ESERCIZI DI RIEPILOGO N.8

(1.) Stabilire se i vettori $\vec{u} = (-2, i)$, $\vec{v} = (2-2i, -1-i) \in \mathbb{C}^2$ sono linearmente indipendenti, considerando $\mathbb{C}^2$

(a) come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$,

(b) come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Nei due casi, determinare un sottospazio W supplementare di $X = L(\vec{u}, \vec{v})$ in $\mathbb{C}^2$.

(2.) Dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi $U = \{(0, -2a, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ e $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z - t = y - z = 0\}$,

(a) determinare una base di U ed una di V.

(b) Verificare che la somma di U e V e' diretta.

(c) trovare un sottospazio W, supplementare di $U + V$ in $\mathbb{R}^4$.

(3.) Consideriamo in $\mathbb{R}^{2,2}$ i sottospazi vettoriali

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = b = d = 0 \right\}, \qquad V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : c = 0 \right\}$$

.

(a) Provare che U e V sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{2,2}$.

(b) Provare che U e V sono sottospazi supplementari in $\mathbb{R}^{2,2}$.

(4.) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Consideriamo in $\mathbb{R}^{2,2}$ l'insieme $V = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} : A \cdot X = X \cdot A\}$.

(a) Provare che V e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$.

(b) Trovare una base di V, ed un sottospazio W supplementare di V in $\mathbb{R}^{2,2}$.