APPUNTI DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA II

Giovanni Calvaruso *

PROGRAMMA DEL CORSO:

PARTE INTRODUTTIVA:
1) Matrici, determinanti e sistemi lineari

GEOMETRIA ANALITICA:
2) Vettori geometrici
3) Geometria analitica del piano
4) Coniche
5) Geometria analitica dello spazio

TESTI ED APPROFONDIMENTI:
A. SANINI, Lezioni di Geometria, ed. Levrotto e Bella, Torino.
A. SANINI, Esercizi di Geometria, ed. Levrotto e Bella, Torino.
G. DE CECCO e R. VITOLO, Note di Geometria e Algebra (disp. in Biblioteca).
G. CALVARUSO e R. VITOLO, Esercizi di Geometria ed Algebra Lineare (disp. in Biblioteca).
R. MARINOSCI, Complementi di Geometria e Algebra (Coniche e quadriche) (disp. online).

*N.B.: Queste note sono realizzate ad esclusivo uso interno per il corso di Istituzioni di Matematica II del corso di Laurea in Ottica e Optometria dell'Università del Salento, a.a. 2012/13. Come tali, non hanno alcuna pretesa di completezza, e sono da intendersi come un puro supporto al corso stesso, che non può in alcun modo sostituirsi all'apprendimento fornito dalle lezioni.

1 MATRICI, DETERMINANTI E SISTEMI LINEARI

1.1 Matrici

Si chiama *matrice reale di tipo* $m \times n$ una tabella di $m \cdot n$ numeri reali, disposti in modo da formare m righe ed n colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

L'elemento generico di A, cioè l'elemento che si trova sull'i-esima riga e j-esima colonna, si indica con a_{ij}. In breve si scrive

$$A = (a_{ij}), \qquad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Se $m \neq n$ la matrice si dice *rettangolare*, se $m = n$ si chiama *quadrata*. Se $m = 1$ la matrice si dice *matrice (o vettore) riga*, se $n = 1$ la matrice si chiama *matrice (o vettore) colonna*.

Indichiamo con $\mathbb{R}^{m,n}$ l'insieme di tutte le matrici reali ad m righe ed n colonne a coefficienti in $\mathbb{R}$. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, allora

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j\,.$$

Una *sottomatrice* $B \in \mathbb{R}^{p,q}$ di una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ è una matrice i cui elementi appartengono a p righe e a q colonne prefissate di A.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1, 3 \\ j = 2, 3 \end{matrix}.$$

Si chiama *trasposta* di $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ la matrice A^T o $A^T \in \mathbb{R}^{n,m}$ ottenuta da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne:

$$A = (a_{ij}) \quad \Rightarrow \quad A^T = (a_{ji})\,.$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & \pi \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Casi particolari di matrici quadrate sono

A *simmetrica*	se $a_{ij} = a_{ji}$
A *antisimmetrica*	se $a_{ij} = -a_{ji}$
A *diagonale*	se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$
A *unita'* o *identica*	se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$; $a_{ii} = 1$.

1.2 Operazioni su matrici

Prodotto di uno scalare per una matrice. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, la matrice λA, *moltiplicazione di A per lo scalare λ*, è la matrice

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \quad \forall i, j$$

Somma di due matrici. Due matrici A e B sono sommabili se entrambe appartengono a $\mathbb{R}^{m,n}$. La matrice *somma* $C = A + B$ è per definizione $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ con

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \,.$$

La matrice O avente tutti gli elementi 0 è la matrice *nulla*, e soddisfa

$$A + O = A \qquad \forall A \,,$$

e l'*opposta* di A è la matrice $A' = -A$, dove $a'_{ij} = -a_{ij}$ $\forall i, j$.

Esercizio: Dimostrare che $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Prodotto righe per colonne. La matrice A è moltiplicabile (*righe per colonne*) per la matrice B se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,r}$. La matrice *prodotto* di A e B è la matrice $C = AB \in \mathbb{R}^{m,r}$, con $C = (c_{ik})$ dove

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

è il prodotto della riga i-esima di A per la colonna j-esima di B.

Si noti che in generale non ha senso anche la moltiplicazione BA. Tuttavia, anche nel caso quadrato può accadere

$$AB \neq BA \,.$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA \,.$$

Si osservi che (come nell'esempio) si può avere $AB = O$ senza che A o B siano matrici nulle. In tal caso A e B si dicono *divisori dello zero.*

Si vede facilmente che la matrice unità I è tale che

$$AI = A = IA \qquad \forall A \,.$$

La moltiplicazione tra matrici soddisfa alle regole

$$A(BC) = (AB)C \,,$$
$$(A + B)C = AC + BC \,, \qquad A(B + C) = AB + AC \,,$$

Esempi ed esercizi.

