica $\mathcal{C}$.

Mantenendo le notazioni precedenti, sia $P_0(x_0, y_0) \in r \cap \mathcal{C}$, o equivalentemente $\gamma = 0$; se P_0 è l'unico punto di intersezione di r con $\mathcal{C}$ (cioè r è tangente in P_0 alla conica) allora tale condizione si traduce analiticamente imponendo $\beta = 0$; tenendo conto dell'espressione di β, deve esistere $\varrho \neq 0$ tale che:

$$\begin{aligned} -(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) &= \varrho l \\ (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) &= \varrho m. \end{aligned}$$

Si ottiene così l'equazione della *retta tangente* in $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ alla conica $\mathcal{C}$:

$$t_{P_0} : (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0.$$

Si osservi che nell'equazione precedente i coefficienti di x e di y non sono contemporaneamente nulli: infatti, se fosse $(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) = (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) = 0$ allora si avrebbe anche $a_{11}x_0^2 + a_{12}x_0y_0 + a_{13}x_0 = 0$ e $a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + a_{23}y_0 = 0$ che, insieme alla condizione $\gamma = 0$, implicano $a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0$. Allora (x_0, y_0) sarebbe soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0 \end{cases}$$

e questo è assurdo perchè le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

hanno rango diverso (per ipotesi $rg\mathrm{A} = 3$).

2.3 Polarità definita da una conica

Sia $\mathcal{C} : a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale e sia $P_0(\overset{o}{x}_1, \overset{o}{x}_2, \overset{o}{x}_3)$ un punto del piano; posto

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}\overset{o}{x}_1 + a_{12}\overset{o}{x}_2 + a_{13}\overset{o}{x}_3 \\ u_2 &= a_{12}\overset{o}{x}_1 + a_{22}\overset{o}{x}_2 + a_{23}\overset{o}{x}_3 \\ u_3 &= a_{13}\overset{o}{x}_1 + a_{23}\overset{o}{x}_2 + a_{33}\overset{o}{x}_3 \end{aligned}$$

si osserva facilmente che $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$; la retta di equazione

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

si chiama *retta polare* di P_0 rispetto alla conica $\mathcal{C}$ e nel seguito si denoterà con p_{P_0}; P_0 si chiama *polo* della retta p_{P_0}.

Si osservi che quando $P_0 \in \mathcal{C}$, l'equazione della retta polare p_{P_0} coincide con l'equazione della retta t tangente in P_0 alla conica, più precisamente si ha:

$$P_0 \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad p_{P_0} = t.$$

Teorema 2.3.1. *Data una conica generale $\mathcal{C}$, l'applicazione $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}} \to \sum^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$, $P \to p_P$ è una bigezione e si chiama **polarità** definita dalla conica $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Si fa vedere che, per ogni retta r del piano esiste uno ed un solo punto P_0 tale che $p_{P_0} = r$. Sia $\mathcal{C} : a_{ij}x_ix_j = 0$ e sia $r : u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$; il sistema lineare

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= u_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= u_2 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= u_3 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3, poichè $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$, non è omogeneo. Il determinante dei coefficienti delle equazioni del sistema è il determinante della matrice della conica, quindi è non nullo, di conseguenza il sistema ammette una sola soluzione $(\overset{o}{x}_1, \overset{o}{x}_2, \overset{o}{x}_3) \neq (0, 0, 0)$. Considerato il punto $P_0(\overset{o}{x}_1, \overset{o}{x}_2, \overset{o}{x}_3)$, dalla definizione di retta polare, risulta ovviamente $r = p_{P_0}$. D'altra parte P_0 è unico per l'unicità della soluzione $(\overset{o}{x}_1, \overset{o}{x}_2, \overset{o}{x}_3)$ del sistema (2.3.1). □

Teorema 2.3.2 (teorema di reciprocità). *Data una conica generale $\mathcal{C}$, comunque si fissano due punti P e Q nel piano, indicate con p_P e p_Q rispettivamente le rette polari di P e Q rispetto a $\mathcal{C}$, si ha:*

$$P \in p_Q \quad \Leftrightarrow \quad Q \in p_P. \tag{2.3.2}$$

(I punti P e Q (le rette p_Q e p_P) soddisfacenti (2.3.2) si dicono *punti coniugati* (*rette coniugate*)) rispetto alla conica $\mathcal{C}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C} : a_{ij}x_ix_j = 0$ e siano $P(\overset{o}{x}_1, \overset{o}{x}_2, \overset{o}{x}_3)$ e $Q(\overset{o}{y}_1, \overset{o}{y}_2, \overset{o}{y}_3)$ due punti del piano. L'equazione della polare di Q è $\sum_i(\sum_j a_{ij} \overset{o}{y}_j)x_i = 0$; allora si ha:

$$\begin{aligned} P \in p_Q \ &\Leftrightarrow \ \textstyle\sum_i(\sum_j a_{ij} \overset{o}{y}_j) \overset{o}{x}_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \textstyle\sum_j(\sum_i a_{ij} \overset{o}{x}_i) \overset{o}{y}_j = 0 \\ &\Leftrightarrow \ Q \in p_P \end{aligned}$$

□

Se $P(\overset{o}{x}_1, \overset{o}{x}_2, \overset{o}{x}_3)$ è un punto proprio, posto $x_0 = \frac{\overset{o}{x}_1}{\overset{o}{x}_3}$ e $y_0 = \frac{\overset{o}{x}_2}{\overset{o}{x}_3}$, l'equazione della polare di P in coordinate non omogenee è data da:

$$\begin{aligned} p_P : \quad &(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + \\ &+(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}) = 0 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Come conseguenza del teorema di reciprocità si hanno i seguenti corollari.

Corollario 2.3.3. *Siano $\mathcal{C}$ una conica generale e r una retta del piano. Al variare di P su r, la polare p_P descrive un fascio di rette di centro il polo di r.*

Dimostrazione. Sia $r = p_{P_0}$; allora, per il teorema di reciprocità, si ha

$$P \in r = p_{P_0} \Leftrightarrow P_0 \in p_P;$$

ma $P_0 \in p_P \Leftrightarrow p_P \in \mathcal{F}(P_0)$ (fascio di rette di centro P_0), da cui la tesi. □

Corollario 2.3.4. *Siano $\mathcal{C}$ una conica generale e $P_0 \notin \mathcal{C}$. Allora si ha:*

1. *Se $\{T_1, T_2\} = p_{P_0} \cap \mathcal{C}$ allora le rette P_0T_1 e P_0T_2 sono tangenti alla conica $\mathcal{C}$ rispettivamente in T_1 e T_2.*

2. *Se $t_1 = P_0T_1$ è tangente in T_1 a $\mathcal{C}$ e $t_2 = P_0T_2$ è tangente in T_2 a $\mathcal{C}$, allora $p_{P_0} = T_1T_2$.*

Dimostrazione. 1. Poichè $T_1, T_2 \in \mathcal{C}$, si ha $p_{T_1} = t_1$ tangente in T_1 a $\mathcal{C}$ e $p_{T_2} = t_2$ tangente in T_2 a $\mathcal{C}$. Per il teorema di reciprocità, si ha anche:

$$\begin{aligned} T_1 \in p_{P_0} \Rightarrow P_0 \in p_{T_1} = t_1 \\ T_2 \in p_{P_0} \Rightarrow P_0 \in p_{T_2} = t_2, \end{aligned}$$

da cui si ottiene $t_1 = P_0T_1$ e $t_2 = P_0T_2$.

2. Per il teorema di reciprocità si ha:

$$P_0 \in t_1 = p_{T_1} \Rightarrow T_1 \in p_{P_0}$$
$$P_0 \in t_2 = p_{T_2} \Rightarrow T_2 \in p_{P_0},$$

da cui, p_{P_0} è la retta congiungente i punti T_1 e T_2 (si osservi che $T_1 \neq T_2$ perchè $P_0 \notin \mathcal{C}$).

$\square$

Dati una conica generale $\mathcal{C}$ ed un punto P del piano, si dice che:
- P è *esterno* a $\mathcal{C}$ se le tangenti condotte da P alla conica sono reali e distinte;
- P è *interno* a $\mathcal{C}$ se le tangenti condotte da P alla conica sono complesse coniugate.

Per costruire la polare di un punto P rispetto ad una conica $\mathcal{C}$ si procede così.
-) Se P è esterno alla conica $\mathcal{C}$, si mandano da P le tangenti alla conica; se T_1 e T_2 sono i punti di contatto, allora la polare di P è la retta congiungente i punti T_1 e T_2.
-) Se P è interno alla conica, basta considerare due rette distinte r ed s passanti per P; si costruisce il polo R della retta r ed il polo S della retta s; allora la polare di P è la retta passante per i punti R ed S.

2.4 Fasci di coniche

Siano $\mathcal{C} : a_{ij}x_ix_j = 0$ e $\mathcal{C}' : b_{ij}x_ix_j = 0$ due coniche distinte. L'insieme delle coniche di equazione:

$$\lambda(a_{ij}x_ix_j) + \mu(b_{ij}x_ix_j) = 0,$$

con $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, si chiama *fascio di coniche* individuato dalle coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$. Un punto comune a due coniche (e quindi a tutte le coniche) di un fascio, si chiama *punto base* del fascio. Per trovare le coniche degeneri del fascio bisogna annullare il determinante

$$det(\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) = 0; \tag{2.4.1}$$

introducendo il parametro non omogeneo $t = \mu/\lambda$ la (2.4.1) si scrive:

$$det(a_{ij} + tb_{ij}) = 0 \tag{2.4.2}$$

che è un'equazione di terzo grado in t oppure una identità.

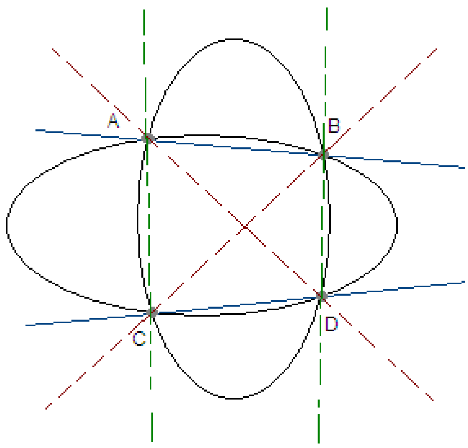
Per il teorema fondamentale dell'algebra si ha come conseguenza che un fascio di coniche può essere di due tipi:

- il fascio possiede tre coniche degeneri (*fascio non speciale)*
- tutte le coniche del fascio sono degeneri (*fascio speciale).*

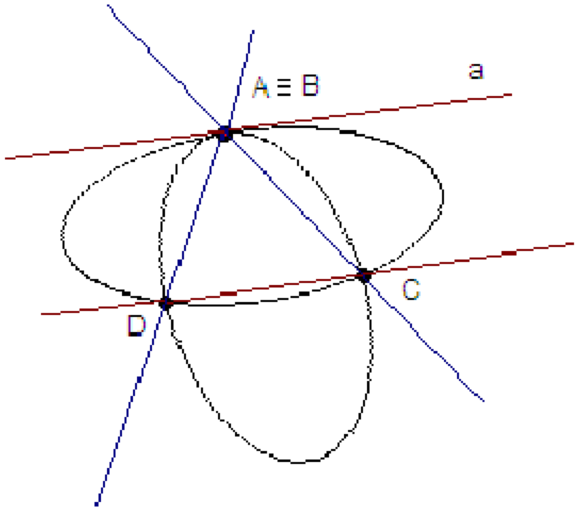
Si osservi che in un fascio di coniche non speciale, esiste almeno una conica reale degenere perchè l'equazione (2.4.2), essendo di grado dispari ed a coefficienti reali, ammette almeno una radice reale.

Un fascio di coniche non speciale ha quattro punti base; si distinguono perciò i seguenti casi:

A) I quattro punti base A, B, C, D sono tutti distinti:
si hanno tre coniche semplicemente degeneri, costituite dalle coppie di rette che li congiungono a due a due; di queste coniche una è sempre reale.

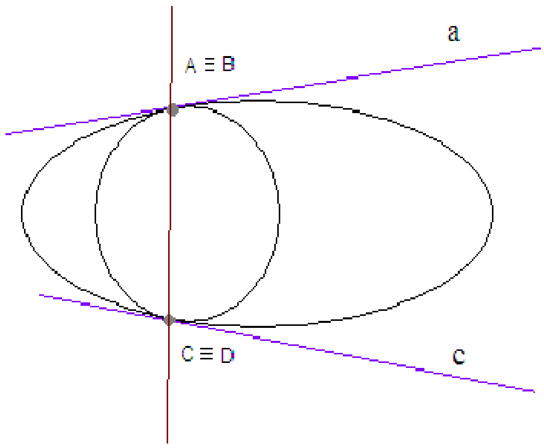


B) Due dei quattro punti base coincidono: $A = B$, C, D (fascio di coniche tangenti).
In questo caso tutte le coniche non degeneri del fascio, hanno nel punto doppio A la stessa retta tangente a. Le coniche degeneri del fascio sono semplicemente degeneri e sono $\mathcal{C}_1 = a \cup CD$ e $\mathcal{C}_2 = AC \cup AD$.



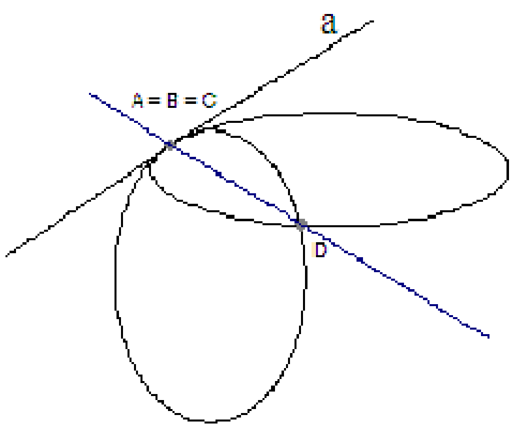
Fascio di coniche tangenti.

C) I quattro punti base coincidono a due a due: $A = B$ e $C = D$ (fascio di coniche bitangenti).
Tutte le coniche non degeneri del fascio hanno in A la stessa retta tangente a ed in C la stessa retta tangente c. Le coniche degeneri del fascio sono due: $\mathcal{C}_1 = a \cup c$ (semplicemente degenere) e $\mathcal{C}_2 = AC \cup AC$ (doppiamente degenere).



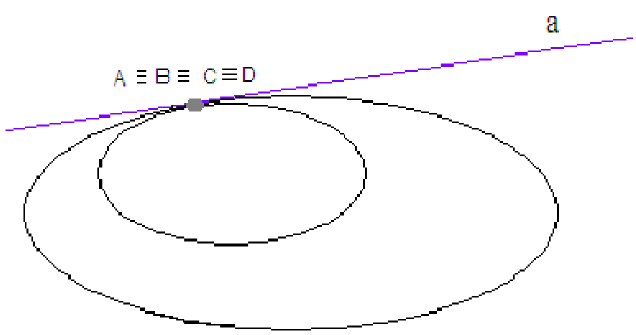
Fascio di coniche bitangenti.

D) Tre dei quattro punti base coincidono: A=B=C, D (fascio di coniche osculatrici).
Tutte le coniche non degeneri del fascio hanno in A la stessa retta tangente a ed il punto A si chiama punto di osculazione; nel fascio c'è una sola conica semplicemente degenere formata dalla retta tangente a e dalla retta AD.



Fascio di coniche osculatrici.

E) Tutti e quattro i punti base coincidono: $A = B = C = D$ (fascio di coniche iperosculatrici)
In questo caso tutte le coniche non degeneri del fascio hanno in A la stessa retta tangente a ed il punto A si chiama punto di iperosculazione; si ha una sola conica doppiamente degenere, formata dalla retta tangente a contata due volte.



Fascio di coniche iperosculatrici.

2.5 Centro, diametri, asintoti di una conica

Sia $\mathcal{C} : a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale; si chiama *centro* di $\mathcal{C}$ il polo della retta impropria. Osserviamo che la parabola, essendo tangente alla retta impropria, ha come centro un punto improprio, invece l'ellisse e l'iperbole hanno centro proprio. Per questo motivo, si dice comunemente che la parabola è una conica *senza centro* e che invece l'ellisse e l'iperbole sono *coniche a centro*.

Nel caso dell'ellisse o dell'iperbole, le coordinate del centro si possono determinare nel seguente modo: si considerano i punti impropri $X_\infty(1, 0, 0)$ dell'asse delle x e $Y_\infty(0, 1, 0)$ dell'asse delle y, del riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ prefissato e si scrivono le equazioni delle rispettive polari:

$$\begin{aligned} p_{X_\infty} &: a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ p_{Y_\infty} &: a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Poichè $X_\infty \in i_\infty = p_C$ e $Y_\infty \in i_\infty = p_C$, per il teorema di reciprocità si ha che $C \in p_{X_\infty}$ e $C \in p_{Y_\infty}$, ossia $\{C\} = p_{X_\infty} \cap p_{Y_\infty}$; quindi le coordinate di C sono la soluzione del sistema (2.5.1).
(Si osservi che il sistema (2.5.1) è sicuramente compatibile poichè, essendo la conica generale $\mathcal{C}$ una ellisse o una iperbole, risulta $D_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$).

Sia $\mathcal{C} : a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale; si chiama *diametro* di una conica ogni retta propria passante per il centro.

Immediata conseguenza di questa definizione è la seguente proposizione.

Proposizione 2.5.1. *Sia $\mathcal{C}$ una conica generale e d una retta propria; allora si ha:*

$$d \text{ è diametro} \Leftrightarrow \text{il polo di } d \text{ è un punto improprio}$$

Dimostrazione. Sia Q il polo del diametro d, cioè $d = p_Q$. Allora si ha:

$$C \in d = p_Q \quad \Leftrightarrow \quad Q \in p_C = i_\infty \quad \Leftrightarrow \quad Q \text{ e' punto improprio.}$$

□

Il polo di un diametro d, essendo un punto all'infinito, definisce una direzione detta *direzione coniugata* a d.

In una parabola, poichè il suo centro è un punto improprio, tutti i diametri sono paralleli.

