ESERCIZI DI RIEPILOGO N.9

(1.) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare, tale che $f(1,1) = (3,-1,0)$, $f(-1,1) = (1,0,1)$.

(a) Trovare la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$, ker$f$ ed Imf.

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare $f^{-1}((2,k,-1))$.

(2.) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo, tale che la matrice $M(f_k)$ associata ad f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia

$$M(f_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare kerf_k ed Imf_k, al variare di k.

(b) per $k = 0$, determinare la matrice associata a f_0 rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1)\}$.

(3.) Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo individuato, rispetto ad una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ di V, dalle condizioni $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \frac{3}{2}\vec{v}_2$, $f(\vec{v}_1 - 2\vec{v}_3) = -\frac{1}{2}\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3$, $f(2\vec{v}_1) = 4\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$.

Verificare che f e' invertibile, e determinare la matrice associata ad f^{-1} rispetto a $\mathcal{B}$.

(4.) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare, tale che la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$ sia

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Trovare ker$f$ ed Imf.

(b) Determinare $f(W)$, dove $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

(c) Determinare $f^{-1}((0,3))$.

(5.) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo individuato dalle condizioni $f(0,0,1) = (2,3,5)$, $f(0,1,1) = (-1,0,2)$, $f(1,1,1) = (0,3,9)$.

(a) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica, e rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$.

(b) Provare che $\mathbb{R}^3 =$ker$f \oplus$Imf.