Esercizi sugli Spazi Euclidei

1) Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) & \mapsto & 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 \end{array}$$

a) Verificare che si tratta di un prodotto scalare.

b) Determinare una base ortonormale per g.

c) Determinare il prodotto scalare dei vettori $v = (1, 1)$ e $w = (-1, 2)$ rispetto a g.

2) Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) & \mapsto & 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 \end{array}$$

a) Verificare che si tratta di un prodotto scalare.

b) Determinare una base ortonormale per g.

c) Determinare il sottospazio ortogonale di $L((1, 0, 0))$ rispetto a g.

3) Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) & \mapsto & x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3 \end{array}$$

a) Verificare che si tratta di un prodotto scalare.

b) Determinare il sottospazio ortogonale di $U = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 + x_3 = 0\big\}$ rispetto a g.

c) Determinare una base ortonormale per g, costituita da vettori di U e $U^\perp$.

d) Determinare la proiezione ortogonale su U rispetto a g.

4) Rispetto al prodotto scalare standard $\cdot$ di $\mathbb{R}^4$,

a) Determinare $U^\perp$, dove $U = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y + t = 0\big\}$.

b) Determinare una base ortonormale costituita da vettori di U e $U^\perp$.

c) Determinare l'epressione esplicita della proiezione ortogonale su U.