Proposizione 2.5.2. *Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro. Se d e d' sono diametri coniugati rispetto a $\mathcal{C}$, allora ogni corda parallela a d è bisecata da d' (cioè incontra d' nel suo punto medio). In particolare, il centro C di $\mathcal{C}$ è centro di simmetria della conica.*

Dimostrazione. Siano P_1 e P_2 due punti della conica e sia d il diametro della conica parallelo alla corda $\overline{P_1P_2}$; allora indicati con $D_\infty(l, m, 0)$ il punto improprio di d, con d' il diametro coniugato di d e con $M(x_0, y_0)$ il punto medio della corda $\overline{P_1P_2}$, la retta r passante per M e parallela a d ha equazioni

$$r \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Denotati con t_1 e t_2 i valori del parametro corrispondenti rispettivamente ai punti P_1 e P_2, il punto M, che si ottiene per $t = 0$, corrisponde anche al valore del parametro $t = \frac{t_1+t_2}{2}$, e quindi si ha che deve essere $t_1 + t_2 = 0$. Ma ricordando che t_1, t_2 sono le soluzioni dell'equazione

$$\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0,$$

con α, β, γ definiti come in (2.2.4), deve aversi $\frac{t_1+t_2}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}$ e quindi, per quanto visto sopra, $\beta = 0$. Ma $\beta = 0$ equivale a dire che $M(x_0, y_0) \in p_{D_\infty} = d'$.

Se $P \in \mathcal{C}$ e d è il diametro per P, indicata con P' l'ulteriore intersezione di d con $\mathcal{C}$, per quanto visto prima, il centro C è punto medio di $\overline{PP'}$, ossia C è centro di simmetria della conica. □

Si chiamano *asintoti* di una iperbole $\mathcal{C}$ i diametri passanti per i punti impropri di $\mathcal{C}$.

Proposizione 2.5.3. *Siano $\mathcal{C}$ un'iperbole, R_∞ ed S_∞ punti impropri di $\mathcal{C}$, r ed s due rette aventi direzioni rispettivamente R_∞ ed S_∞. Allora si ha:*

r, s asintoti $\Leftrightarrow$ r, s tangenti a $\mathcal{C}$ nei suoi punti impropri

Dimostrazione. Per ipotesi, r ed s sono asintoti (quindi passano per il centro), per cui il centro della conica è $\{C\} = r \cap s$; essendo $p_C = i_\infty$ e $p_C \cap \mathcal{C} = \{R_\infty, S_\infty\}$, per la *1.* del Corollario (2.3.4) si ha che r ed s sono tangenti alla conica $\mathcal{C}$ rispettivamente in R_∞ ed S_∞.

Viceversa, siano $r = p_{R_\infty} = t_1$ tangente in R_∞ a $\mathcal{C}$ e $s = p_{S_\infty} = t_2$ tangente in S_∞ a $\mathcal{C}$; per la *2.* del Corollario (2.3.4) si ha che $i_\infty = R_\infty S_\infty = p_{r\cap s}$ e questo implica che $r \cap s = \{C\}$, centro della conica. Si conclude che r ed s sono diametri e poichè passano per i punti impropri di $\mathcal{C}$, sono asintoti. □

Per determinare le *equazioni degli asintoti* di una iperbole $\mathcal{C} : a_{ij}x_ix_j = 0$ si trovano i punti R_∞ ed S_∞ di intersezione della conica $\mathcal{C}$ con la retta impropria i_∞. Le soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

sono le coordinate omogenee dei punti impropri dell'iperbole; equivalentemente i parametri direttori degli asintoti sono le soluzioni dell'equazione omogenea:

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0. \tag{2.5.2}$$

A titolo di esempio, si vogliono trovare gli asintoti dell'iperbole $\mathcal{C} : x^2 - 4y^2 + x - y + 1 = 0$. L'equazione (2.5.2) si scrive

$$l^2 - 4m^2 = 0$$

che ha come soluzioni $(-2, 1)$ e $(2, 1)$ che sono i parametri direttori degli asintoti. Per trovare le coordinate del centro si risolve il sistema (2.5.1) che in questo caso si scrive:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} = 0 \\ 4y + \frac{1}{2} = 0; \end{cases}$$

quindi le coordinate del centro sono $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$ e gli asintoti a_1 e a_2 hanno equazione rispettivamente:

$$a_1 : \frac{x + \frac{1}{2}}{-2} = \frac{y + \frac{1}{8}}{1}$$

$$a_2 : \frac{x + \frac{1}{2}}{2} = \frac{y + \frac{1}{8}}{1}.$$

2.6 Assi di una conica

Fissato un riferimento ortonormale $\mathcal{R}(O,x,y)$, sia $\mathcal{C}: a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale. Un diametro d di $\mathcal{C}$ si dice *asse* se è perpendicolare alla sua direzione coniugata.
Per determinare gli assi di una conica distinguiamo due casi:

- Caso I: $\mathcal{C}$ è una ELLISSE o IPERBOLE
- Caso II: $\mathcal{C}$ è una PARABOLA

Caso I.
Siano $d = p_{D'_\infty}$ e $d' = p_{D_\infty}$ due diametri coniugati di $\mathcal{C}$, con $D_\infty(l,m,0)$ e $D'_\infty(l',m',0)$ (esistono perchè $\mathcal{C}$ è a centro). Allora la condizione che d e d' sono diametri coniugati si traduce analiticamente:

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + l'm) + a_{22}mm' = 0. \tag{2.6.1}$$

Ora, d è asse se e solo se D_∞ definisce una direzione perpendicolare a quella definita da D'_∞, ossia

$$d \quad \text{asse} \quad \Leftrightarrow \quad ll' + mm' = 0$$

o equivalentemente $(l',m') = (\varrho m, -\varrho l)$, con $\varrho \neq 0$.
L'equazione (2.6.1) allora si scrive:

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0. \tag{2.6.2}$$

Si osservi che essendo $\Delta = (a_{22}-a_{11})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$, l'equazione (2.6.2) ammette soluzioni reali; quindi

Gli assi di una conica a centro sono rette reali.

Osserviamo inoltre che, quando $\Delta = 0$, si ha $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$ e viceversa; d'altra parte quando $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$ l'equazione (2.6.2) è identicamente soddisfatta, ossia ogni diametro è asse. La condizione analitica $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$ equivale al fatto che $\mathcal{C}$ è una circonferenza.
Riassumendo i risultati ottenuti possiamo allora dire che:

Una conica generale $\mathcal{C}$ è una circonferenza se e solo se ogni diametro è asse.

Se $\Delta > 0$ (quindi la conica è iperbole o ellisse, ma non circonferenza) allora la conica ha due assi reali e distinti. I parametri direttori di essi sono le soluzioni distinte (definiti a meno di un fattore di proporzionalità $\varrho \neq 0$) di (2.6.2).

A titolo di esempio si vogliono trovare le equazioni degli assi della conica

$$\mathcal{C} : x^2 - 4y^2 + x - y + 1 = 0.$$

La conica $\mathcal{C}$ ha centro $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$. L'equazione $a_{12}l^2+(a_{22}-a_{11})lm-a_{12}m^2 = 0$ in questo caso si scrive: $(-4-1)lm = 0$, le cui soluzioni sono: $(\varrho, 0, 0)$ e $(0, \varrho, 0)$, con $\varrho \neq 0$. Ponendo $\varrho = 1$, si ha: $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ (queste sono le coordinate omogenee di X_∞ e Y_∞ rispettivamente). Allora gli assi sono le rette di equazioni

$$x = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{1}{8},$$

cioè le rette per C e parallele rispettivamente all'asse delle y e all'asse delle x.

Caso II.
Abbiamo visto che nella parabola tutti i diametri sono paralleli, quindi hanno tutti la stessa direzione; sia D_∞ il punto improprio della parabola $\mathcal{C}$, l'*asse* di $\mathcal{C}$ è per definizione la polare di D'_∞ che definisce la direzione ortogonale a D_∞.

A titolo di esempio, troviamo l'equazione dell'asse della parabola $\mathcal{C} : x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$. Il punto improprio D_∞ della parabola si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{C} : x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 = 0 \\ i_\infty : x_3 = 0 \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Si ottiene così $D_\infty(1, 1, 0)$; il punto improprio che definisce la direzione ortogonale a quella di D_∞ è $D'_\infty(-1, 1, 0)$, allora l'asse a di $\mathcal{C}$ è la polare di D'_∞, di equazione $4x_1-4x_2-x_3 = 0$; in coordinate non omogenee $a : 4x-4y-1 = 0$.

Un punto proprio e reale V di intersezione di una conica generale $\mathcal{C}$ con un suo asse a, si chiama *vertice* di $\mathcal{C}$.

In una parabola c'è un solo vertice; nell'iperbole ce ne sono due e appartengono ad uno stesso asse; nell'ellisse ci sono quattro vertici.

Proposizione 2.6.1. *Sia $\mathcal{C}$ una conica generale, V un suo vertice e t la retta tangente in V a $\mathcal{C}$. Allora t è perpendicolare all'asse passante per V.*

Dimostrazione. Se a è asse, allora $a = p_{D'_\infty}$ è perpendicolare alla sua direzione coniugata D'_∞; di conseguenza se V è un vertice e $V \in a$, per il teorema di reciprocità si ha:

$$V \in a = p_{D'_\infty} \Rightarrow D'_\infty \in p_V = t$$

e quindi t ha direzione perpendicolare ad a. □

2.7 Equazioni canoniche delle coniche

- Sia $\mathcal{C} : a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica a centro avente per assi gli assi coordinati del riferimento ortonormale $\mathcal{R}(O, x, y)$. Allora imponendo che $(1, 0, 0)$ (coordinate omogenee di X_∞) e $(0, 1, 0)$ (coordinate omogenee di Y_∞) siano soluzioni di $a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0$, si ottiene $a_{12} = 0$. Imponendo poi che la conica abbia centro nell'origine $O(0, 0)$, si ottiene $a_{13} = a_{23} = 0$.

  Allora l'equazione di $\mathcal{C}$ si scrive:

  $$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$$

  con $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0$; in coordinate non omogenee:

  $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0.$$

  Distinguiamo i seguenti casi:

  Caso I: $a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} > 0$.

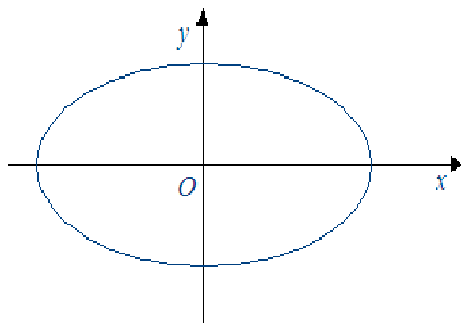
  Ponendo $\dfrac{a_{11}}{a_{33}} = \dfrac{1}{a^2}$ e $\dfrac{a_{22}}{a_{33}} = \dfrac{1}{b^2}$, l'equazione della conica assume la forma:

  $$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \qquad \text{ELLISSE priva di punti reali}$$

  Caso II: $a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} < 0$.

  Ponendo $\dfrac{a_{11}}{-a_{33}} = \dfrac{1}{a^2}$ e $\dfrac{a_{22}}{-a_{33}} = \dfrac{1}{b^2}$, l'equazione della conica assume la forma:

  $$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad \text{ELLISSE a punti reali}$$

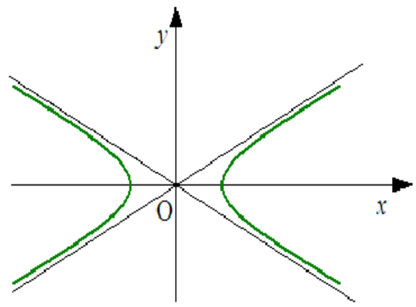


Ellisse.

Caso III: $a_{11} > 0, a_{22} < 0, a_{33} \gtrless 0$.

Ponendo $\dfrac{a_{11}}{a_{33}} = \dfrac{1}{a^2}$ e $\dfrac{a_{22}}{-a_{33}} = \dfrac{1}{b^2}$ se $a_{33} > 0$, $\dfrac{a_{11}}{-a_{33}} = \dfrac{1}{a^2}$ e $\dfrac{a_{22}}{a_{33}} = \dfrac{1}{b^2}$ se $a_{33} < 0$, l'equazione della conica è:

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \pm 1 = 0 \qquad \text{IPERBOLE.}$$



***Iperbole con** $a_{33} < 0$.*

Se la conica a centro $\mathcal{C}$ è un'iperbole equilatera, si possono assumere come assi del riferimento gli asintoti; in questo caso si prova facilmente che l'equazione di $\mathcal{C}$ è del tipo:

$$xy = k$$

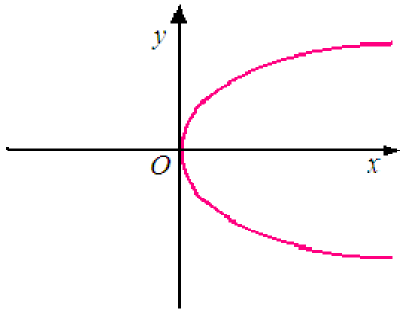
con k costante.

- Se $\mathcal{C}$ è una parabola di equazione $a_{ij}x_ix_j = 0$, avente come asse l'asse delle x e come tangente nel vertice l'asse delle y di un riferimento ortonormale $\mathcal{R}(O, x, y)$, allora imponendo che $O \in \mathcal{C}$ e $X_\infty \in \mathcal{C}$, si ha rispettivamente $a_{33} = 0$ e $a_{11} = 0$. Inoltre $D_{33} = 0$ e $a_{11} = 0$ implicano $a_{12} = 0$, mentre, il fatto che l'asse delle y sia tangente in O alla parabola implica $a_{23} = 0$. Quindi l'equazione di $\mathcal{C}$ si scrive:

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$$

e ponendo $\frac{-2a_{13}}{a_{22}} = 2p$ si ha:

$$\mathcal{C} : y^2 = 2px.$$



Parabola con $p > 0$***.***

2.8 Fuochi di una conica

In tutto il paragrafo si suppone che $\mathcal{R}(O, x, y)$ è un riferimento ortonormale.

Se $\mathcal{C}$ è una conica generale, si prova facilmente la seguente proposizione.

Proposizione 2.8.1.

$$\mathcal{C}\ e'\ una\ circonferenza \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C}\ passa\ per\ i\ punti\ ciclici$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C} : a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$ una circonferenza. I punti ciclici $I_\infty(1, i, 0)$, $J_\infty(1, -i, 0)$ appartengono a $\mathcal{C}$ in quanto $(1, i, 0)$ e $(1, -i, 0)$ soddisfano la sua equazione.

Viceversa, supponiamo che i punti ciclici $I_\infty(1, i, 0)$ e $J_\infty(1, -i, 0)$ appartengono alla conica $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$; allora si ha

$$a_{11} - a_{22} + 2a_{12}i = 0$$
$$a_{11} - a_{22} - 2a_{12}i = 0$$

da cui, sommando membro a membro si ottiene $a_{11} = a_{22}$ e sottraendo membro a membro si ottiene $a_{12} = 0$; segue così che $\mathcal{C}$ è una circonferenza. □

Sia $\mathcal{C}$ una conica generale a punti reali. Si chiama *fuoco* di $\mathcal{C}$ un punto proprio e reale tale che le tangenti condotte da esso alla conica siano le rette isotrope.

Proposizione 2.8.2. *Sia $\mathcal{C}$ una conica generale a punti reali. Allora si ha:*

$$Il\ centro\ di\ \mathcal{C}\ e'\ fuoco \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C}\ e'\ una\ circonferenza$$

Dimostrazione. Supponiamo che il centro C della conica $\mathcal{C}$ coincida con un fuoco F; allora $p_F = p_C = i_\infty$. Poichè F è fuoco, le rette tangenti a $\mathcal{C}$ per F sono le rette isotrope; segue che CA_∞ e CB_∞ sono rette isotrope per C, quindi A_∞ e B_∞ sono punti ciclici; ma A_∞ e B_∞ sono punti della conica, allora per la proposizione (2.8.1), $\mathcal{C}$ è una circonferenza.

Viceversa, sia $\mathcal{C}$ una circonferenza; per la proposizione (2.8.1), $\mathcal{C}$ passa per $I_\infty(1, i, 0)$ e $J_\infty(1, -i, 0)$. Le tangenti alla conica per I_∞ e J_∞ si incontrano nel polo della retta $I_\infty J_\infty = i_\infty$, quindi si incontrano nel centro C. Allora C è anche fuoco, perchè le tangenti condotte da esso a $\mathcal{C}$ sono le rette isotrope. □

Proposizione 2.8.3. *a) La circonferenza ha un solo fuoco che coincide con il centro. Una conica a punti reali, a centro e non circonferenza, ha due fuochi distinti che appartengono ad uno stesso asse detto **asse focale**.*

b) In una parabola c'è un solo fuoco ed esso appartiene all'asse della parabola.

Sia $\mathcal{C}$ una conica generale a punti reali; si chiama *direttrice* della conica $\mathcal{C}$ una retta propria e reale, polare di un fuoco.

Proposizione 2.8.4. *Se $\mathcal{C}$ è una conica a centro, qualunque sia P punto proprio e reale di $\mathcal{C}$, il rapporto delle distanze di P da un fuoco e dalla relativa direttrice è costante.*

Dimostrazione. Una conica $\mathcal{C}$ con fuoco $F(x_0, y_0)$ e direttrice $d : ax+by+c = 0$, ha equazione, in coordinate non omogenee, del tipo:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - h(ax + by + c)^2 = 0.$$

Sia $P(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C}$; allora si ha:

$$d(P, F) = \sqrt{(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2},$$

$$d(P, d) = \left| \frac{a\bar{x} + b\bar{y} + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

da cui si ricava:

$$\frac{d(P, F)^2}{d(P, d)^2} = \frac{(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2}{(a\bar{x} + b\bar{y} + c)^2}(a^2 + b^2) = h(a^2 + b^2).$$

□

Proposizione 2.8.5. *Sia $\mathcal{C}$ una parabola. Il rapporto delle distanze di un punto proprio e reale $P \in \mathcal{C}$ dal fuoco F e dalla direttrice d è 1.*

Dimostrazione. Supponiamo che il fuoco abbia coordinate $F(\frac{p}{2}, 0)$ e la direttrice d abbia equazione $x + \frac{p}{2} = 0$; allora l'equazione di $\mathcal{C}$ è $y^2 = 2px$. Se $P(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, allora si ha:

$$\begin{aligned} d(P, F) &= \sqrt{(x_o - \tfrac{p}{2})^2 + y_o^2} = \sqrt{(x_o - \tfrac{p}{2})^2 + 2px_o} \\ &= \sqrt{(x_o + \tfrac{p}{2})^2} = \left|x_o + \tfrac{p}{2}\right| = d(P, d), \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Se $\mathcal{C}$ è una conica generale a punti reali, il rapporto delle distanze di $P \in \mathcal{C}$ da un fuoco e dalla relativa direttrice si chiama *eccentricità* e si indica con e.

