ESERCIZI DI RIEPILOGO N.1

(1.) Se due matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono simmetriche (rispettivamente, invertibili), il loro prodotto $A \cdot B$ è ancora simmetrico (risp., invertibile)?

(2.) Se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è invertibile, può esistere $r \in \mathbb{N}$ tale che $A^r = A \cdot ... \cdot A = O$?

(3.) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

determinare $A \cdot B$ e, se esiste, A^{-1}.

(4.) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare le matrici X tali che $A \cdot X = B$.

(5.) Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{Q}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

ha rango 3?

(6.) Posto

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

determinare l'analoga espressione di $A(\varphi) \cdot A(\psi)$.

(7.) Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 2 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

hanno lo stesso rango?