ESERCIZI DI RIEPILOGO N.10

(1.) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ \frac{3}{2} & -3 & -3 & k \end{pmatrix},$$

dove k, h sono parametri reali.

(a) Determinare k, h in modo che $\vec{u} = (2, 1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 0, -1)$ siano autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 4$ rispettivamente.

(b) Per tali valori di k ed h, provare che f è semplice.

(2.) Sia $f : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo, la cui matrice associata rispetto alla base canonica $\{1, t, t^2, t^3\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Dopo aver determinato l'espressione esplicita di f, trovare $\ker f$ ed $\mathrm{Im} f$.

(b) Determinare gli autovalori di f, i relativi autospazi, e stabilire se f è semplice.

(3.) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo, tale che la matrice $M(f_k)$ associata ad f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia

$$M(f_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di f_k al variare di k.

(b) per $k = 0$, determinare gli autospazi di f_0 e stabilire se f_0 è semplice. Ripetere per f_1 ($k = 1$).

(4.) Sia $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'endomorfismo individuato dalle condizioni $f((1,0)) = (1,-2)$, $f((0,1)) = (2,1)$. Stabilire se f è semplice, ed in tal caso determinare una base di autovettori di f.

(5.) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo, tale che la matrice $M(f_k)$ associata ad f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia

$$M(f_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori ed i corrispondenti autospazi di f_k, al variare di k.

(b) Stabilire per quali valori di k, f è semplice, e per quali valori è invertibile.

(6.) Sia $f : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ l'endomorfismo individuato dalle condizioni $f(t^2) = 2 + 3t + 5t^2$, $f(t + t^2) = -1 + 2t^2$, $f(1 + t + t^2) = 3t + 9t^2$.

(a) determinare l'espressione esplicita di f, $\ker f$, $\mathrm{Im} f$.

(b) Determinare gli autovalori di f, i relativi autospazi, stabilire se f è semplice, ed in tal caso determinare una base di autovettori di f.