Si può dimostrare che un'ellisse ha eccentricità $e < 1$; un'iperbole ha eccentricità $e > 1$; una parabola ha eccentricità $e = 1$.

Proposizione 2.8.6. *In un'ellisse la somma delle distanze di un suo punto qualunque dai fuochi è costante ed è uguale alla misura dell'asse focale (lunghezza del segmento di estremi V_1, V_2, vertici che stanno sull'asse contenente i fuochi).*

Dimostrazione. Se F_1 ed F_2 sono fuochi e d_1 e d_2 rispettivamente le relative direttrici, si ha:

$$\frac{d(P,F_1)}{d(P,d_1)} = \frac{d(P,F_2)}{d(P,d_2)} = e$$

da cui

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = e \cdot (d(P,d_1) + d(P,d_2)) = e \cdot d(d_1,d_2),$$

che quindi non dipende da P.

Allora per $P = V_1$ si ha:

$$d(V_1,F_1) + d(V_1,F_2) = e \cdot d(d_1,d_2)$$

ma

$$d(V_1,F_1) + d(V_1,F_2) = d(V_1,F_1) + d(F_1,F_2) + d(F_2,V_2) = d(V_1,V_2)$$

e quindi

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = d(V_1,V_2) \quad (= 2a).$$

$\square$

Nel caso dell'iperbole si può dimostrare che il valore assoluto della differenza delle distanze di un punto dell'iperbole dai fuochi è uguale alla misura dell'asse focale, cioè

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a.$$

Osservazione

E' facile calcolare le coordinate dei fuochi e l'eccentricità di una conica, quando questa ha equazione in forma canonica.

Per l'**ELLISSE**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a \geq b > 0$, posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ si trova facilmente che i fuochi hanno coordinate $F(\pm c, 0)$, l'eccentricità e è data da $e = \frac{c}{a} < 1$ e le direttrici sono le rette $x = \pm\frac{a}{e}$.

Per l'**IPERBOLE**: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > 0$ e $b > 0$, posto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, i fuochi hanno coordinate $F(\pm c, 0)$, l'eccentricità $e = \frac{c}{a} > 1$ e le direttrici sono le rette $x = \pm\frac{a}{e}$.

Per la **PARABOLA**: $y^2 = 2px$ con $p > 0$, il fuoco ha coordinate $F(\frac{p}{2}, 0)$, l'eccentricità $e = 1$ e la direttrice d ha equazione $x + \frac{p}{2} = 0$.

2.9 Esercizi sulle coniche

ESERCIZIO n.1
Determinare l'equazione della conica $\mathcal{C}$ passante per l'origine $O(0,0)$ e per i punti $A(0,1)$, $B(2,0)$, $C(1,2)$, $D(2,1)$.

Svolgimento
Imponendo alla conica

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

il passaggio per i cinque punti si ha :
$O(0,0) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow a_{33} = 0$
$A(0,1) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow a_{22} + 2a_{23} = 0$
$B(2,0) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow a_{11} + a_{13} = 0$
$C(1,2) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow a_{11} + 4a_{22} + 4a_{12} + 2a_{13} + 4a_{23} = 0$
$D(2,1) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 4a_{11} + a_{22} + 4a_{12} + 4a_{13} + 2a_{23} = 0$
da cui si ricava $a_{12} = a_{33} = 0$, $a_{22} = \frac{a_{11}}{2}$, $a_{13} = -a_{11}$, $a_{23} = -\frac{a_{11}}{4}$
e quindi $\mathcal{C}$ ha equazione:

$$2x^2 + y^2 - 4x - y = 0;$$

ponendo nell'equazione precedente $x = \frac{x_1}{x_3}$ ed $y = \frac{x_2}{x_3}$ si ha l'equazione di $\mathcal{C}$ in coordinate omogenee:

$$2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_3 - x_2x_3 = 0.$$

Si può pervenire allo stesso risultato usando il metodo dei fasci.
La conica $\mathcal{C}$ appartiene al fascio di coniche individuato dalle coniche degeneri $\mathcal{C}_1 = OB \cup AD$ e $\mathcal{C}_2 = OA \cup BD$ di equazione :

$$\lambda y(y-1) + \mu x(x-2) = 0;$$

imponendo alla generica conica del fascio il passaggio per $C(1,2)$, si ottiene $\mu = 2\lambda$, da cui l'equazione di $\mathcal{C}$.

ESERCIZIO n.2
Determinare l'equazione della conica $\mathcal{C}$ tangente in $O(0,0)$ alla retta $t : x + y = 0$ e passante per i punti $A(0,1)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$.

Svolgimento
La conica $\mathcal{C}$ appartiene al fascio di coniche individuato dalle coniche degeneri $\mathcal{C}_1 = t \cup AB$ e $\mathcal{C}_2 = OA \cup OB$ di equazione :

$$\lambda xy + \mu(x+y)(x+2y-2) = 0;$$

imponendo alla generica conica del fascio il passaggio per $C(2,1)$, si ottiene $\lambda + 3\mu = 0$ o equivalentemente $\lambda = -3\mu$, da cui l'equazione di $\mathcal{C}$:

$$x^2 + 2y^2 - 2x - 2y = 0.$$

ESERCIZIO n.3

Determinare l'equazione della conica $\mathcal{C}$ tangente in $A(0,1)$ all'asse delle y, tangente in $B(2,0)$ all'asse delle x e passante per $C(1,1)$.

Svolgimento

La conica $\mathcal{C}$ appartiene al fascio di coniche individuato dalle coniche degeneri $\mathcal{C}_1 = \text{asse}x \cup \text{asse}y$ e $\mathcal{C}_2 = AB^2$ di equazione:

$$\lambda xy + \mu(x + 2y - 2)^2 = 0;$$

imponendo alla generica conica del fascio il passaggio per $C(1,1)$, si ottiene $\lambda + \mu = 0$, o equivalentemente $\lambda = -\mu$ da cui l'equazione di $\mathcal{C}$:

$$x^2 + 4y^2 + 3xy - 4x - 8y + 4 = 0.$$

ESERCIZIO n.4

Trovare le coniche degeneri del fascio di coniche individuato dalla circonferenza $\Gamma : x^2 + y^2 - x - y = 0$ e dall'iperbole $\mathcal{C} : 2x^2 - y^2 - x - y = 0$.

Svolgimento

Il fascio ha equazione $\lambda(x^2 + y^2 - x - y) + \mu(2x^2 - y^2 - x - y) = 0$ quindi la generica conica del fascio di equazione $(\lambda+\mu)x^2+(\lambda-\mu)y^2-(\lambda+\mu)(x+y) = 0$ è degenere se è uguale a zero il determinante della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & -(\lambda+\mu)/2 \\ 0 & \lambda - \mu & -(\lambda+\mu)/2 \\ -(\lambda+\mu)/2 & -(\lambda+\mu)/2 & 0 \end{pmatrix},$$

e questo accade per $\lambda + \mu = 0$ o $2\lambda + \mu = 0$, da cui $\lambda = -\mu$ o $\lambda = -\frac{\mu}{2}$; si hanno così le due coniche degeneri $\mathcal{C}_1 : (\sqrt{2}y - x)(\sqrt{2}y + x) = 0$ e $\mathcal{C}_2 : (x + y)(-3x + 3y + 1) = 0$.

ESERCIZIO n.5

a) Classificare la conica $\mathcal{C} : x^2 + 2y^2 - 2x - 2y = 0$;
b) trovare la retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $C(2,1)$.

Svolgimento

a) La matrice dell'equazione di $\mathcal{C}$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

essendo $detA = -2$, il rango di A è tre, quindi la conica $\mathcal{C}$ è generale. Risulta inoltre $D_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 2 > 0$, quindi $\mathcal{C}$ è ellisse.
b) Posto $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 2y$, la retta t tangente in $C(2, 1)$ ha equazione:

$$f_x^o(x-2) + f_y^o(y-1) = 0$$

dove f_x^o ed f_y^o sono le derivate di $f(x, y)$ rispetto ad x ed y e calcolate in C. Dopo un semplice calcolo si trova $f_x^o = 2$ ed $f_y^o = 2$, da cui l'equazione di t:

$$x + y - 3 = 0.$$

ESERCIZIO n.6
Determinare l'equazione della conica $\mathcal{C}$ passante per l'origine $O(0, 0)$ ed avente le rette $r : x-y-1 = 0$ ed $s : x+2y-1 = 0$ come rette polari rispettivamente dei punti $R(1, 0)$ ed $S(0, -1)$.

Svolgimento
Tenendo presente l'equazione della polare in coordinate non omogenee (2.3.3) si ha :
$p_R : (a_{11} + a_{13})x + (a_{12} + a_{23})y + (a_{13} + a_{33}) = 0$ (polare di R)
$p_S : (-a_{12} + a_{13})x + (-a_{22} + a_{23})y + (-a_{23} + a_{33}) = 0$ (polare di S);
imponendo che $r = p_R$ e $s = p_S$ si ha:

$$\frac{a_{11} + a_{13}}{1} = \frac{a_{12} + a_{23}}{-1} = \frac{a_{13} + a_{33}}{-1}$$
$$\frac{-a_{12} + a_{13}}{1} = \frac{-a_{22} + a_{23}}{2} = \frac{-a_{23} + a_{33}}{-1}$$

da cui si ricava $a_{11} = -2a_{23}$, $a_{22} = -a_{23}$, $a_{13} = a_{23}$, $a_{12} = a_{33} = 0$ e quindi l'equazione di $\mathcal{C} : 2x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

ESERCIZIO n.7
Trovare equazioni delle rette passanti per l'origine $O(0, 0)$ e tangenti alla conica $\mathcal{C} : 2x^2 - y^2 + 2y + 1 = 0$.

Svolgimento
La generica retta r per $O(0, 0)$ ha equazione $y = mx$; le intersezioni di r con $\mathcal{C}$ si hanno risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 2y + 1 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} (2-m^2)x^2+2mx+1=0 \\ y=mx; \end{cases}$$

la retta r è tangente alla conica $\mathcal{C}$ se il sistema ammette soluzioni coincidenti e questo accade per i valori di m tali che $\frac{\Delta}{4}=m^2-(2-m^2)=0$, ossia per $m=\pm 1$.
Allora le rette tangenti richieste hanno equazioni $y=\pm x$.

ESERCIZIO n.8
Trovare l'equazione cartesiana della parabola Γ tangente all'ellisse $\mathcal{C}: x^2+2y^2-x+1=0$ nei suoi punti di intersezione con la retta $r: x-y=0$.

Svolgimento
Usando il metodo dei fasci, la parabola richiesta appartiene al fascio di coniche bitangenti individuato dall'ellisse e dalla retta r contata due volte. Il fascio ha equazione:

$$\lambda(x^2+2y^2-x+1)+\mu(x-y)^2=0;$$

la parabola del fascio si ottiene per $D_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=2\lambda^2+3\lambda\mu=0$, da cui $2\lambda+3\mu=0$ (perchè $\lambda\neq 0$); ponendo $\lambda=3$ e $\mu=-2$ si ha l'equazione di Γ: $(x+2y)^2-3x+3=0$.

ESERCIZIO n.9
a) Verificare che $\mathcal{C}: x^2-2y^2-x+2y-1=0$ è iperbole;
b) trovare le equazioni degli asintoti di $\mathcal{C}$.

Svolgimento
La matrice dell'equazione di $\mathcal{C}$ è:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

essendo $detA=3/2$, il rango di A è tre, quindi la conica $\mathcal{C}$ è generale. Risulta inoltre $D_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-2<0$, quindi $\mathcal{C}$ è iperbole.
b) Gli asintoti sono rette passanti per il centro C dell'iperbole ed aventi parametri direttori (l,m) soddisfacenti l'equazione

$$a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0;$$

che nel nostro caso si scrive

$$l^2-2m^2=0,$$

da cui $l = \pm\sqrt{2}m$. Le coordinate del centro C si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

che per l'iperbole $\mathcal{C}$ è

$$\begin{cases} x - 1/2 = 0 \\ -2y + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui $C(1/2, 1/2)$. Si ottengono così per gli asintoti le equazioni:

$$\pm 2\sqrt{2}x - 4y + 2 \mp \sqrt{2} = 0.$$

ESERCIZIO n.10

Trovare l'asse e la tangente nel vertice della parabola $\mathcal{C} : x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y = 0$.

Svolgimento

La matrice dell'equazione della conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $detA = -\frac{1}{4} \neq 0$, quindi $\mathcal{C}$ è generale; inoltre, poichè $D_{33} = 0$, $\mathcal{C}$ è una parabola. Risolvendo il sistema

$$C_\infty : \begin{cases} x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0 \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

si ottiene il punto improprio $C_\infty(1, 1, 0)$. La direzione ortogonale a C_∞ definisce il punto improprio $C'_\infty(1, -1, 0)$. L'asse è $a = p_{C'_\infty}$, quindi $a : 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0$, o in coordinate non omogenee, $a : 4x - 4y - 3 = 0$.

Il vertice della parabola $\mathcal{C}$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (x - y)^2 - x + 2y = 0 \\ 4(x - y) - 3 = 0, \end{cases}$$

da cui $V(\frac{15}{16}, \frac{3}{16})$. La tangente in V è la retta per V e perpendicolare all'asse: l'asse ha parametri direttori $l = 1, m = 1$ $(l = b, m = -a)$; la retta per V e perpendicolare all'asse ha parametri direttori $l' = 1, m' = -1$, quindi ha equazione

$$\frac{x - x_0}{l'} = \frac{y - y_0}{m'}$$

ossia, $8(x + y) - 9 = 0$.

ESERCIZIO n.11

Determinare l'equazione dell'iperbole avente centro nell'origine, vertice $V(-1,0)$ ed un asintoto parallelo alla retta $r: 2x-y+3=0$.

Svolgimento
L'altro vertice è $V'(1,0)$ simmetrico di V rispetto al centro; l'asse contenente V e v' è l'asse x: $y=0$. Le tangenti nei vertici sono le rette di equazione $x=1$ e $x=-1$ rispettivamente. Allora $\mathcal{C}$ appartiene al fascio di coniche bitangenti

$$\lambda(x-1)(x+1)+\mu y^2=0,$$

o in coordinate omogenee,

$$\lambda(x_1-x_3)(x_1+x_3)+\mu x_2^2=0.$$

Imponendo il passaggio per $R_\infty(1,2,0)$, si ha $\lambda+4\mu=0$, da cui per $\lambda=4$ e $\mu=-1$, l'equazione di $\mathcal{C}$ è:

$$4(x+1)(x-1)-y^2=0,$$

cioè, $\mathcal{C}: 4x^2-y^2-4=0$.

ESERCIZIO n.12
Dopo aver verificato che $\mathcal{C}: x^2-xy+y^2-x=0$ è una ellisse, determinarne il centro e gli assi.

Svolgimento
Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x-(1/2)y-(1/2)=0 \\ (-1/2)x+y=0 \end{cases}$$

si ottengono le coordinate del centro $C(2/3,1/3)$. Gli assi sono le rette per il centro ed aventi parametri direttori che sono soluzioni dell'equazione $a_{12}l^2+(a_{22}-a_{11})lm-a_{12}m^2=0$, che nel nostro caso si scrive: $l^2-m^2=0$; le soluzioni sono $(l,\pm l)$ e quindi gli assi hanno equazioni: $\frac{x-2/3}{l}=\frac{y-1/3}{l}$ e $\frac{x-2/3}{l}=\frac{y-1/3}{-l}$ o equivalentemente: $3x-3y-1=0$ e $x+y-1=0$.

ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO n.13
Determinare l'equazione della conica $\mathcal{C}$ tangente in O alla retta $r: x-y=0$ e passante per i punti $A(1,0)$, $B(2,1)$, $C(-1,1)$.

ESERCIZIO n.14
Determinare l'equazione della conica $\mathcal{C}$ tangente in $A(0,1)$ all'asse delle y, tangente in $B(2,1)$ alla retta $s: x-2y=0$ e tangente alla retta $t: 3x-y-1=0$.

ESERCIZIO n.15

Determinare l'equazione della parabola di vertice $V(1,1)$, tangente alla retta $t : x+1 = 0$ e avente diametri paralleli alla retta $r : 2x+y = 0$.

ESERCIZIO n.16

Verificare che $\mathcal{C} : 4x^2 - 4xy + y^2 + 3x = 0$ è una parabola e trovare l'asse e la tangente nel vertice.

ESERCIZIO n.17

Classificare le seguenti coniche e trovare centro, assi ed eventuali asintoti:

a) $\mathcal{C} : 2x^2 - 3xy - 2y^2 - 5x + 10y - 5 = 0$;

b) $\mathcal{C} : 3x^2 + 3y^2 + 2xy + 2x - 10y + 7 = 0$;

c) $\mathcal{C} : x^2 - 2xy + y^2 + x + \frac{9}{16} = 0$.

ESERCIZIO n.18

Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera passante per $O(0,0)$, tangente alla retta $y-1 = 0$ in $P(-2,1)$ e avente la retta $x+y+1 = 0$ come polare di $Q(1,1)$.