- Se $A = (1, 0, 3)$ allora

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; A \cdot A^T = (10) \,, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} .$$

- Provare che $(AB)^T = B^T A^T$.
- Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, provare che AA^T e $A^T A$ sono simmetriche.
- Si osservi che se A e B sono simmetriche, in generale AB non è simmetrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se A è una matrice quadrata, allora

$$A^2 = AA, \ldots, A^h = A^{h-1} A.$$

Se $AB = BA$, allora $(AB)^k = A^k B^k$. Questo non è vero, in generale, se $AB \neq BA$.

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è detta *ortogonale* se

$$A^T A = I = AA^T.$$

Esercizi.

- Trovare tutte le potenze della matrice $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- Provare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

  è ortogonale.
- Siano $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Vedere se

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è detta *invertibile* se esiste una matrice $A' \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che

$$AA' = I = A'A.$$

Si scrive in tal caso $A' = A^{-1}$. Quindi, se A è ortogonale, $A^{-1} = A^T$. Vedremo in seguito un criterio che ci permette di decidere quando una matrice è invertibile.

Esercizio: Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

stabilire se sono invertibili e in tal caso trovare l'inversa.

Nota. Le matrici sono molto utili in matematica: permettono di semplificare complicate espressioni considerando tutta la tabella come un unico ente. Le matrici intervengono nella schematizzazione di molti fenomeni, dipendenti da un numero finito di parametri.
Come vedremo più avanti, se vogliamo risolvere un sistema di equazioni lineari, una matrice ci dà tutte le informazioni necessarie per risolverlo.

1.3 Determinante di una matrice quadrata

Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, chiamiamo

$$\det A = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}\,,$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le $n!$ permutazioni dei numeri $1, 2, \dots, n$.

In termini piú semplici, *il determinante* di una matrice reale **quadrata** è un numero, che si associa alla matrice stessa, e ne evidenzia alcune importanti proprietá. Si puó descrivere come calcolare tale numero *in maniera ricorsiva*, ossia, per matrici quadrate via via piú grandi:

Se $n = 1$, allora $\det A = a_{11}$.

Se $n = 2$, allora

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,,$$

se $n = 3$, allora

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Illustriamo la *Regola di Laplace* per il calcolo del determinante:

Fissato un elemento a_{ij} di A, si chiama *minore complementare* di a_{ij} la sottomatrice di A di ordine $n-1$, ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna. Si chiama *complemento algebrico* di a_{ij} o *cofattore* di a_{ij}, il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\text{minore complementare di } a_{ij})\,.$$

Teorema: Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora

$$\det A = a_{r1}A_{r1} + \dots + a_{rn}A_{rn}\,,$$

dove r è una fissata riga (scelta arbitrariamente), oppure

$$\det A = a_{1c}A_{1c} + \dots + a_{nc}A_{nc}\,,$$

dove c è una fissata colonna (scelta arbitrariamente).

Questa regola può essere assunta anche come definizione ricorsiva di determinante:

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1 \\ \sum_i a_{ij}A_{ij} = \sum_j a_{ij}A_{ij} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Quindi det è un'applicazione da $\mathbb{R}^{n,n}$ in $\mathbb{R}$.

Dal teorema di Laplace segue immediatamente che

1. $\det A = \det A^T$;
2. se la matrice B si ottiene da A moltiplicando una linea di A per un numero reale k, lasciando invariate le altre linee, allora $\det B = k \det A$.

Esempi ed esercizi.

- Se $I \in \mathbb{R}^{n,n}$, allora $\det I = 1$, $\det(-I) = (-1)^n$.
- Provare con un esempio che, in generale, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

- Provare che per $k \in \mathbb{R}$ si ha $\det(kA) = k^n \det A$.

Proprietá:

1. se le matrici A e B differiscono soltanto per lo scambio di due linee parallele, allora $\det B = -\det A$;
2. se A ha due linee uguali, allora $\det A = 0$;
3. se A ha due linee proporzionali, allora $\det A = 0$;
4. se B si ottiene da A aggiungendo ad una certa linea di A un'altra linea di A moltiplicata per un fattore di proporzionalità, allora $\det B = \det A$;
5. la somma degli elementi di una linea per i complementi algebrici di un'altra linea è zero.

Teorema di Binet: Se A e B sono due matrici quadrate di ordine n, si ha

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)\,.$$

Quindi, in generale, $AB \neq BA$, tuttavia $\det(AB) = \det(BA)$.

