Esercizi sugli endomorfismi simmetrici

1) Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ v=(x,y) & \mapsto & (x+2y, 2x-y) \end{array}$$

a) Verificare che si tratta di un endomorfismo simmetrico rispetto al prodotto scalare standard $\cdot$ di $\mathbb{R}^2$.

b) Determinare una base ortonormale di autovettori per f.

c) Determinare la forma canonica della forma quadratica Q_f corrispondente a f.

2) Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ v=(x,y,z) & \mapsto & (x-y, -x+2y+z, y+z) \end{array}$$

a) Verificare che si tratta di un endomorfismo simmetrico rispetto al prodotto scalare standard $\cdot$ di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare una base ortonormale di autovettori per f.

c) Determinare la forma canonica della forma quadratica Q_f corrispondente a f.

3) Si consideri l'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ che ad ogni vettore $v=(x,y,z)$ associa il suo simmetrico rispetto al piano vettoriale $\pi: x-y=0$.

a) Scrivere l'espressione esplicita di f.

b) Verificare che si tratta di un endomorfismo simmetrico rispetto al prodotto scalare standard $\cdot$ di $\mathbb{R}^3$.

c) Determinare una base ortonormale di autovettori per f.

4) Si consideri la forma quadratica

$$\begin{array}{rcl} Q:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ v=(x_1,x_2,x_3) & \mapsto & 4x_1^2+5x_1^2-2x_1x_2+5x_3^2 \end{array}$$

a) Scrivere l'espressione esplicita dell'endomorfismo simmetrico f corrispondente a Q rispetto al prodotto scalare standard $\cdot$ di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare una base ortonormale di autovettori per f.

c) Se esiste (giustificare la risposta!), determinare l'operatore radice quadrata di f.