ESERCIZIO n.19

Scrivere l'equazione della conica avente per assi le rette $x = \pm y$ e tangente alla retta $y - 3x - 5 = 0$ in $(2,1)$.

ESERCIZIO n.20

Senza fare troppi calcoli, trovare centro e assi della conica $\mathcal{C} : (x-2)^2 + 2(y+1)^2 - 3 = 0$.

ESERCIZIO n.21

Verificare che $\mathcal{C} : 3(x-2y)^2 - 2x - y = 0$ è una parabola; senza fare troppi calcoli scrivere l'equazione di $\mathcal{C}$ in forma canonica.

Capitolo 3

Ampliamenti dello spazio euclideo

3.1 Lo spazio euclideo ampliato con i punti impropri

La relazione binaria $\sim$ nell'insieme $\mathbb{R}^4 - \{(0,0,0,0)\}$ così definita:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \sim (y_1, y_2, y_3, y_4) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \exists\ \varrho\ \in\ \mathbb{R} - \{0\}\ \ni' \\ (y_1, y_2, y_3, y_4) = (\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3, \varrho x_4) \end{array}$$

è una relazione di equivalenza; l'insieme quoziente

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^4 - \{(0,0,0,0)\}}{\sim}$$

si chiama *spazio numerico proiettivo reale*.
Nel seguito si denoterà con $p : \mathbb{R}^4 - \{(0,0,0,0)\} \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, la surgezione canonica, cioè l'applicazione che ad ogni quaterna ordinata $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 - \{(0,0,0,0)\}$ associa la classe di equivalenza da essa rappresentata.

Nell'insieme $\sum$ delle rette dello spazio euclideo σ, la relazione di parallelismo $\mathcal{P}$:

$$r\mathcal{P}s \Leftrightarrow r||s$$

è una relazione d'equivalenza; l'insieme quoziente:

$$\pi_\infty = \frac{\sum}{\mathcal{P}}$$

si chiama insieme delle *direzioni* dello spazio euclideo σ.
Un legame tra lo spazio numerico proiettivo reale e lo spazio euclideo ampliato con le direzioni, è stabilito dal seguente teorema:

Teorema 3.1.1. *Lo spazio numerico proiettivo reale* $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ *è bigettivo all'insieme* $\sigma \cup \pi_\infty$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{R}(0, x, y, z)$ un riferimento affine su σ; si consideri l'applicazione:

$$k : \sigma \cup \pi_\infty \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$$

così definita:

$$\forall \;\; P(x, y, z) \in \sigma : \;\; k(P) = p(x, y, z, 1)$$
$$\forall \;\; R_\infty \in \pi_\infty : \;\; k(R_\infty) = p(l, m, n, 0)$$

dove l, m, n sono i parametri direttori della retta che rappresenta la direzione R_∞.

In modo analogo a come fatto nel caso del piano euclideo ampliato con i punti impropri, si prova facilmente che k è bigettiva. □

L'applicazione k del teorema precedente si chiama *sistema di coordinate omogenee* associato al riferimento affine $\mathcal{R}(0, x, y, z)$ prefissato. Se $P \in \sigma \cup \pi_\infty$ e $k(P) = p(x_1, x_2, x_3, x_4)$, la quaterna ordinata (x_1, x_2, x_3, x_4) si chiama *quaterna delle coordinate omogenee* di P; si osservi che $(\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3, \varrho x_4)$, con $\varrho \in \mathbb{R} - \{0\}$, è ancora quaterna di coordinate omogenee di P. Se P è un punto dello spazio euclideo σ, le sue coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4) hanno $x_4 \neq 0$ e le sue coordinate cartesiane sono $(x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4})$. Se P è una direzione, le coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4) di P hanno sempre $x_4 = 0$.

Nel seguito l'insieme $\bar{\sigma} = \sigma \cup \pi_\infty$ si chiamerà *spazio euclideo ampliato con i punti impropri*; i punti di σ si chiameranno *punti propri*, gli elementi di π_∞ si chiameranno *punti impropri* (o *punti all'infinito*).

Un *piano* di $\bar{\sigma}$ è π_∞ *(piano improprio) oppure un piano* α *dello spazio euclideo, ampliato con i punti impropri delle rette contenute in* α *(*piano proprio).

Le *rette* dello spazio euclideo ampliato $\bar{\sigma}$ sono le rette proprie, cioè i sottoinsiemi del tipo $r \cup R_\infty$ (r = retta del piano euclideo, R_∞ direzione definita dalla retta r), oppure rette improprie, cioè intersezioni di un piano proprio con il piano improprio.

Fissato su $\bar{\sigma}$ un sistema di coordinate omogenee associato ad un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y, z)$

$$k : \sigma \cup \pi_\infty \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R}),$$

si può ottenere una *rappresentazione analitica dei piani* di $\bar{\sigma}$ nel modo seguente:

- al piano improprio π_∞ si associa l'equazione $x_4 = 0$; infatti tutti i punti impropri hanno coordinate omogenee del tipo $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, 0)$ che soddisfano ovviamente l'equazione $x_4 = 0$; viceversa ogni soluzione non banale $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$ dell'equazione $x_4 = 0$ è quaterna di coordinate omogenee di un punto improprio.

- Al piano proprio α, con $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ si associa l'equazione lineare omogenea:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0; \tag{3.1.1}$$

per questo motivo l'equazione (3.1.1) si chiama *equazione in coordinate omogenee* del piano α (rispetto al sistema di coordinate omogenee k o rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ associato).

Si osservi che $\varrho(ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) = 0$ con $\varrho \in \mathbb{R} - \{0\}$, è ancora equazione in coordinate omogenee del piano α.

Una retta dello spazio euclideo ampliato, essendo intersezione di due piani, si rappresenta analiticamente con il sistema formato dalle equazioni dei piani che la individuano.

3.2 Lo spazio euclideo ampliato con i punti complessi (cenni)

Sia σ lo spazio euclideo ed $\mathcal{R}(O,x,y,z)$ un riferimento affine su σ; poichè un numero reale è un particolare numero complesso, si conviene identificare le terne di numeri reali pensate come elementi di $\mathbb{C}^3$, con i punti di σ che hanno tali terne come coordinate cartesiane rispetto al riferimento prefissato. Con tale identificazione l'insieme:

$$\sigma^{\mathbb{C}} = \sigma \cup \mathbb{C}^3$$

si chiama *estensione complessa dello spazio euclideo* σ; i suoi elementi si chiameranno *punti*, in particolare i punti di σ si chiameranno *punti reali*, le terne ordinate di numeri complessi che non sono terne di numeri reali si chiameranno *punti complessi.*

I piani $\sigma^{\mathbb{C}}$ si definiscono nel modo seguente:
un piano complesso di $\sigma^{\mathbb{C}}$ è l'insieme dei punti di $\sigma^{\mathbb{C}}$ le cui coordinate sono tutte e sole le soluzioni (in $\mathbb{C}^3$) di un'equazione algebrica del tipo $ax+by+cz+d=0$, con $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ ed $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Quando $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ allora il piano si chiamerà *piano reale* di $\sigma^{\mathbb{C}}$.

Due piani $\alpha : ax+by+cz+d=0$ ed $\beta : a'x+b'y+c'z+d'=0$ di $\sigma^{\mathbb{C}}$ si dicono *paralleli* se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (con la solita convenzione che se uno dei denominatori è 0, allora è 0 anche il corrispondente numeratore).

Le rette di $\sigma^{\mathbb{C}}$ sono intersezioni di due piani (distinti) non paralleli, quindi si rappresentano analiticamente con un sistema lineare del tipo:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0, \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

con $a,b,c,d,a',b',c',d' \in \mathbb{C}$ e le terne (a,b,c) $(\neq (0,0,0))$ e (a',b',c') $(\neq (0,0,0))$ non sono proporzionali.

3.3 Lo spazio euclideo ampliato con i punti complessi ed i punti impropri (cenni)

L'estensione complessa $\sigma^{\mathbb{C}}$ dello spazio euclideo σ si può ampliare con i punti impropri considerando l'insieme $\sum^{\mathbb{C}}$ delle rette di $\sigma^{\mathbb{C}}$ con la relazione di parallelismo $\mathcal{P}$; questa è una relazione d'equivalenza e l'insieme quoziente

$$\pi_\infty = \frac{\sum^{\mathbb{C}}}{\mathcal{P}}$$

si chiama *insieme delle direzioni* di $\sigma^{\mathbb{C}}$.

In modo analogo al caso reale si può definire lo spazio numerico proiettivo complesso. Nell'insieme $\mathbb{C}^4 - \{(0,0,0,0)\}$ si considera la relazione $\sim$ così definita:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \sim (y_1, y_2, y_3, y_4) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \exists\ \varrho\ \in\ \mathbb{C} - \{0\}\ \ni' \\ (y_1, y_2, y_3, y_4) = (\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3, \varrho x_4). \end{array}$$

$\sim$ è una relazione d'equivalenza e l'insieme quoziente:

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^4 - \{(0,0,0,0)\}}{\sim}$$

si chiama *spazio numerico proiettivo complesso.*

Fissato nello spazio euclideo σ un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, risulta bigettiva l'applicazione

$$k : \sigma^{\mathbb{C}} \cup \pi_\infty \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$$

così definita: se $P \in \sigma^{\mathbb{C}}$ con $P(x, y, z)$ rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ prefissato, allora $k(P) = p(x, y, z, 1)$; se $R_\infty \in \pi_\infty$ è la direzione definita da una retta r di parametri direttori (l, m, n), allora $k(R_\infty) = p(l, m, n, 0)$. La bigezione k si chiama *sistema di coordinate omogenee* su $\overline{\sigma}^{\mathbb{C}} = \sigma^{\mathbb{C}} \cup \pi_\infty$, rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y, z)$. Nel seguito gli elementi di $\overline{\sigma}^{\mathbb{C}} = \sigma^{\mathbb{C}} \cup \pi_\infty$ si chiameranno *punti*, più precisamente i punti di $\sigma^{\mathbb{C}}$ si chiameranno *punti propri*, quelli di π_∞ *punti impropri* (o anche *punti all'infinito*). Se $P \in \overline{\sigma}^{\mathbb{C}} = \sigma^{\mathbb{C}} \cup \pi_\infty$ e $k(P) = p(x_1, x_2, x_3, x_4)$, allora (x_1, x_2, x_3, x_4) si chiama *quaterna delle coordinate omogenee* del punto P (rispetto al sistema di coordinate omogenee k).

Si osservi che se P è un punto proprio di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4), la terna ordinata $(x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4})$ rappresenta la terna delle coordinate affini di P rispetto a $\mathcal{R}(O, x, y, z)$. Se P è un punto improprio di coordinate omogenee $(x_1, x_2, x_3, x_4 = 0)$, allora $l = x_1$ ed $m = x_2, n = x_3$ sono i parametri direttori di una retta avente direzione $R_\infty \equiv P$.

Nel seguito l'insieme $\overline{\sigma}^{\mathbb{C}} = \sigma^{\mathbb{C}} \cup \pi_\infty$ si chiamerà *estensione complessa dello spazio euclideo ampliato con i punti impropri.* Un piano di $\overline{\sigma}^{\mathbb{C}}$ è π_∞ (*piano improprio*) oppure un *piano proprio* cioè un piano di $\sigma^{\mathbb{C}}$ ampliato con i punti impropri di tutte le rette in esso contenute.

Le *rette improprie* di $\overline{\sigma}^{\mathbb{C}}$ sono intersezioni di un piano proprio con il piano improprio; le *rette proprie* sono intersezioni di due piani propri distinti e non paralleli.

Fissato un sistema di coordinate omogenee, analiticamente le rette si rappresentano con il sistema delle equazioni dei due piani che le individuano.

Capitolo 4

Le Quadriche

In tutti i paragrafi che seguono l'ambiente in cui si considera una quadrica è l'estensione complessa $\overline{\sigma}^{\mathbb{C}} = \sigma^{\mathbb{C}} \cup \pi_\infty$ dello spazio euclideo ampliato con i punti impropri, su cui è fissato un sistema di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4) indotto da un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y, z)$.

4.1 Definizione e rango di quadrica - Polarità

Una *quadrica* è l'insieme $\mathcal{Q}$ dei punti dello spazio $\overline{\sigma}^{\mathbb{C}}$ le cui coordinate omogenee sono soluzioni di un'equazione del tipo:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ &+2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

dove, a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ sono numeri reali non tutti nulli.

La (4.1.1) si chiama equazione della quadrica $\mathcal{Q}$ rispetto al sistema di coordinate omogenee prefissato.

Se conveniamo porre $a_{ij} = a_{ji}$, per ogni $i, j = 1, 2, 3, 4$, allora la (4.1.1) si scrive nella forma compatta

$$\mathcal{Q} : \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x_ix_j = 0$$

o anche, sottintendendo il simbolo di sommatoria:

$$\mathcal{Q} : a_{ij}x_ix_j = 0.$$

Ponendo nella (4.1.1) $x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}$, si ottiene l'equazione di $\mathcal{Q}$ in coordinate cartesiane non omogenee:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz+ \\ +2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

La (4.1.2) si chiama anche *equazione cartesiana* di $\mathcal{Q}$ rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ prefissato.

La matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

si chiama matrice dell'equazione della quadrica $\mathcal{Q}$.

Si può dimostrare che se $a'_{hk}x'_h x'_k = 0$ è l'equazione di $\mathcal{Q}$ rispetto ad un altro sistema di coordinate omogenee (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) (ottenuto a partire da un riferimento affine $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$), la matrice $A' = (a'_{hk})_{1\leq h,k\leq 4}$ ha lo stesso rango di $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}$. Per questo motivo il rango di A si chiama *rango della quadrica* $\mathcal{Q}$. Si ottiene allora una classificazione (proiettiva) delle quadriche in base al rango:

una quadrica $\mathcal{Q}$ si dice

- *doppiamente degenere* se è di *rango 1*,
- *semplicemente degenere* se è di *rango 2*,
- *speciale* se è di *rango 3*,
- *generale* se è di *rango 4*.

Un punto $P(\overset{o}{x}_1, \overset{o}{x}_2, \overset{o}{x}_3, \overset{o}{x}_4)$ di una quadrica si dice *doppio* se $(\overset{o}{x}_1, \overset{o}{x}_2, \overset{o}{x}_3, \overset{o}{x}_4)$ è soluzione non banale del sistema lineare omogeneo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= 0 \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 &= 0, \end{aligned}$$

in caso contrario si dice che P è un punto *semplice*.

Si prova facilmente che le quadriche di *rango uno* sono luogo di punti doppi e si spezzano in *due piani coincidenti*; le quadriche di *rango due* hanno una retta che è luogo di punti doppi e si spezzano in *due piani distinti* passanti per tale retta; le quadriche di *rango tre* hanno un solo punto doppio che può essere un punto proprio (in questo caso la quadrica si chiama *cono* e il punto doppio proprio si chiama *vertice*) oppure improprio (in questo caso la quadrica si chiama *cilindro*); le quadriche di *rango quattro* sono prive di punti doppi.

Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica e $P(\overset{o}{x}_1, \overset{o}{x}_2, \overset{o}{x}_3, \overset{o}{x}_4)$ un punto fissato dello spazio; posto:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11} \overset{o}{x}_1 + a_{12} \overset{o}{x}_2 + a_{13} \overset{o}{x}_3 + a_{14} \overset{o}{x}_4, \\ u_2 &= a_{12} \overset{o}{x}_1 + a_{22} \overset{o}{x}_2 + a_{23} \overset{o}{x}_3 + a_{24} \overset{o}{x}_4, \\ u_3 &= a_{13} \overset{o}{x}_1 + a_{23} \overset{o}{x}_2 + a_{33} \overset{o}{x}_3 + a_{34} \overset{o}{x}_4, \\ u_4 &= a_{14} \overset{o}{x}_1 + a_{24} \overset{o}{x}_2 + a_{34} \overset{o}{x}_3 + a_{44} \overset{o}{x}_4, \end{aligned}$$

se accade che $(u_1, u_2, u_3, u_4) \neq (0,0,0,0)$, il piano di equazione $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ si chiama **piano polare** di P rispetto alla quadrica Q.

Se $\mathcal{Q}$ è una quadrica di rango quattro, per ogni punto dello spazio euclideo ampliato esiste il piano polare e l'applicazione che ad ogni punto fa corrispondere il suo piano polare è una bigezione che prende il nome di *polarità* rispetto alla quadrica $\mathcal{Q}$.

Si chiama *tetraedro autopolare* rispetto a $\mathcal{Q}$, un tetraedro tale che ogni vertice sia polo della faccia opposta.

Per le quadriche di rango quattro vale il seguente teorema di reciprocità.

Teorema 4.1.1 (teorema di reciprocità). *Data una quadrica generale $\mathcal{Q}$, comunque si fissano due punti P e Q nello spazio, indicati con p_P e p_Q rispettivamente i piani polari di P e Q rispetto a $\mathcal{Q}$, allora si ha:*

$$P \in p_Q \quad \Leftrightarrow \quad Q \in p_P. \tag{4.1.3}$$

I punti P e Q (i piani p_P e p_Q) soddisfacenti (4.1.3) si dicono *punti coniugati* (*piani coniugati*) rispetto alla quadrica $\mathcal{Q}$.

Due rette r ed s si dicono *coniugate* rispetto alla quadrica $\mathcal{Q}$ se per ogni punto $R \in r$ il piano polare di R passa per la retta s.

Se P è punto semplice di una quadrica di rango maggiore di due, il piano polare di P si chiama *piano tangente* in P alla quadrica.
P è un *punto iperbolico* se il piano tangente in P interseca la quadrica in due rette reali e distinte; P è un *punto ellittico* se il piano tangente in P interseca la quadrica in due rette complesse coniugate; P è un *punto parabolico* se il piano tangente in P interseca la quadrica in due rette coincidenti. Si dimostra che le quadriche di rango tre sono le uniche quadriche a punti parabolici.

4.2 Classificazione affine delle quadriche - Centro - Piani diametrali

Si ha una classificazione affine delle quadriche studiando il comportamento delle quadriche rispetto al piano improprio (tale piano è lasciato fisso dal gruppo delle affinità).