Esercizi.
1) Si calcoli $detA$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad (detA = -5).$$

2) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si calcoli $detA$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & -k & k+2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.4 Matrici invertibili

Proposizione: Se A è invertibile, allora

1. $\det A \neq 0$;
2. $detA^{-1} = 1/\det A$.

Se $\det A \neq 0$, allora A è invertibile, e si prova che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A)\,,$$

dove $Adj(A) = (A_{ij})^T$, detta *aggiunta classica di* A, è la matrice che ha al posto (i,j) il cofattore A_{ji} di a_{ji}.

Esempi ed esercizi.

1) Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

2) Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Si ha $detA = -8 \neq 0$,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -1/2 \\ -12 & 0 & 2 \end{pmatrix}\,,$$

e $A^{-1} = -\frac{1}{8} Adj(A)$.

1.5 Rango di una matrice

Combinazioni lineari: Date $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $X = (x_j) \in \mathbb{R}^{n,1}$ e $Y = (y_i) \in \mathbb{R}^{m,1}$,

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases}$$

cioè,

$$Y = AX \Leftrightarrow Y = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n,$$

dove $C_1, \ldots, C_n$ sono le colonne di A. Si dice in tal caso che Y è *combinazione lineare* delle colonne di A, con coefficienti $x_1, \ldots, x_n$.

Analogamente, date $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $X' = (x'_j) \in \mathbb{R}^{1,m}$ e $Y' = (y'_i) \in \mathbb{R}^{1,n}$,

$$Y' = X'A \Leftrightarrow Y' = x_1 R_1 + \cdots + x_n R_m,$$

dove $R_1, \ldots, R_n$ sono le righe di A. Si dice in tal caso che Y' è *combinazione lineare* delle righe di A, con coefficienti $x'_1, \ldots, x'_n$.

Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Da A possiamo estrarre sottomatrici quadrate di ordine r, $1 \leq r \leq \min(m,n)$. Di queste sottomatrici quadrate, dette *minori*, si può fare il determinante e vedere se non è nullo.

Definizione: Il *rango* $rg(A)$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è dato dal massimo ordine dei suoi minori con determinante non nullo.

Quindi, $rg(A) = p > 0$ vuol dire

1. <u>esiste</u> almeno <u>un</u> minore di ordine p con determinante diverso da 0;
2. <u>tutti</u> gli eventuali minori di ordine $p+1$ hanno determinante nullo.

Naturalmente, $rg(A) = 0$ vuol dire che la matrice è nulla.
Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (quadrata), allora

$$rg(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ invertibile}$$

Esempi ed esercizi.

- La matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$
ha rango 2, poiché $\det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, e tutti i minori di ordine 3 hanno determinante nullo.

- Determinare il rango delle seguenti matrici, al variare di λ,
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \lambda \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 4 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Si vede che $rg(A) = 2\ \forall \lambda$; $rg(B) = 3$ per $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -2$, mentre $rg(B) = 2$ per $\lambda = -2$ e $rg(B) = 1$ per $\lambda = 1$.

- Calcolare il rango della seguente matrice B al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Poiché $detB = 0$, si ha che $rg(B) \leq 3$. Inoltre,
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$
Dunque, $\mathrm{rg}(B) = 3$ per ogni λ.

1.6 Sistemi lineari

Un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite $x_1, \dots, x_n$ è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

o, in forma più compatta,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,, \qquad i = 1, 2, \dots, m\,,$$

dove i numeri reali a_{ij} sono detti *coefficienti* e $b_i \in \mathbb{R}$ *termini noti.* Se $b_i = 0$ il sistema si dice *omogeneo.*

In forma matriciale:

$$AX = B \tag{1.1}$$

dove $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ è la matrice dei coefficienti, X è la colonna delle incognite e B quella dei termini noti, cioè

$$X^T = (x_1, \dots, x_n)\,, \qquad B^T = (b_1, \dots, b_n)\,.$$

I problemi fondamentali che si presentano sono:

1. esistenza delle soluzioni o compatibilità del sistema (aspetto **qualitativo**);
2. determinazione del numero delle soluzioni (aspetto **quantitativo**);
3. calcolo esplicito di tutte le eventuali soluzioni (aspetto **computazionale**).

Innanzitutto, una **soluzione** del sistema (1.1) è una n-pla $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ che soddisfa simultaneamente tutte le equazioni di (1.1).

Problema 1 (qualitativo). Esso è risolto completamente dal *criterio di Rouche'-Capelli*:

$$\text{il sistema è compatibile} \Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A})\,, \tag{1.2}$$

dove $\tilde{A} = (A, B)$ è la *matrice completa* del sistema.

Esempio. Il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è chiaramente incompatibile. Infatti $1 = rg(A) \neq rg(\tilde{A}) = 2$.

