ESERCIZI DI RIEPILOGO N.7

(1.) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, i vettori $\vec{u} = (1, k, -k), \vec{v} = (0, 1, 3)$, $\vec{w} = (k+1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti. Per tali valori di k, esprimere $\vec{u}$ come combinazione lineare di $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(2.) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, si puo' esprimere il vettore $\vec{u} = (0, 8, -4)$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1 = (1, 2, -1), \vec{v}_2 = (1, k-4, 1-k), \vec{v}_3 = (0, k+2, 0) \in \mathbb{R}^3$.

(3.) Provare che i vettori $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 1), \vec{u}_2 = (0, -2, 0, 1), \vec{u}_3 = (0, 0, 0, -2)$ $\vec{u}_4 = (2, -1, 1, 0)$ formano una base di $\mathbb{R}^4$. Inoltre:

(a) Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale $X = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = t = 0\}$, e verificare che X e $Y = L(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$ sono sottospazi supplementari in $\mathbb{R}^4$.

(b) Dato $\vec{w} = (2, 2, 2, 0)$, determinare $\vec{x} \in X$ ed $\vec{y} \in Y$, tali che $\vec{w} = \vec{x} + \vec{y}$.

(4.) Stabilire se i polinomi $p(t) = t^2+6t-3$, $q(t) = 3t^3+t^2$, $s(t) = 2t^3+t^2+t-1$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}_3[t]$. Stabilire inoltre se il sottospazio $W = L(p, q, s)$ contiene polinomi di grado 1.

(5.) Dati i vettori $\vec{u}_1 = (2-2k, k, 0), \vec{u}_2 = (0, k, 1-k), \vec{u}_3 = (2-2k, 0, k)$ e $\vec{v} = (2, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$, provare che $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{v}) = 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Fissato poi un valore di k per cui $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}\}$ forma una base di $\mathbb{R}^3$, trovare le coordinate di $\vec{w} = (0, 2, -1)$ rispetto a tale base.