- Le quadriche di rango quattro sono di tre tipi: *paraboloidi, ellissoidi, iperboloidi*.

  Paraboloide: il piano improprio è tangente alla quadrica, cioè la sua sezione con il piano improprio è una conica degenere che si spezza in due rette distinte (altrimenti si avrebbe un cilindro di rango tre); se queste sono reali si ha il *paraboloide iperbolico*; se sono complesse coniugate si ha il *paraboloide ellittico*.

  Ellissoide: il piano improprio interseca la quadrica in una conica non degenere priva di punti reali.

  Iperboloide: il piano improprio interseca la quadrica in una conica non degenere a punti reali e si ha un *iperboloide ellittico (o a due falde)* se i suoi punti sono ellittici, o un *iperboloide iperbolico (o ad una falda)* se i suoi punti sono iperbolici.

  Per riconoscere il tipo di una quadrica $\mathcal{Q} : a_{ij}x_ix_j = 0$, si considera il complemento algebrico A_{44} di a_{44} della matrice della quadrica; si dimostra che se $A_{44} \neq 0$, allora $\mathcal{Q}$ è ellissoide o iperboloide; se invece $A_{44} = 0$, la quadrica $\mathcal{Q}$ è un paraboloide.

  Si chiama *centro* della quadrica $\mathcal{Q} : a_{ij}x_ix_j = 0$ il polo del piano improprio. Da questa definizione segue che i paraboloidi hanno il centro che è un punto improprio (si dice anche che sono *quadriche senza centro*) invece gli ellissoidi e gli iperboloidi hanno centro che è un punto proprio (per questo motivo si chiamano *quadriche a centro*).

  Per le quadriche a centro le coordinate del centro si ottengono risolvendo il sistema lineare :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

  La soluzione del sistema (4.2.1) ci dà le coordinate del centro per il seguente motivo: la prima equazione del sistema (4.2.1) rappresenta il piano polare di $X_\infty(1, 0, 0, 0)$, la seconda il piano polare di $Y_\infty(0, 1, 0, 0)$ e la terza equazione rappresenta il piano polare di $Z_\infty(0, 0, 1, 0)$; usando il teorema di reciprocità, il centro della quadrica si ottiene come intersezione dei tre piani polari dei punti impropri degli assi coordinati del riferimento.

Un *piano diametrale* di $\mathcal{Q}$ è un piano proprio e reale passante per il centro; come conseguenza si ha che un piano diametrale è piano polare di un punto improprio D_∞ (che si chiama *direzione coniugata* di quel piano diametrale).

$\mathcal{Q}$ ha rango 4	A_{44}	$\mathcal{C}_\infty$	*natura dei punti*
paraboloide iperbolico	$A_{44} = 0$	degenere (due rette reali e distinte)	iperbolici
paraboloide ellittico	$A_{44} = 0$	degenere (due rette complesse coniugate)	ellittici
iperboloide ad una falda	$A_{44} \neq 0$	non degenere a punti reali	iperbolici
iperboloide a due falde	$A_{44} \neq 0$	non degenere a punti reali	ellittici
ellissoide	$A_{44} \neq 0$	non degenere senza punti reali	ellittici

- Se $\mathcal{Q} : a_{ij}x_ix_j = 0$ è una quadrica di rango tre, allora si riconosce se è un cono o un cilindro considerando il complemento algebrico A_{44} di a_{44} della matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}$ dell'equazione della quadrica; se $A_{44} \neq 0$, allora $\mathcal{Q}$ è un cono, se $A_{44} = 0$, la quadrica $\mathcal{Q}$ è un cilindro. L'intersezione di un cilindro con il piano improprio è una conica $\mathcal{C}_\infty$ degenere; se $\mathcal{C}_\infty$ si spezza in due rette complesse coniugate si ha un *cilindro ellittico*; se $\mathcal{C}_\infty$ si spezza in due rette reali e distinte si ha un *cilindro iperbolico*, se $\mathcal{C}_\infty$ si spezza in due rette coincidenti si ha un *cilindro parabolico*. L'intersezione di un cono con il piano improprio è una conica $\mathcal{C}_\infty$ non degenere.

$\mathcal{Q}$ ha rango 3	A_{44}	$\mathcal{C}_\infty$	*natura dei punti*
cilindro iperbolico	$A_{44} = 0$	degenere (due rette reali e distinte)	parabolici
cilindro ellittico	$A_{44} = 0$	degenere (due rette complesse coniugate)	parabolici
cilindro parabolico	$A_{44} = 0$	degenere (due rette coincidenti)	parabolici
cono	$A_{44} \neq 0$	non degenere	parabolici

4.3 Assi e piani principali di una quadrica

Si studieranno alcune proprietà metriche delle quadriche generali; a tale scopo il riferimento fissato nello spazio euclideo sarà un riferimento ortonormale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$.

Un *piano principale* di una quadrica generale è un piano diametrale ortogonale alla sua direzione coniugata.

Una retta propria e reale è asse della quadrica se essa è intersezione di due piani principali.

Si può dimostrare che un piano principale è piano di simmetria ortogonale per la quadrica (è luogo dei punti medi delle corde della quadrica ad esso ortogonali).

Data la quadrica $\mathcal{Q} : a_{ij}x_ix_j = 0$, il piano polare di un generico punto improprio $P(l, m, n, 0)$ ha equazione (in coordinate non omogenee): $u_1x + u_2y + u_3z + u_4 = 0$, dove $u_1 = a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n, \quad u_2 = a_{12}l + a_{22}m + a_{23}n,$ $u_3 = a_{13}l+a_{23}m+a_{33}n, \quad u_4 = a_{14}l+a_{24}m+a_{34}n$. Questo piano è principale se è soddisfatta la condizione:

$$\frac{a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n}{l} = \frac{a_{12}l + a_{22}m + a_{23}n}{m} = \frac{a_{13}l + a_{23}m + a_{33}n}{n};$$

ponendo uguale a λ questi rapporti, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)l + a_{12}m + a_{13}n = 0 \\ a_{12}l + (a_{22} - \lambda)m + a_{23}n = 0 \\ a_{13}l + a_{23}m + (a_{33} - \lambda)n = 0 \end{array}$$

che ammette autosoluzioni se il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite è uguale a zero, cioè

$$det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{4.3.1}$$

La (4.3.1) rappresenta un'equazione di terzo grado in λ. Questa equazione, detta *equazione secolare della quadrica* (già nota a Laplace nel corso dei suoi studi sulla meccanica celeste), si dimostra ammettere tre soluzioni tutte reali.

Se la quadrica è a centro (ellissoide o iperboloide) allora le tre soluzioni dell'equazione secolare sono tutte diverse da zero e in corrispondenza di esse si hanno tre piani principali.

Se la quadrica è senza centro (paraboloide), una soluzione dell'equazione è $\lambda = 0$ e ad essa corrisponde il piano improprio; le altre due soluzioni sono diverse da zero e in corrispondenza di esse si hanno due piani principali.

Da quanto sopra esposto, si deduce che *le quadriche a centro hanno tre assi*, invece *le quadriche senza centro hanno un solo asse.*

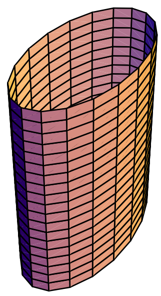
4.4 Equazioni canoniche delle quadriche di rango tre

- Sia $\mathcal{Q} : a_{ij}x_ix_j = 0$ un cilindro; sia $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ un riferimento ortonormale in modo che il punto doppio del cilindro coincida con il punto improprio dell'asse delle z; allora l'equazione di $\mathcal{Q}$ si scrive:

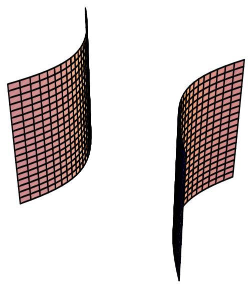
$$\mathcal{Q} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0$$

che nel piano $z = 0$ rappresenta una conica non degenere. Si può cambiare riferimento in modo che questa conica sia rappresentata da un'equazione in forma canonica; allora il cilindro in questo nuovo riferimento ha equazione di uno dei seguenti tipi:

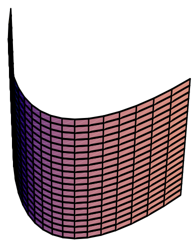
$$\begin{array}{lll} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & \textit{cilindro} & \textit{ellittico} \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & \textit{cilindro} & \textit{iperbolico} \\ x^2 = 2py & \textit{cilindro} & \textit{parabolico.} \end{array}$$



Cilindro ellittico.



Cilindro iperbolico.



Cilindro parabolico.

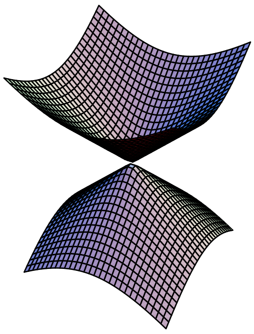
- Sia $\mathcal{Q} : a_{ij}x_ix_j = 0$ un cono; sia $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ un riferimento ortonormale avente l'origine coincidente con il vertice del cono, allora l'equazione del cono è:

$$\mathcal{Q} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0.$$

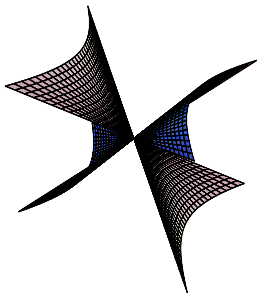
Sia γ la conica (non degenere) intersezione del cono con un piano π non passante per il vertice; con un ulteriore cambiamento di riferimento si può fare in modo che la conica Γ proiezione ortogonale di γ sul piano xy abbia equazione canonica.

Scegliendo per semplicità come piano π il piano $z = 1$ si ottengono per il cono i seguenti tipi di equazioni canoniche:

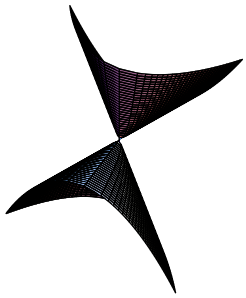
$$\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z^2 & \textit{cono} \quad \textit{ellittico} \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z^2, & \textit{cono} \quad \textit{iperbolico} \\ x^2 = 2pyz & \textit{cono} \quad \textit{parabolico.} \end{array}$$



Cono ellittico.



Cono iperbolico.

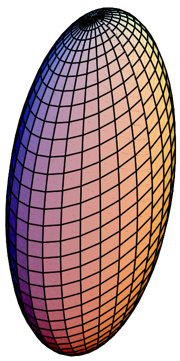


Cono parabolico.

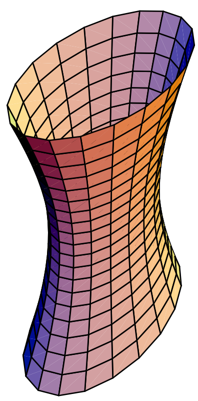
4.5 Equazioni canoniche delle quadriche di rango quattro

- Sia $\mathcal{Q} : a_{ij}x_ix_j = 0$ una quadrica a centro; si sceglie il riferimento ortonormale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ in modo che il tetraedro di vertici O, X_∞, Y_∞, Z_∞ sia *tetraedro autopolare* rispetto alla quadrica $\mathcal{Q}$; allora $\mathcal{Q}$ ha equazione :
$$\mathcal{Q} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0;$$
in base al segno dei coefficienti a_{11}, a_{22}, a_{33} e a_{44}, si hanno i seguenti tipi di quadriche:

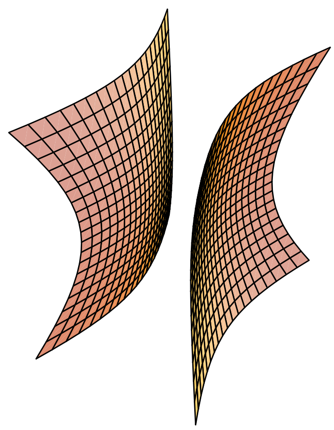
$$\begin{array}{ll}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 & \textit{ellissoide senza punti reali,} \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 & \textit{ellissoide a punti reali,} \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 & \textit{iperboloide iperbolico o ad una falda,} \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 & \textit{iperboloide ellittico o a due falde.}
\end{array}$$



Ellissoide.



Iperboloide ad una falda.



Iperboloide a due falde.

- Sia $\mathcal{Q} : a_{ij}x_ix_j = 0$ un paraboloide; si sceglie il riferimento ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ in modo che il piano coordinato yz sia piano polare di X_∞; allora si ottiene $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{14} = 0$ e la quadrica ha equazione
$$\mathcal{Q} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Intersecando il paraboloide con il piano yz si ottiene la parabola di equazioni

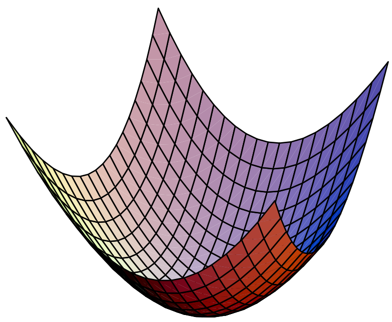
$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

(perchè la condizione $A_{44} = 0$ che esprime il fatto che $\mathcal{Q}$ è un paraboloide si riduce a: $a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0$). Si cambia ulteriormente il riferimento in modo che sul piano $x = 0$ tale parabola abbia equazione canonica $a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0$; allora in quest'ultimo riferimento il paraboloide ha equazione

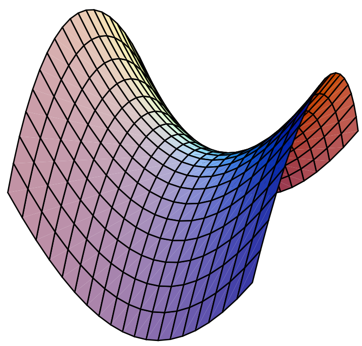
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0.$$

In base ai segni dei coefficienti a_{11}, a_{22} e a_{34}, si hanno i seguenti tipi di paraboloidi:

$$\begin{array}{ll} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z & \textit{paraboloide \quad ellittico} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z & \textit{paraboloide \quad a \quad sella.} \end{array}$$



Paraboloide ellittico.



Paraboloide a sella.

4.6 Esercizi sulle quadriche

In tutti gli esercizi che seguono l'ambiente in cui si considerano le quadriche è l'estensione complessa $\overline{\sigma}^{\mathbb{C}} = \sigma^{\mathbb{C}} \cup \pi_\infty$ dello spazio euclideo ampliato con i punti impropri, su cui è fissato un sistema di coordinate proiettive omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4) indotto da un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ (quando intervengono questioni metriche il riferimento si supporrà ortonormale).

ESERCIZIO n.1
Classificare la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - xz + y^2 = 0$.

Svolgimento
La matrice dell'equazione della quadrica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si vede subito che il rango di A è tre, inoltre $A_{44} \neq 0$ quindi Q è un **cono**. Si poteva anche osservare che $f(x,y,z) = x^2 - xz + y^2$ è un polinomio omogeneo nelle variabili x, y, z e quindi $f(x,y,z) = 0$ è un **cono** di vertice l'origine.

ESERCIZIO n.2
Classificare la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - y - z = 0$.

Svolgimento
La matrice dell'equazione della quadrica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

si vede subito che il rango di A è tre, inoltre $A_{44} = 0$ quindi Q è un cilindro. In coordinate omogenee Q ha equazione: $x_1^2 - x_2x_4 - x_3x_4 = 0$; intersecando Q con il piano improprio si ha la conica $\mathcal{C}_\infty$ di equazioni: $x_1^2 = 0, x_4 = 0$, questa è doppiamente degenere quindi Q è un **cilindro parabolico**.

ESERCIZIO n.3
Classificare la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 + 2z^2 - xy + x = 0$.

Svolgimento
La matrice dell'equazione della quadrica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si vede subito che il rango di A è quattro, inoltre $A_{44} \neq 0$ quindi Q è un ellissoide o un iperboloide. Il piano tangente nell'origine è il piano di equazione $x = 0$ ed interseca la quadrica nella conica degenere di equazioni $y^2+2z^2 = 0$; questa si spezza in due rette complesse coniugate, quindi Q è a punti ellittici; la conica all'infinito è la conica di equazioni: $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_4 = 0, x_4 = 0$ che è priva di punti reali, di conseguenza Q è un **ellissoide**.

ESERCIZIO n.4

Classificare la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - y^2 + z^2 - 2x - 2z = 0$.

Svolgimento

La matrice dell'equazione della quadrica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

si vede subito che il rango di A è quattro, inoltre $A_{44} \neq 0$ quindi $\mathcal{Q}$ è ellissoide o iperboloide. Vediamo la natura dei suoi punti. Il piano tangente nell'origine è il piano di equazione: $x + z = 0$, esso interseca la quadrica nella conica degenere di equazioni: $2x^2 - y^2 = 0, x + z = 0$ che si spezza nelle due rette reali e distinte $y = \pm\sqrt{2}x, x + z = 0$; segue che $\mathcal{Q}$ è a punti iperbolici, quindi è un **iperboloide ad una falda**.

ESERCIZIO n.5

Classificare la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 2y^2 + z^2 - 2xy + 2y = 0$.

Svolgimento

La matrice dell'equazione della quadrica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si vede subito che il rango di A è quattro, inoltre $A_{44} \neq 0$ quindi $\mathcal{Q}$ è ellissoide o iperboloide. Vediamo la natura dei suoi punti. Il piano tangente nell'origine è il piano di equazione: $y = 0$, esso interseca la quadrica nella conica degenere di equazioni: $x^2 + z^2 = 0, y = 0$ che si spezza nelle due rette complesse coniugate $z = \pm ix, y = 0$, segue che $\mathcal{Q}$ è a punti ellittici. La conica all'infinito ha equazioni $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_4 = 0, x_4 = 0$, essa è a punti reali, quindi $\mathcal{Q}$ è un **iperboloide a due falde**.

ESERCIZIO n.6

Classificare la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 3xy - 2xz - 4y + z = 0$.

