

Università del Salento, C.d.L. in Ingegneria Industriale
PROVA DI GEOMETRIA E ALGEBRA (SIMULAZIONE)

1) Geometria Analitica. Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano $RC(0, x, y, z)$,

a) verificare che la curva

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 0, \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

è una circonferenza a punti reali.

b) Determinare il centro ed il raggio di γ .

c) Determinare la retta tangente a γ nell'origine.

d) Determinare la retta s , passante per il punto $P(1, 0, 1)$, parallela al piano

$\pi : 3x - 4y + 6z + 2 = 0$ e complanare con la retta $r : 3x + 2z + 1 = 4x + 3y - 1 = 0$.

2) Coniche. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica

$$C_k : 2x^2 + 4y^2 + 4xy + 6x + 2ky + 1 - k = 0.$$

a) Classificare C_k dal punto di vista proiettivo e affine

b) Per $k = 0$, studiare C_0 .

b) Per $k = 1$, determinare la retta tangente a C_1 nell'origine.

3) Autovalori ed autovettori. Per lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 , al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definito da

$$f_k(x, y, z) = (x + kz, 3x + ky + z, kx + z).$$

(i) Determinare $\text{Ker } f_k$ ed $\text{Im } f_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, f_k è semplice.

4) Spazi euclidei. In \mathbb{R}^3 , si consideri la forma bilineare definita da

$$g((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + 2yy' + zz' + yz' + zy'.$$

a) Provare che g è un prodotto scalare.

b) Trovare una base ortonormale di (\mathbb{R}^3, g) .

c) Trovare U^\perp (rispetto a g), dove $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - z = y = 0\}$.

5) Quesiti di Teoria.

(i) Prodotto scalare e prodotto vettoriale dei vettori geometrici dello spazio: definizioni e proprietà essenziali.

(ii) Enunciare e dimostrare il Teorema Fondamentale dell'Algebra Lineare.

N.B.: La prova sarà superata se sarà raggiunta la sufficienza separatamente per la parte di esercitazione e per la parte di Teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.