Esercizi sulle superfici

1) Si consideri la superficie

$$M: \quad \varphi(u,v) = (uv^2, v^3, u^2v), \quad u, v > 0.$$

a) φ è una parametrizzazione regolare?

b) Determinare la natura dei punti di M.

c) Determinare le direzioni principali e quelle asintotiche nel punto $P_0 = (1,1,1)$.

2) Si considerі la superficie

$$M: \quad \varphi(u,v) = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v), \quad (u,v) \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\times\mathbb{R}.$$

a) Determinare la natura dei punti di M.

b) Determinare la curvatura media dei punti di M.

c) Determinare l'operatore forma, le curvature principali ed i vettori principali nel punto $P_0 = (1,0,0)$.

d) Verificato che il vettore $\vec{v} = (0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ è tangente in P_0 a M, determinare la curvatura normale in P_0 nella direzione di $\vec{v}$.

3) Si consideri la superficie

$$M: \quad \varphi(u,v) = \left(u, \tfrac{v^2}{2}, \tfrac{u^2}{2} - \tfrac{v^3}{3}\right) \quad (u,v) \in D.$$

a) Determinare il più grande aperto connesso D, contenente $(1,1)$, su cui φ è una parametrizzazione regolare.

b) Determinare la natura dei punti di M e la curvatura media dei punti di M.

c) Determinare il piano tangente ad M nel punto $P_0 = \varphi(1,1)$.

d) Determinare S_{P_0}, le curvature principali ed i vettori principali nel punto P_0.

e) Determinare la curvatura normale in P_0 nella direzione di $\vec{v} = (1,1,0)$.

4) Si consideri la superficie

$$M: z = 2xy.$$

a) Dimostrare che M è una superficie regolare.

b) Determinare la curvatura Gaussiana, la curvatura media e le curvature principali dei punti di M.

c) Determinare l'operatore forma ed i vettori principali nell'origine.

d) Determinare, se esistono, le direzioni asintotiche nell'origine.

e) Verificato che il vettore $\vec{v} = (2,-1,0)$ è tangente nell'origine a M, determinare la curva sezione normale e la curvatura normale nell'origine nella direzione di $\vec{v}$.