Svolgimento
La matrice dell'equazione della quadrica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

si vede subito che il rango di A è quattro, inoltre $A_{44} = 0$ quindi $\mathcal{Q}$ è un paraboloide. La conica all'infinito ha equazioni $x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_4 + x_3x_4 = 0, x_4 = 0$, essa si spezza in due rette reali e distinte, quindi $\mathcal{Q}$ è un **paraboloide iperbolico (o a sella)**.

ESERCIZIO n.7
Classificare la quadrica $\mathcal{Q} : y^2 + 2z^2 - 3x + z - 1 = 0$.

Svolgimento
La matrice dell'equazione della quadrica è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/2 \\ -3/2 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix},$$

si vede subito che il rango di A è quattro, inoltre $A_{44} = 0$ quindi $\mathcal{Q}$ è un paraboloide. La conica all'infinito ha equazioni $x_2^2+2x_3^2-3x_1x_4+x_3x_4-x_4 = 0, x_4 = 0$, essa si spezza in due rette complesse coniugate, quindi $\mathcal{Q}$ è un **paraboloide ellittico**.

ESERCIZI PROPOSTI
Classificare le seguenti quadriche

1. $\mathcal{Q} : 3x^2 + y^2 + 2yz + x - 2z - 1 = 0$.
2. $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xz + 2z = 0$.
3. $\mathcal{Q} : x^2 + 2y^2 + z^2 - x + y = 0$.
4. $\mathcal{Q} : z^2 - 2xz - 3yz + x - 4y = 0$.
5. $\mathcal{Q} : 2x^2 + y^2 + x - 3z - 1 = 0$.
6. $\mathcal{Q} : x^2 - 3y^2 + xy - x + y + 1 = 0$.
7. $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - 4z^2 - 2x + 4y + 5 = 0$.

4.7 Prove d'esame

Esercizi svolti relativi alle prove scritte d'esame di Geometria e Algebra
Corso di Laurea in Ingegneria civile (D.M.270)

30 giugno 2009

1. **Geometria analitica**

   Piano euclideo ampliato - Riferimento cartesiano $\boldsymbol{R}(O; x, y)$.

   Sia C l'iperbole avente per asintoto la retta $r : x - y = 0$, tangente in $A(0, 1)$ all'asse delle y e passante per $Q(2, 1)$.

   (1.1)Dopo aver trovato l'equazione di C, se ne determinino centro e assi.

   (1.2) Scrivere l'equazione di C in forma canonica.

   Spazio euclideo - Riferimento cartesiano $\boldsymbol{R}(O; x, y, z)$.

   (1.3) Vedere per quali valori di h i tre piani $\alpha : x - y + z = 0$, $\beta : x + 2y - 1 = 0$, $\gamma : 2x + hy - z - 3 = 0$ appartengono ad uno stesso fascio.

   (1.4)Trovare centro e raggio della sfera tangente ai piani $\alpha : x-y+z = 0$,

   $\alpha' : x + y - z + 1 = 0$ ed avente centro sulla retta $r' : x + y - 3z = x - z + 1 = 0$.

   (1.5)Si determini l'equazione del cilindro rotondo passante per il punto $Q(0, 1, 0)$ ed avente per asse la retta per $A(1, -1, 1)$ e parallela all'asse delle z.

2. **Algebra lineare**.

   Si considerino il sottospazio

   $$U = \{\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$$

   e l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ definito da

   $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, 0, -2x_2 + 2x_3, x_1 + x_4).$$

   (2.1) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica. Vedere se f isomorfismo.

   (2.2) Determinare $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ ed una loro base.

(2.3) Calcolare gli autovalori di f ed i corrispondenti autospazi. Stabilire se f semplice.

(2.4)Dopo aver verificato che $f^2 = 2f$, indicare (senza calcolare il polinomio caratteristico, ma giustificando la risposta) gli autovalori di f^2.

(2.5)Determinare $U^\perp$ ed una sua base (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$).

Soluzioni degli esercizi (30 Giugno 2009)

1. **Geometria analitica**

(1.1) L'iperbole appartiene al fascio di coniche bitangenti avente come coniche degeneri $r \cup (asse \quad y)$, e la retta per A parallela ad r, contata due volte; l'equazione del fascio é: $x(x-y)+h(x+y-1)^2=0$, imponendo il passaggio per $Q(2,1)$ si ha $h=-1/2$; allora l'equazione di C é : $x^2-y^2-2x+2y-1=0$. Il sistema $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$, $a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0$ nel nostro caso si scrive $x-1=0$, $-y+1=0$, quindi il centro é $C(1,1)$; gli assi hanno parametri direttori l,m sddisfacenti l'equazione $a_{12}l^2+(a_{22}-a_{11})lm-a_{12}m^2=0$ che nel nostro caso si scrive $lm=0$ che ha come soluzioni ($l=1$,$m=0$) e ($l=0$,$m=1$), quindi gli assi sono le rette $x=1$, $y=1$.

(1.2) L'equazione di C si scrive anche nella forma $(x-1)^2+(y-1)^2=1$; applicando la traslazione $X=x-1$, $Y=y-1$ si ottiene l'equazione di C in forma canonica : $X^2-Y^2=1$.

(1.3)Si osserva che $s=\alpha\cap\beta$ é una retta, allora i tre piani formano fascio se $s\subset\gamma$ e questo accade quando $al+bm+cn=0$. I parametri di giacitura di γ sono $a=2$, $b=h$, $c=-1$, i parametri direttori di s sono $l=-2$, $m=1$, $n=3$ e quindi $al+bm+cn=0$ equivale a $-4+h-3=0$ da cui $h=7$.

(1.4) Equazioni parametriche di r' sono: $x=t-1$, $y=2t+1$, $z=t$, allora il centro C della sfera ha coordinate C(t-1, 2t+1, t); imponendo che $d(C,\alpha)=d(C,\alpha')$ si ha $(|t-1-2t-1+t|/\sqrt{3})=(|t-1+2t+1-t+1|/\sqrt{3})$ da cui si ottiene $t=1/2$ e $t=-3/2$. Si hanno due sfere Σ_1 e Σ_2 di di centro e raggio rispettivamente

$C_1(-1/2,2,1/2)$, $R_1=2/\sqrt{3}$ e $C_2(-5/2,-2,-3/2)$, $R_2=R_1$.

(1.5) La generatrice g del cilindro, passante per Q ha equazioni $x=0$, $y=1$; il cilindro si ottiene facendo ruotare g intorno all'asse che ha equazioni: $x=1$, $y=-1$. Il generico parallelo ha equazioni: $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=5+h^2$, $z-h=0$, eliminando h si ottiene l'equazione del cilindro: $(x-1)^2+(y+1)^2=5$.

2. **Algebra lineare**.

(2.1) La matrice associata ad f rispetto alla base canonica è

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-2&2&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice ha una riga con tutti zero, risulta $det(A) = 0$ quindi f non é isomorfismo.

(2.2) Il $\operatorname{Ker} f$ é definito dalle equazioni: $x_1 + x_4 = 0$, $2x_2 - 2x_3 = 0$, da cui $\operatorname{Ker} f = L((1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0))$ e $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0)\}$ é una sua base. Il $\operatorname{rg} A = 2$ di conseguenza $\operatorname{Im} f$ ha dimensione due ed é generato da due colonne indipendenti della matrice A; $\operatorname{Im} f = L((1, 0, 0, 1), (0, 0, 2, 0))$ ed $\{(1, 0, 0, 1), (0, 0, 2, 0)\}$ é una sua base.

(2.3) $\det(A - \lambda I) = \lambda^2(\lambda - 2)^2 = 0$, quindi gli autovalori sono $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 2. Ora, $V(0) = \operatorname{Ker} f$ e $\dim \operatorname{Ker} f = 2$; $V(2) = L((1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$ e $\dim V(2) = 2$. Si conclude che f é semplice.

(2.4)Si verifica facilmente che $f^2 = 2f$ e che λ é autovalore per f^2 se e solo se $\lambda/2$ é autovalore per f, quindi gli autovalori di f^2 sono 0 e 4.

(2.5) Essendo $U = \{(a, a + b, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, una sua base é:

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, -1), \quad \vec{u}_2 = (0, 1, 1, 0).$$

Quindi $\dim U^\perp = 4 - 2 = 2$ e $U^\perp = \mathcal{L}(\vec{w})$ dove $\vec{w} \cdot \vec{u}_i = 0$ per $i = 1, 2$. Posto $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ si ha $x_1 + x_2 - x_4 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, da cui $U^\perp = L((-1, 1, -1, 0), (1, 0, 0, 1))$.

21 luglio 2009

1. **Geometria analitica**

   In un riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(Oxyz)$ si considerino le rette r, s, t di equazioni:

$$r\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}, \qquad s\begin{cases} y+z-2=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}, \qquad t\begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

   ed i punti $A(-1,0,1)$, $B(0,-2,1)$, $C(1,0,1)$, $D(0,2,1)$.

   (1.1) Dopo aver verificato che i punti A, B, C, D sono vertici consecutivi di un parallelogramma P, calcolare l'area di P.

   (1.2) Verificare che le rette r ed s sono incidenti e trovare il piano che le contiene.

   (1.3) Determinare la circonferenza $\mathcal{C}$ tangente alla retta r nel punto $R(0,1,1)$ e passante per il punto $S(1,0,-1)$.

   (1.4) Scrivere equazioni parametriche del cono di vertice A e curva direttrice

   $L: x=u+1,\ y=u^2+u+1,\ z=u^3$. Trovare equazioni cartesiane della curva L' proiezione di L da A sul piano $x=0$.

   (1.5) Nel piano xy si consideri la parabola Γ tangente nei punti $P(-2,0)$ e $Q(0,1)$ rispettivamente all'asse x ed all'asse y. Dopo aver trovato l'equazione cartesiana di Γ, se ne determini l'asse a.

2. **Algebra lineare**.

   Si considerino la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1-h & 1 & h+1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -h & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

   e l'endomorfismo $f_h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_h) = A_h$, dove $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

   (2.1) Scrivere l'espressione esplicita di f_h. Determinare $\mathrm{Ker}(f_h)$ al variare di h in $\mathbb{R}$.

   (2.2) Stabilire per quali valori di h l'endomorfismo f_h semplice.

   (2.3) Trovare una base di $f_0(W)$, dove W il sottospazio

$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2-x_3-2x_4=0\}.$$

. (2.4) Stabilire se la somma $W + f_0(W)$ diretta.

(2.5) Verificare che la forma bilineare g su $\mathbb{R}^4$, definita da

$$g((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4x_4y_4,$$

un prodotto scalare. Facoltativo: Determinare $W^{\perp}$ (rispetto a g).

Soluzioni degli esercizi (21 luglio 2009)

1. **Geometria analitica**

(1.1) Essendo $B - A = \vec{i} - 2\vec{j} = C - D$, i segmenti orientati AB e DC sono lati opposti di un parallelogramma. L'area del parallelogramma data da $\|(B - A) \wedge (D - A)\| = \| -4\vec{k}\| = 4$

(1.2) Si vede facilmente che nel fascio di piani di asse la retta r, il piano di equazione $y + z - 2 = 0$ contiene la retta s. I parametri direttori di r ed s sono proporzionali rispettivamente alle terne $(1, 1, -1)$ e $(1, -1, 1)$ quindi le due rette non sono parallele, di conseguenza essendo complanari sono incidenti.

(1.3) La circonferenza $\mathcal{C}$ sta sul piano α contenente la retta r ed il punto S; tale piano α ha equazione $3x - y + 2z - 1 = 0$. Il centro C di $\mathcal{C}$ si ottiene come intersezione di tre piani: α, β =piano per R e perpendicolare alla retta r, γ = piano per M(=punto medio del segmento RS) e perpendicolare alla retta congiungente i punti R ed S. Dopo semplici calcoli si trova : $\beta : x + y - z = 0$, $\gamma : x - y - 2z = 0$, $\alpha \cap \beta \cap \gamma = C(\frac{3}{14}, -\frac{1}{14}, \frac{1}{7})$. Il raggio di $\mathcal{C}$ dato dalla distanza $d(C, R) = 3\sqrt{\frac{3}{14}}$.

(1.4) Il cono richiesto ha equazioni parametriche

$x = -1 + v(u + 2)$, $y = v(u^2 + u + 1)$, $z = 1 + v(u^3 - 1)$, di conseguenza la curva L' ha equazioni parametriche

$x = 0$, $y = \frac{u^2+u+1}{u+2}$, $z = 1 + \frac{u^3-1}{u+2}$;

riscrivendo le ultime due uguaglianze precedenti nella forma equivalente $(u + 2)y = u^2 + u + 1$, $(z - 1)(u + 2) = (u - 1)(u^2 + u + 1)$ e dividendo membro a membro, si ricava $u = \frac{y+z-1}{y}$. Le equazioni cartesiane di L' sono date da $x = 0$ e l'altra equazione che si ottiene sostituendo tale espressione di $u = \frac{y+z-1}{y}$ in una delle due uguaglianze precedenti.

(1.5) La parabola Γ appartiene al fascio di coniche bitangenti individuato dalle coniche degeneri $\Gamma_1 = assex \cup assey$ e Γ_2 =retta PQ contata due volte. Con semplici calcoli si trova $\Gamma : (x + 2y)^2 + 4x - 8y + 4 = 0$. Il punto improprio di Γ dato da $C_\infty(2, -1, 0)$, l'asse a la polare di $C'_\infty(1, 2, 0)$, con semplici calcoli si trova $a : 5x + 10y - 6 = 0$.

2. **Algebra lineare**.

(2.1)

$f_h(x_1, x_2, x_3, x_4) =$
$(x_1 - x_3, (1-h)x_1 + x_2 + (h+1)x_3 + x_4, x_1 - x_3, -hx_1 + hx_3)$.
Si vede facilmente che

$$\mathrm{Ker}\, f_h = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 = x_3, x_4 = -x_2 - 2x_3\},$$

Ker f_h generato dai vettori $(1, 0, 1, -2)$ e $(0, 1, 0, -1)$ che sono indipendenti, quindi Ker f_h ha dimensione due per ogni valore di h.

(2.2) Si vede facilmente che $P_A(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)[-(1-\lambda)^2 + 1] = (1-\lambda)(-\lambda)^3$, quindi gli autovalori sono 0 con molteplicit algebrica 3 e 1 con molteplicit algebrica uguale a 1. Ora

$$V(0) = \mathrm{Ker}\, f_h$$

quindi $\dim V(0) = 2$. Ne segue che f_h non semplice per nessun valore di h.

(2.3) Una base di W costituita dai vettori

$$\vec{w_1} = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{w_2} = (0, 1, 1, 0), \quad \vec{w_3} = (0, 0, -2, 1),$$

con un semplice calcolo si trova che

$f_0(W) = \mathcal{L}(f_0(\vec{w_1}) = (0, 2, 0, 0),\ f_0(\vec{w_2}) = (-1, 2, -1, 0),$

$f_0(\vec{w_3}) = (2, -1, 2, 0))$ ed una sua base data dai vettori $(0, 2, 0, 0)$ e $(-1, 2, -1, 0)$.

(2.4) La somma non diretta perch $\dim W + \dim f_0(W) = 5 \neq \dim \mathbb{R}^4$.

(2.5) Si verifica facilmente che g simmetrica e definita positiva. Imponendo che $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sia ortogonale (rispetto a g) a $\vec{w_i} (i = 1, 2, 3)$, si ha

$$x_1 + 3x_3 = 0, \qquad 2x_2 + 3x_3 = 0, \qquad -6x_3 + 4x_4 = 0.$$

Ne segue

$$W^{\perp} = \{(-3t, -3t/2, t, 3t/2t) | t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\vec{v}),$$

dove $\vec{v} = (-3, -3/2, 1, 3/2)$.

17 Settembre 2009

1. **Geometria analitica**

   In un riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(O; xyz)$ si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la famiglia di rette r_k ed il piano α di equazioni:

   $$r_k\colon \begin{cases} kx + y - 2 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \alpha\colon x - 4y + 2z - 4 = 0.$$

   (1.1) Determinare la mutua posizione di r_0 e di r_1 (ottenute per $k = 0$ e $k = 1$).

   (1.2) Trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la corrispondente retta r_k è perpendicolare al piano α.

   (1.3) Dimostrare che esiste un piano che contiene la famiglia di rette r_k.

   (1.4) Classificare la quadrica di equazione

   $$\mathcal{Q}\colon x^2 - 2y^2 + 2xy - x + y + z = 0.$$

   (1.5) Determinare i punti impropri della conica $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap xy$ e dedurne il tipo affine.

2. **Algebra lineare**.

   Considerata in $\mathbb{R}^4$ la struttura euclidea standard, sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo cos definito:

   $$f(x, y, z, t) = (y + 2z, z + 2t, t, z).$$

   (2.1) Trovare basi di $\operatorname{Ker} f$ ed $\operatorname{Im} f$.

   (2.2) Dire se f è un isomorfismo.

   (2.3) Determinare gli eventuali autovalori di f e stabilire se f è semplice.

   (2.4) Dopo aver trovato una base ortonormale di

   $$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z = 0 = t\}$$

   determinare $U^\perp$.

   (2.5) Trovare $\dim f(U)$.

Soluzioni degli esercizi (17 settembre 2009)

1. **Geometria analitica**

(1.1) Le rette sono incidenti nel punto $(0, 2, -1/2)$, come risulta facilmente risolvendo il sistema delle quattro equazioni corrispondenti.

(1.2) I parametri direttori di r_k sono proporzionali alla terna $(2, -2k, k)$. Quindi r_k perpendicolare ad α quando il vettore $(2, -2k, k)$ proporzionale a $(1, -4, 2)$, vettore di giacitura di α. Ne segue $k = 4$.

(1.3) La retta r_k ottenuta come intersezione del piano $kx + y - 2 = 0$, dipendente da k, col piano $y + 2z - 1 = 0$, indipendente da k. Quindi il piano $y + 2z - 1 = 0$ contiene tutte le rette r_k.

