ESERCIZI DI RIEPILOGO N.11

(1.) Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & x_1 y_1 + 4 x_3 y_3. \end{array}$$

(a) Verificare che β è una forma bilineare simmetrica. β è un prodotto scalare?

(b) Determinare gli insiemi $X = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \beta(\vec{x}, \vec{x}) = 0\}$ e $\ker\beta = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \beta(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \ \forall \vec{y}\}$. Che relazione sussiste tra X e $\ker\beta$?

(2.) Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3. \end{array}$$

(a) Costruire una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a g, a partire dalla base $\{\vec{v}_1 = (1, -1, 0), \vec{v}_2 = (2, 1, 0), \vec{v}_3 = (1, 2, 1)\}$.

(b) Determinare $W^\perp$, dove $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - 2z = 0\}$.

(3.) Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^{2,2}$, munito del prodotto scalare standard

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R}^{2,2} \times \mathbb{R}^{2,2} & \to & \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto & \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}. \end{array}$$

(a) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2,2}$, a partire dalla base

$$\left\{ X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Determinare i sottospazi $\mathcal{S}^\perp$ ed $\mathcal{A}^\perp$, dove $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} : A = A^T\}$ e $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} : A = -A^T\}$.

(4.) Si consideri lo spazio euclideo standard $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ ed il sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y - z = x + y + z - t = 0\}$.

(a) Determinare $V^\perp$.

(b) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$, formata da vettori di V e di $V^\perp$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale di $\vec{x} = (1, 1, 1, 1)$ su V.

(5.) Si consideri lo spazio euclideo standard $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ e l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$, individuato da

$$f(\vec{e}_1+\vec{e}_3) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ f(\vec{e}_1+\vec{e}_2) = \sqrt{2}\vec{e}_2,\ f(\vec{e}_2+\vec{e}_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2+\vec{e}_3,$$

dove $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare l'espressione esplicita di f.

(b) Verificare che f è una trasformazione ortogonale.

(c) Interpretare geometricamente f.

(d) Determinare, se esiste, una base ortonormale di autovettori di f.

(6.) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo individuato dalle condizioni $f(1, 1, 0) = (3, 2, 2)$, $f(0, 1, 1) = (5, -1, -1)$, $f(1, 0, 1) = (4, 1, 3)$.

(a) Verificare che f è un endomorfismo simmetrico, rispetto al prodotto scalare standard $\cdot$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare una base ortonormale di autovettori di f.