

Esercizi su forme bilineari simmetriche e forme quadratiche

1) Si consideri la forma quadratica

$$Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

- Descrivere esplicitamente la forma bilineare simmetrica φ corrispondente a Q .
- Determinare la segnatura di Q e classificarla.
- Scrivere Q in forma canonica.

2) Si consideri la forma quadratica

$$Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_3^2$$

- Descrivere esplicitamente la forma bilineare simmetrica φ corrispondente a Q .
- Determinare la segnatura di Q e classificarla.
- Scrivere Q in forma canonica, specificando la base rispetto a cui Q assume tale forma.

3) Si consideri in \mathbb{R}^3 la forma bilineare simmetrica φ avente come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Descrivere esplicitamente la forma bilineare simmetrica φ e la corrispondente forma quadratica Q .
- Classificare Q .
- Scrivere Q in forma canonica.

4) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri in \mathbb{R}^3 la forma bilineare simmetrica φ_k avente come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-k \\ 0 & k & 0 \\ 2-k & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Determinare $\ker(\varphi_k)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- Classificare la forma quadratica Q_0 corrispondente a φ_0 .