(1.4) La quadrica generale, poich il rango della matrice associata 4. $A_{44} = 0$ quindi $\mathcal{Q}$ un paraboloide. La conica all'infinito $\mathcal{C}_\infty$ ha equazioni: $x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 = 0$, $x_4 = 0$, o equivalentemente $(x_1 + x_2)^2 - 3x_2^2 = 0$, $x_4 = 0$; come si vede dalle ultime equazioni, $\mathcal{C}_\infty$ si spezza in due rette reali e distinte, di conseguenza $\mathcal{Q}$ un paraboloide iperbolico o a sella.

(1.5) L'equazione di $\mathcal{C}$ nel piano $z = 0$ $x^2 - 2y^2 + 2xy - x + y = 0$; si vede facilmente che $\mathcal{C}$ di rango 3. Usando le coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) nel piano xy, l'equazione di $\mathcal{C}$ diventa

$$\mathcal{C} : x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$$

I punti impropri sono i punti $\mathcal{C} \cap i_\infty$. Il sistema $x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come soluzioni le terne proporzionali a $(-1 \pm \sqrt{3}, 1, 0)$, si conclude che $\mathcal{C}$ iperbole.

2. **Algebra lineare**.

(2.1) e (2.2) La matrice associata ad f rispetto alla base canonica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e risulta $\operatorname{Ker} f = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0))$. Dal teorema fondamentale $\dim \operatorname{Im} f = \dim R^4 - \dim \operatorname{Ker} f = 3$, pertanto le ultime tre colonne di A sono una base di $\operatorname{Im} f$ (se ne verifichi l'indipendenza). Ovviamente f non è un isomorfismo, non essendo iniettiva né suriettiva.

(2.3) Gli autovalori di f sono 1, -1 e 0 con molteplicità algebriche rispettivamente uguali ad 1, 1 e 2. Tuttavia, come risulta dal calcolo precedente, $\dim V(0) = \dim \operatorname{Ker} f = 1$, pertanto f non é semplice.

(2.4) Posto $y = \lambda$, $z = \mu$, si ha

$$U = \{(\lambda + \mu, \lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Una base di U data da $\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$ e $\vec{u}_2 = (1, 0, 1, 0)$. Ora $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ non sono ortogonali; per da $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ si pu costruire una base ortonormale $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tramite il procedimento di Gram–Schmidt:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0),$$
$$\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \lambda \vec{e}_1, \quad \lambda = -\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

quindi $\vec{w}_2 = (1/2, -1/2, 1, 0)$, $\|\vec{w}_2\| = \sqrt{3/2}$;

$$\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right).$$

Ora, $U^\perp = \{\vec{w} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \ \forall \vec{u} \in U\}$. Basta allora considerare

$$\vec{w} \cdot \vec{u}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = 0, \vec{w} \cdot \vec{u}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + z = 0,$$

da cui $U^\perp = \{(h, -h, -h, k) \mid h, k \in \mathbb{R}\}$.

(2.5) Dalla teoria si ha

$$f(U) = \mathcal{L}(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2)),$$

ed essendo $f(\vec{u}_1) = (1, 0, 0, 0)$, $f(\vec{u}_2) = (2, 1, 0, 1)$, risulta $\dim f(U) = 2$.

28 Settembre 2009

1. **Geometria analitica**

   In un riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(Oxyz)$ sono dati i punti $A(-1,1,-1)$, $B(0,0,-2)$, $C(1,2,0)$ e le rette r ed s di equazioni:

   $$r\colon \begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-3y+z+4=0 \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$$

   (1.1) Verificare che A, B, C sono vertici di un triangolo rettangolo; trovare l'area di tale triangolo.

   (1.2) Vedere la mutua posizione delle rette r ed s e trovare la minima distanza tra esse.

   (1.3) Determinare le equazioni della circonferenza passante per i punti A, B e C.

   (1.4) Nel piano xy data l'iperbole di equazione

   $$\mathcal{C}\colon 2x^2-y^2-2xy-x+y-1=0.$$

   Trovare i punti impropri di $\mathcal{C}$, il centro, gli assi e la polare del punto P(-1,2).

   (1.5) Classificare la quadrica di equazione

   $$\mathcal{Q}\colon x^2+z^2-2xy-x+y-z=0.$$

2. **Algebra lineare**.

   Considerata in $\mathbb{R}^4$ la struttura euclidea standard, sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito dalle seguenti condizioni:

   $$f(\vec{u})=\vec{u}, f(\vec{v})=\vec{v}, ker f = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y-z=0=t\}$$

   dove $\vec{u}=(1,0,-1,0)$ e $\vec{v}=(0,-1,0,1)$.

   (2.1) Dopo aver trovato la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, scrivere l'espressione esplicita della f.

   (2.2) Trovare una base del sottospazio dei vettori che sono lasciati fissi dalla f.

   (2.3) Determinare gli eventuali autovalori e relativi autospazi di f e stabilire se f è semplice.

   (2.4) Stabilire se f una trasformazione ortogonale.

   (2.5) Determinare $ker f^{\perp}$.

Soluzioni degli esercizi (28 Settembre 2009)

1. **Geometria analitica**

(1.1) I punti A, B, C non sono allineati, infatti i vettori $B-A$ di componenti $(1,-1,-1)$, $C-A$ di componenti $(2,1,1)$ e $C-B$ di componenti $(1,2,2)$ non sono a due a due paralleli; inoltre il prodotto scalare $(B-A)\cdot(C-A)=0$, di conseguenza i vettori $B-A$ e $C-A$ sono perpendicolari. L'area $\mathcal{A}$ del triangolo data da: $\mathcal{A}=(1/2)\,\|B-A\|\,\|C-A\|=3\sqrt{2}/2$.

(1.2) Si vede facilmente che le rette sono sghembe. Infatti considerati i vettori $\vec{r}\,(2,1,1)$ e $\vec{s}\,(1,-1,-1)$, paralleli rispettivamente alle rette r ed s, ed il vettore $(R-S)(-2,0,-4)$ (dove $R(-1,0,-3)$ ed $S(1,0,1)$ sono punti scelti a piacere, rispettivamente sulle rette r ed s), si ha che $\vec{r}\wedge\vec{s}\cdot(R-S)=12\neq 0$.

Un piano α per la retta r ha equazione $\lambda(x-y-z-2)+\mu(x-3y+z+4)=0$; imponendo che sia parallelo alla retta s si ha $\lambda+\mu=0$, da cui $\alpha: y-z-3=0$; la minima distanza tra r ed s la distanza d da un punto fissato a piacere su s, ad esempio $S(1,-1,0)$, dal piano α; applicando la formula della distanza punto-piano si ottiene $d=2\sqrt{2}$.

(1.3)La circonferenza Γ richiesta, sta sul piano β contenente i tre punti A, B, C; esso ha equazione $\beta: y-z-2=0$. Il centro di Γ il punto medio $M(1/2,1,-1)$ della corda BC (perch il triangolo ABC rettangolo in A), il raggio $(1/2)\,\|C-B\|=3/2$. La circonferenza Γ si pu ottenere come intersezione della sfera di centro M e raggio $3/2$ con il piano β, quindi Γ ha equazioni: $(x-1/2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9/4$, $y-z-2=0$.

(1.4) In coordinate omogenee l'equazione dell'iperbole : $2x_1^2-x_2^2-2x_1x_2-x_1x_3+x_2x_3-x_3^2=0$; l'intersezione con la retta impropria $i_\infty: x_3=0$, ci da i punti impropri di coordinate $((1\pm\sqrt{3})/2,1,0)$. Il sistema $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$, $a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0$ nel nostro caso $2x-y-1/2=0$, $-x-y+1/2=0$, risolto ci da le coordinate del centro (1/3,1/6). I parametri direttori degli assi si ottengono dall'equazione $a_{12}l^2+(a_{22}-a_{11})lm-a_{12}m^2=0$ che nel nostro caso $l^2+3lm-m^2=0$; con un facile calcolo si ottiene $l=(-3\pm\sqrt{13})m/2$; gli assi allora hanno equazioni: $\frac{x-1/3}{(-3\pm\sqrt{13})}=\frac{y-1/6}{2}$. La polare di $P(-1,2)$ la retta di equazione: $9x+y-1=0$.

(1.5) La matrice A dell'equazione di $\mathcal{Q}$ ha la seguente espressione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix};$$

risulta $detA \neq 0$ quindi $\mathcal{Q}$ una quadrica generale; essendo $D_{44} = -1 \neq 0$, $\mathcal{Q}$ ellissoide o iperboloide. La conica all'infinito $\mathcal{C}_\infty$ ha equazione $x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 = 0$ che a punti reali quindi $\mathcal{Q}$ un'iperboloide. Il piano tangente nell'origine il piano di equazione $-x + y - z = 0$, esso interseca la quadrica in una conica che si spezza in due rette reali e distinte di equazioni: $x = y(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}), -x+y-z = 0$, segue che $\mathcal{Q}$ a punti iperbolici (iperboloide ad una falda).

2. **Algebra lineare**.

(2.1) Dalle condizioni $f(\vec{u}) = \vec{u}$, $f(\vec{v}) = \vec{v}$ e poichè $ker f = \mathcal{L}((1,0,1,0), (0,1,-1,0))$, si ricava $f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$, $-f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_4) = -\vec{e}_2 + \vec{e}_4$, $f(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_3) = -f(\vec{e}_1)$, con $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ base canonica di $\mathbb{R}^4$. Quindi la matrice associata alla f rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

di conseguenza, l'endomorfismo f ha espressione esplicita $f(x,y,z,t) = (1/2(x-y-z-t), -t, -1/2(x-y-z-t), t)$.

(2.2) Il sottospazio dei vettori che vengono lasciati fissi dalla f è l'insieme $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,t) = (x,y,z,t)\}$; quindi tenendo conto della espressione esplicita della f, risulta che $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -z, y = -t\} = \{(h,k,-h,-k) \mid h,k \in \mathbb{R}\}$; per cui una base di V è costituita dai vettori $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, dove $\vec{u}_1 = (1,0,-1,0)$ e $\vec{u}_2 = (0,1,0,-1)$.

(2.3) Il polinomio caratteristico è $P_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)[(1/2-\lambda)^2 - 1/4]$; gli autovalori di f sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, entrambi con molteplicità algebrica rispettivamente uguale a 2. Dal calcolo precedente risulta che $\dim V(0) = \dim \mathrm{Ker}\, f = 2$; inoltre $V(1) = L\{(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\}$ (cioè $V(1)$ è il sottospazio dei punti fissi di f), quindi $\dim V(1) = 2$. Pertanto f é semplice.

(2.4) Poichè det A = 0, f non è biiettiva, pertanto f non è una trasformazione ortogonale.

(2.5) Una base di $ker f$ è costituita dai vettori

$$\vec{w_1} = (1,0,1,0), \quad \vec{w_2} = (0,1,-1,0).$$

Imponendo che $\vec{v} = (x,y,z,t)$ sia ortogonale a $\vec{w_i}(i = 1,2)$, si ha

$$x + z = 0, \qquad y - z = 0.$$

Ne segue

$$ker f^{\perp} = \{(-z,z,z,t)|z,t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\vec{v_1}, \vec{v_2}),$$

dove $\vec{v_1} = (-1,1,1,0)$ e $\vec{v_2} = (0,0,0,1)$.

11 gennaio 2010.

1. **Geometria analitica**

   Piano euclideo ampliato - Riferimento cartesiano $\boldsymbol{R}(O; x, y)$.

   (1.1) Scrivere equazione cartesiana della parabola P appartenente al fascio di coniche F di equazione $\lambda(2x - y)(2x - y + 1) + \mu(x - y + 1)(x - 1) = 0$.

   (1.2) Si determinino della parabola P l'asse e la tangente nel vertice.

   Spazio euclideo ampliato- Riferimento cartesiano $\boldsymbol{R}(O; x, y, z)$.

   (1.3) Trovare i valori reali di h per i quali il piano $\alpha : x+y-z+h = 0$, tangente alla sfera $\Sigma : 2(x^2 + y^2 + z^2) - 4x + 2y - 4z + 3 = 0$.

   (1.4) Verificare che i punti $A(-1, 0, -2)$, $B(0, -1, -2)$, $C(1, 2, 0)$, $D(-1, 1, 1)$ sono vertici di un tetraedro e calcolarne il volume.

   (1.5) Determinare la superficie di rotazione Q ottenuta facendo ruotare la retta $s : x+z = 0, y-1 = 0$ intorno alla retta $r : x = t, y = -t, z = 0$. Osservato che Q una quadrica, indicarne il tipo.

2. **Algebra lineare**.

   Si considerino il sottospazio

   $$W = \{\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 = 0, x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$$

   e l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ definito da

   $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, -x_2 + 2x_3, 0, x_1 - x_4).$$

   (2.1) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.

   (2.2) Determinare $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ ed una loro base.

   (2.3) Calcolare gli autovalori di f ed i corrispondenti autospazi. Stabilire se f semplice.

   (2.4) Verificare che la forma bilineare g su $\mathbb{R}^4$, cos definita $g(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.

   (2.5)Determinare $W^\perp$ (rispetto al prodotto scalare g di $\mathbb{R}^4$).

Soluzioni degli esercizi(11 gennaio 2010)

1. **Geometria analitica**

(1.1) La generica conica C del fascio ha equazione: $(4\lambda+\mu)x^2-(4\lambda+\mu)xy+\lambda y^2+2\lambda x+(-\lambda+\mu)y-\mu=0$; imponendo la condizione che C una parabola: $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, si ottiene $(4\lambda+\mu)\mu=0$; $\mu=0$ si scarta perch corrisponde alla conica degenere $(2x-y)(2x-y+1)=0$; una soluzione dell'equazione $4\lambda+\mu=0$ $(\lambda=1,\mu=-4)$ in corrispondenza della quale si ottiene la parabola $P: y^2+2x-5y+4=0$.

(1.2) Scriviamo l'equazione di P nella forma $x-9/8=(-1/2)(y-5/2)^2$; applicando la traslazione: $X=x-9/8$, $Y=y-5/2$ l'equazione di P si scrive: $X=(-1/2)Y^2$, ne segue che nel nuovo riferimento $R'(O';X,Y)$ per la parabola P il vertice l'origine O' (che nel vecchio riferimento ha coordinate $(9/8,5/2)$), l'asse l'asse delle X (che nel vecchio riferimento ha equazione $y=5/2$, la tangente nel vertice l'asse delle Y, che nel vecchio riferimento ha equazione $x=9/8$.

(1.3) La sfera ha centro $C(1,-1/2,1)$ e raggio $R=\sqrt{3}/2$; il piano α tangente alla sfera se $d(C,\alpha)=\sqrt{3}/2$ ossia $|1-(1/2)-1+h|/\sqrt{3}=\sqrt{3}/2$, da cui si ottiene $h=2,-1$.

(1.4) I punti A, B, C individuano il piano $\beta: x+y-2z-3=0$, si verifica subito che il punto $D\notin\beta$ di conseguenza A,B,C,D sono vertici di un tetraedro T. Applicando la ben nota formula del volume di un tetraedro, si ottiene $\mathrm{Vol}(T)=5/3$.

(1.5) Sia $P(t',1,-t')\in s$. Allora Σ descritta dalle circonferenze $\mathcal{C}(t')=\gamma(t')\cap S(t')$, dove $\gamma(t')$ il piano per P ed ortogonale ad r e $S(t')$ la sfera di centro $O(0,0,0)\in r$ e raggio OP. Si ha

$$\mathcal{C}(t): x-y+1-t'=0t, \quad x^2+y^2+z^2=2(t')^2+1$$

da cui

$$Q: x^2+y^2-z^2-4xy+4x-4y+3=0$$

che una quadrica. La matrice simmetrica associata all'equazione della quadrica ha determinante diverso da zero quindi Q una quadrica generale. La conica all'infinito di equazione $x^2+y^2-z^2-4xy=0$, a punti reali, quindi Q un iperboloide; vediamo la natura dei suoi punti. Sia $A(0,0,\sqrt{3})\in Q$ (punto su Q scelto a piacere), il piano tangente in A alla Q $\beta: 2x-2y-\sqrt{3}z+3=0$; la conica intersezione $\beta\cap Q$ si spezza nelle due rette reali e distinte di equazioni: $x=(-2\pm\sqrt{3})y$, si tratta quindi di un iperboloide iperbolico.

2. **Algebra lineare**.

(2.1) La matrice associata ad f rispetto alla base canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2.2) Si vede facilmente che

$Kerf = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 = 0, -x_2 + 2x_3 = 0, x_1 - x_4 = 0\}$,

da cui $Kerf = L(-2, 2, 1, -2)$, la sua dimensione uno ed ovviamente una sua base formata dal solo vettore (-2,2,1,-2). Per il teorema del rango Imf ha dimensione tre ed generato da tre colonne indipendenti della matrice A,

$Imf = L((1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 2, 0, 0))$. Essendo i vettori

$(1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 2, 0, 0)$ linearmente indipendenti, essi formano una base di Imf.

(2.3) Si vede facilmente che il polinomio caratteristico della matrice A : $P_A(\lambda) = (-1 - \lambda)(-\lambda)(1 - \lambda)(-1 - \lambda)$, quindi gli autovalori sono 0 e 1 con molteplicit algebrica 1 e -1 con molteplicit algebrica uguale a 2. Ora

$$V(-1) = L(-2, 4, 0, 1)$$

quindi $dimV(-1) = 1$. Ne segue che f non semplice.

(2.4) Si vede facilmente che g simmetrica; inoltre g definita positiva, infatti $g(\vec{x}, \vec{x}) = 2x_1^2 - x_2x_1 - x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 0$, inoltre $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ se e solo se $\vec{x} = \vec{0}$.

(2.5) Una base di W costituita dai vettori

$$\vec{w_1} = (1, 1, 1, 0), \quad \vec{w_2} = (0, 0, 1, 1),$$

quindi imponendo che $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sia ortogonale (rispetto a g) a $\vec{w_i}(i = 1, 2)$, si ha

$$x_1 + x_3 = 0, \qquad x_3 + x_4 = 0.$$

Ne segue

$$W^{\perp} = \mathcal{L}((1, 0, -1, -1), (0, 1, 0, 0)).$$

9 febbraio 2010.

1. **Geometria analitica**

   Spazio euclideo - Riferimento cartesiano $\boldsymbol{R}(O; x, y, z)$.

   (1.1) Verificare che i punti $A(1, 0, -1)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-2, 2, -1)$ sono vertici di un triangolo e calcolarne l'area.

   (1.2) Riconoscere la posizione reciproca delle due rette

   $$r\colon \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ y - 3z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

   e trovare la minima distanza tra esse.

   (1.3) Sono date le sfere di equazione

   $$\Sigma\colon x^2+y^2+z^2-2y-6z+1 = 0, \quad \Sigma'\colon x^2+y^2+z^2-x-3y-5z+2 = 0.$$

   Verificare che $\gamma = \Sigma \cap \Sigma'$ una circonferenza reale e determinarne il centro e il raggio.

   (1.4) Scrivere equazioni parametriche del cilindro avente generatrici parallele alla retta $r : x = t, y = -t, z = 2t + 1$ e curva direttrice la curva $\mathcal{L} : x = u + 1, y = u^2 - u, z = u^3$.

   Scrivere equazioni parametriche della curva $\mathcal{L}'$ proiezione di $\mathcal{L}$ sul piano $\alpha : x + z = 0$ secondo la direzione della retta r.

   (1.5) Considerata la conica Γ di equazione $y^2 - 3xy + 2y - 3 = 0$, verificare che non degenere e precisarne il tipo. Determinare centro, assi e asintoti di Γ.

2. **Algebra lineare**.

   Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito dalla matrice (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$)

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (2.1) Dopo aver scritto l'espressione esplicita della f, calcolare $f(\vec{x})$, dove $\vec{x} = (1, -1, -1, 1)$.

   (2.2) Determinare $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ ed una loro base.

   (2.3) Stabilire se f semplice.

(2.4) Determinare $f(U)$ ed una sua base, dove U il sottospazio $U = \{\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_4 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$.

(2.5) Considerato $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard, trovare una base ortonormale $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ di $\mathbb{R}^4$, con $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ base di U e $\{\vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ base di $U^\perp$.

Soluzioni degli esercizi (9 febbraio 2010)

1. **Geometria analitica**

(1.1) I vettori $\vec{AB} = (-2, 1, 1)$ e $\vec{BC} = (-1, 1, -1)$ sono linearmente indipendenti (perch le coordinate non sono proporzionali), di conseguenza i punti A, B, C non sono allineati. L'area $\mathcal{A}$ del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ la met dell'area del parallelogramma costruito sui lati AB e BC del triangolo, da cui: $\mathcal{A} = (1/2)\|\vec{AB} \wedge \vec{BC}\| = (1/2)\sqrt{14}$.

(1.2) I parametri direttori della retta r sono $(4, 3, 1)$, quelli della retta s sono $(-3, 3, 1)$, non essendo proporzionali le rette r ed s non sono parallele. Si verifica facilmente che r ed s non sono incidenti, di conseguenza le rette sono sghembe. Per trovare la minima distanza $d(r, s)$ tra r ed s, si considera il piano α per s e parallelo ad r, esso ha equazione $y - 3z + 1 = 0$; si fissa poi un punto sulla retta r, ad esempio $R(0, 1, 0)$, risulta $d(r, s) = d(R, \alpha) = 2/\sqrt{10}$.

(1.3) γ una circonferenza reale perch la distanza tra i centri delle sfere minore della somma dei raggi delle stesse sfere. Infatti il centro e il raggio per la sfera Σ sono: $C(0, 1, 3)$ $r = 3$; per la sfera Σ': $C'(1/2, 3/2, 5/2)$ $r' = (3/2)\sqrt{3}$. Risulta $r + r' = 3 + (3/2)\sqrt{3}$ e $d(C, C') = \sqrt{3}/2$, da cui $d(C, C') < r + r'$. Il piano della circonferenza γ ha equazione $x + y - z - 1 = 0$; il centro Q della γ si pu ottenere come intersezione della retta CC' con il piano della circonferenza; con semplici calcoli si trova $Q(1, 2, 2)$. Il raggio R di γ dato da $R = \sqrt{r^2 - d^2}$ dove d la distanza del centro di Σ dal piano di γ; risulta $d = \sqrt{3}$ da cui $R = \sqrt{6}$.

(1.4) La generica generatrice del cilindro ha equazioni:

$$\frac{x - u - 1}{1} = \frac{y - u^2 + u}{-1} = \frac{z - u^3}{2}$$

ponendo questi rapporti uguali a v e facendo variare u e v in $\mathbb{R}$ si ottengono le equazioni parametriche del cilindro $\mathcal{Q}$:

$$x = u + 1 + v, \quad y = u^2 - u - v, \quad z = u^3 + 2v.$$

Per ottenere la curva $\mathcal{L}'$ basta intersecare il cilindro $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha : x + z = 0$; dopo un semplice calcolo si ottengono le equazioni parametriche della curva $\mathcal{L}'$:

$$\begin{cases} x = (-1/3)u^3 + (2/3)u + 2/3 \\ y = (1/3)u^3 + u^2 - (2/3)u + 1/3 \\ z = (1/3)u^3 - (2/3)u - 2/3. \end{cases}$$

(1.5) La matrice dell'equazione di Γ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 0 \\ -3/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

risulta $detA = 27/4$ quindi Γ non degenere; inoltre $D_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -9/4 < 0$ quindi Γ una iperbole. Intersecando la Γ con la retta impropria si ottengono i punti impropri: $A_\infty(1, 0, 0)$ e $B_\infty(1, 3, 0)$; gli asintoti sono le rette a_1 e a_2 congiungenti il centro $C(2/3, 0)$ dell'iperbole con i punti impropri A_∞ e B_∞; $a_1 : y = 0$, $a_2 : 3x - y - 2 = 0$. Gli assi b_1 e b_2 di Γ sono le rette per il centro e parametri direttori $(l = 1 \pm \sqrt{10}, m = 1)$ che sono soluzioni dell'equazione $a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0$ che nel nostro caso si scrive $(-3/2)l^2 + lm + (3/2)m^2 = 0$; $b_1, b_2 : 3x - 3(1 \pm \sqrt{10})y + 2 = 0$.

2. **Algebra lineare**.

(2.1) $f(x, y, z, t) = (z, x + y - (1/2)t, z, 2x)$;

$f(1, -1, -1, 1) = (-1, -1/2, -1, 2)$.

(2.2) Si vede facilmente che

$$kerf = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = z = 0, y = (1/2)t\},$$

da cui $kerf = \mathcal{L}(0, 1, 0, 2)$, la sua dimensione uno ed ovviamente una sua base formata dal solo vettore $(0, 1, 0, 2)$. Per il teorema del rango Imf ha dimensione tre ed generato da tre colonne indipendenti della matrice A,

$Imf = \mathcal{L}((0, 1, 0, 2), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0))$. Essendo i vettori

$(0, 1, 0, 2), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)$ linearmente indipendenti, essi formano una base di Imf.

(2.3) Si vede facilmente che il polinomio caratteristico della matrice A : $P_A(\lambda) = (-\lambda)^2(1 - \lambda)^2$, quindi gli autovalori sono 0 e 1 entrambi con molteplicit algebrica uguale a due. Ora $V(0) = kerf = \mathcal{L}(0, 1, 0, 2)$, quindi $dimV(0) = 1$. Ne segue che f non semplice.

(2.4) Una base di U costituita dai vettori

$$\vec{u_1} = (1, 0, -1, 1), \quad \vec{u_2} = (0, 1, 0, 0),$$

allora $f(U) = \mathcal{L}(f(\vec{u_1}), f(\vec{u_2})) = L((-1, 1/2, -1, 2), (0, 1, 0, 0))$; i vettori $(-1, 1/2, -1, 2)$, $(0, 1, 0, 0)$ sono anche linearmente indipendenti, quindi formano una base di $f(U)$.

(2.5) I vettori della base di U

$$\vec{u_1} = (1, 0, -1, 1), \quad \vec{u_2} = (0, 1, 0, 0),$$

sono ortogonali, quindi formano una base ortogonale di U; normalizzando si ottiene la base ortonormale: $\{(1/\sqrt{3})(1, 0, -1, 1), \quad (0, 1, 0, 0)\}$.
Sappiamo che $U^\perp = \{\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \vec{v} \cdot \vec{u_1} = 0, \vec{v} \cdot \vec{u_2} = 0\}$;
con un semplice calcolo si ottiene

$$U^\perp = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1));$$

per trovare una base ortogonale $\{\vec{u'_1}, \vec{u'_2}\}$ di $U^\perp$, si pu scegliere $\vec{u'_1} = (0, 0, 1, 1)$, poi si considera il generico vettore $a(1, 0, 1, 0) + b(0, 0, 1, 1)$ di $U^\perp$ e si impone che sia ortogonale al vettore $(0, 0, 1, 1)$; si ottiene $a + 2b = 0$; scelto $\vec{u'_2}$ il vettore corrispondente ad $a = -2$ e $b = 1$, si ha la base ortogonale $\{(0, 0, 1, 1), \quad (-2, 0, -1, 1)\}$. Ora normalizzando quest'ultima base, si ha una base ortonormale di $U^\perp$:
$\{(1/\sqrt{2})(0, 0, 1, 1), (1/\sqrt{6})(-2, 0, -1, 1)\}$.
La base di $\mathbb{R}^4$ richiesta è allora:
$\{(1/\sqrt{3})(1, 0, -1, 1), (0, 1, 0, 0), (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, 1), (1/\sqrt{6})(-2, 0, -1, 1)\}$.

23 febbraio 2010.

1. **Geometria analitica**

   In un riferimento cartesiano $RC(Oxyz)$ si considerino le rette $r : x - y + z + 1 = y + 3z - 2 = 0$, ed $s : x + y + z - 2 = x - y - z + 3 = 0$ e la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z + 1 = 0$.

   (1.1) Nel fascio di piani di asse la retta r trovare il piano parallelo alla retta s.

   (1.2) Nella stella di rette di centro il punto $A(1, 0, 7)$ determinare la retta incidente perpendicolarmente la retta r.

   (1.3) Dopo aver determinato centro e raggio della sfera Σ, vedere per quali valori reali del parametro λ il piano $\beta : x-y+z+\lambda = 0$ interseca la sfera Σ in una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$.

   (1.4) Verificare che la curva $C : x = u^2 + 2, y = u^3 - 1, z = u - 1$ è una curva sghemba. Scrivere equazioni parametriche ed equazione cartesiana del cilindro di curva direttrice C e generatrici parallele all'asse delle z.

   (1.5) Classificare la quadrica $Q : x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + x - z = 0$.

2. **Algebra lineare**.

   In R^4 dotato del prodotto scalare standard si considerino i sottospazi

   $$U : x_1 + x_2 - x_4 = x_1 + x_3 - x_4 = 0 \text{ e } W : x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

   e l'endomorfismo f di R^4 così definito:

   $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 - x_4, x_2 - x_3, x_1 + x_3, x_4).$$

   (2.1) Determinare i sottospazi $U \bigcap W$ e $U + W$ precisandone la dimensione.

   (2.2) Dopo aver scritto la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di R^4 vedere se f è un isomorfismo.

   (2.3) Calcolare gli eventuali autovalori ed i corrispondenti autospazi di f. Vedere se f è semplice.

   (2.4) Determinare il sottospazio $U^\perp$ ed una sua base ortonormale.

   (2.5) Decomporre il vettore $\vec{x} = (-1, 2, 1, 0)$ come somma di un vettore $\vec{x}_U$ di U e di un vettore $\vec{x}_{U^\perp}$ di $U^\perp$.

Soluzioni degli esercizi (23 febbraio 2010)

1. **Geometria analitica**

(1.1) I parametri direttori di s sono $l = 0$, $m = 1$, $n = -1$; il fascio di piani di asse la retta r ha equazione $\lambda(x-y+z+1)+\mu(y+3z-2) = 0$, imponendo la condizione di parallelismo $al + bm + cn = 0$ tra la retta s ed il generico piano del fascio (che ha parametri di giacitura $a = \lambda$, $b = -\lambda + \mu$, $c = \lambda + 3\mu$), si ottiene $\lambda + \mu = 0$ per cui il piano richiesto ha equazione $x - 2y - 2z + 3 = 0$.

(1.2) La retta r ha equazioni parametriche $x = -4t + 1$, $y = -3t + 2$, $z = t$; nella stella di rette di centro $A(1, 0, 7)$ consideriamo la retta per il generico punto $P(-4t + 1, -3t + 2, t)$ di r, essa ha parametri direttori $(-4t, -3t + 2, t - 7)$; imponendo la perpendicolarità con r $(ll' + mm' + nn' = 0)$ si ha $t = 1/2$, di conseguenza la retta richiesta ha equazioni $\frac{x-1}{4} = y = \frac{z-7}{-13}$.

(1.3) Il centro e il raggio della sfera Σ sono $C(2, 1, -1)$ $R = \sqrt{5}$; il piano β interseca la sfera Σ in una circonferenza di raggio $r = \sqrt{2}$ se e solo se è soddisfatta la condizione $R^2 = k^2 + r^2$, dove $k = d(C, \beta) = |\lambda| / \sqrt{3}$; con un semplice calcolo si trova $\lambda = \pm 3$.

(1.4) Sostituendo nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ le coordinate del generico punto della curva $\mathcal{C} : x = u^2 + 2, y = u^3 - 1, z = u - 1$ si ha $a(u^2+2)+b(u^3-1)+c(u-1)+d = 0$ ovvero $bu^3+au^2+cu+2a-c+d = 0$, da cui $a = b = c = d = 0$, di conseguenza non esiste un piano che contiene la curva. La generica generatrice del cilindro ha equazioni:

$$\frac{x - u^2 - 2}{0} = \frac{y - u^3 + 1}{0} = \frac{z - u + 1}{1}$$

ponendo questi rappporti uguali a v e facendo variare u e v in $\mathbb{R}$, si ottengono le equazioni parametriche del cilindro:

$$x = u^2 + 2, \quad y = u^3 - 1, \quad z = u - 1 + v.$$

Eliminando i parametri u e v nelle precedenti equazioni si ottiene l'equazione cartesiana del cilindro:

$$(x - 2)^3 - (y + 1)^2 = 0.$$

(1.5) La matrice dell'equazione di $\mathcal{Q}$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

risulta $detA = 1/4$ quindi $\mathcal{Q}$ è una quadrica generale; risulta $A_{44} = 0$ quindi $\mathcal{Q}$ è un paraboloide; inoltre la conica all'infinito di equazioni (in coordinate omogenee) $(x_1 - x_2)^2 - x_3^2 = 0$, $x_4 = 0$ si spezza in due rette reali e distinte, quindi $\mathcal{Q}$ è un paraboloide iperbolico (o a sella).

2. **Algebra Lineare**

(2.1) Il sistema lineare $x_1+x_2-x_4 = 0, x_1+x_3-x_4 = 0, x_1-2x_2-x_3 = 0$ ammette ∞^1 soluzioni $\{(3x_2, x_2, x_2, 4x_2)\}$, di conseguenza $U \bigcap W = \mathcal{L}((3, 1, 1, 4))$. Si trova facilmente che $U = \mathcal{L}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1))$, $W = \mathcal{L}((2, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$, $dimU = 2$, $dimW = 3$, di conseguenza dalla relazione $dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \bigcap W)$ segue che $dim(U + W) = 4$ da cui $U + W = \mathbb{R}^4$.

(2.2) La matrice richiesta è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

risulta che $detC = -1$ quindi C è invertibile, di conseguenza f è isomorfismo.

(2.3) Si vede facilmente che il polinomio caratteristico della matrice C è: $P_C(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda^2 - \lambda - 1)$, quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con m.a. uguale a due e $\lambda_{2,3} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ con m.a. uguale a 1. Dal calcolo dei relativi autospazi si ha $V(1) = \mathcal{L}(0, 1, 0, 0)$ (da cui possiamo già dedurre che f non è semplice perchè $m.g.(\lambda_1 = 1){=}1 \neq m.a.(\lambda_1 = 1) = 2)$; $V((1 \pm \sqrt{5})/2) = \mathcal{L}(((-1 \pm \sqrt{5})/2, (-1 \mp \sqrt{5})/2, 1, 0)))$.

(2.4) Una base di U è costituita dai vettori

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 1), \quad \vec{u}_2 = (0, 1, 1, 1);$$

allora sapendo che $U^\perp = \{\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | \vec{v}\cdot\vec{u}_1 = 0, \vec{v}\cdot\vec{u}_2 = 0\}$, con un semplice calcolo si ottiene $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 + x_4 = 0$ da cui

$$U^\perp = \mathcal{L}((1, 0, 1, -1), (0, 1, -1, 0));$$

per trovare una base ortogonale $\{\vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ di $U^\perp$, si può scegliere $\vec{u}_1' = (1, 0, 1, -1)$, poi si considera il generico vettore $(x_1, x_2, x_1 - x_2, -x_1)$ di $U^\perp$ e si impone che sia ortogonale al vettore $(1, 0, 1, -1)$; si ottiene $x_2 = 3x_1$; scelto $\vec{u}_2'$ il vettore corrispondente ad $x_1 = 1$, si ha la base ortogonale $\{(1, 0, 1, -1), (1, 3, -2, -1)\}$; normalizzando quest'ultima base si ottiene una base ortonormale di $U^\perp$,
$\{(1/\sqrt{3})(1, 0, 1, -1), (1/\sqrt{15})(1, 3, -2, -1)\}$.

(2.5) Il generico vettore $\vec{x}_U$ di U si scrive $\vec{x}_U = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = (a, b, b, a + b)$; il generico vettore $\vec{x}_{U^\perp}$ di $U^\perp$ è $\vec{x}_{U^\perp} = a\vec{u}'_1 + b\vec{u}'_2 = (a', b', a' - b', -a')$; imponendo la condizione $\vec{x} = \vec{x}_U + \vec{x}_{U^\perp}$ si ottiene $\vec{x}_U = (-6/5, 7/5, 7/5, 1/5)$ e $\vec{x}_{U^\perp} = (1/5, 3/5, -2/5, -1/5)$.