Problema 2 (quantitativo). Sia $rg(A) = rg(\tilde{A}) = p$. Si hanno i seguenti casi.

$$\begin{array}{ll} p = n & \text{una sola soluzione,} \\ p < n & \infty^{n-p} \text{ soluzioni,} \end{array}$$

Con '∞^{n-p} soluzioni' si intende infinite soluzioni dipendenti da $n - p$ parametri.

Ne segue che se $p = m < n$ (*sistema normale*) il sistema è sempre compatibile.

N. B. *La risoluzione di un sistema compatibile di rango p si riconduce sempre a quella di un sistema di p equazioni in p incognite (con matrice dei coefficienti non singolare). Basta* *considerare come parametri le $n-p$ incognite, i cui coefficienti non concorrano a formare il minore di rango uguale a p.*

Problema 3 (computazionale). Si tratta dunque di risolvere un sistema con $n=m$ e $\det A \neq 0$:

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Il teorema di Cramer ci dà l'espressione esplicita delle soluzioni:

$$x_k = \frac{det(A^{(k)})}{det(A)},$$

dove $A^{(k)}$ è la matrice ottenuta da A sostituendo alla k-esima colonna di A la colonna dei termini noti.

Nota: sistemi omogenei. I sistemi *omogenei*, ossia sistemi del tipo

$$AX = O, \tag{1.3}$$

ammettono *sempre* la soluzione nulla $X=O$. Siamo perciò interessati alle soluzioni non nulle, dette anche *autosoluzioni* o *soluzioni proprie.* Se X' è una soluzione di (1.3), allora $\lambda X'$ è una soluzione $\forall \lambda$; se X' e $X"$ sono soluzioni di (1.3), allora anche $X' + X"$ è una soluzione. Chiaramente $rg(A) = rg(\tilde{A})$, e se $p = rg(A)$ allora le soluzioni sono ∞^{n-p}.

Ad ogni sistema lineare non omogeneo (1.1) si può associare il sistema lineare omogeneo (1.3).

Si osservi che se X_0 è una soluzione particolare di (1.1) e $\tilde{X}$ una soluzione generica di (1.3), allora $\tilde{X} + X_0$ è una soluzione generica di (1.1); infatti

$$A(\tilde{X} + \tilde{X}_0) = A\tilde{X} + A\tilde{X}_0 = O + B = B.$$

Esempi.

1) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ A & 0 \\ & 2 \end{array} \right).$$

Poiché $det(A) = -4 \neq 0$, il sistema è di Cramer, e quindi ammette un'unica soluzione. Applicando il metodo risolutivo dei sistemi di tipo Cramer:

$$x = \frac{det(A^1)}{det(A)} = 0, \quad y = \frac{det(A^2)}{det(A)} = 1, \quad z = \frac{det(A^3)}{det(A)} = 0,$$

per cui, $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ è l'unica soluzione del sistema.

2) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y - z = 0 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases} \tag{1.4}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{matrix} \right).$$

Poiché $p = rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2$ il sistema è compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni ($n - p = 3 - 2 = 1$). Esso corrisponde al sistema di tipo Cramer

$$\begin{cases} 2y = z \\ 2x = 6 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t + 3 \\ (y = t) \\ z = 2t \end{cases}$$

Applicando il metodo risolutivo dei sistemi di Cramer, il II sistema ha l'unica soluzione $(x, z) = (-3t + 3, 2t)$ (dipendente dal parametro t), e quindi, il sistema dato ha per soluzioni $(x, y, z) = (-3t + 3, t, 2t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Altro metodo: Il sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $(x, y, z) = (h, -1/3\,h, -1/3\,h)$. Una soluzione particolare di (1.4), che si ottiene ad esempio ponendo $z = 0$, è $(3, 0, 0)$. Quindi, *tutte* le soluzioni di (1.4) sono date da

$$(x, y, z) = (h + 3, -1/3\,h, -1/3\,h), \qquad h \in \mathbb{R}.$$

Ponendo $t = -1/3\,h$, ci si rende conto immediatamente che gli insiemi

$$\{(-3t + 3, t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \left\{ \left(h + 3, -\frac{1}{3}h, -\frac{2}{3}h \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

coincidono.

3) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 7 \end{cases} \tag{1.5}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix} \right).$$

Poiché $p = rg(A) = 1 \neq 2 = rg(\tilde{A})$, il sistema NON è compatibile

1.7 Esempi ed Esercizi

- Verificare che la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

è ortogonale, per ogni valore reale di θ. Ripetere per

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Trovare A^{-1} e B^{-1}, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Trovare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, il rango delle seguenti matrici A e B. Determinare in particolare i valori reali di k per cui le matrici A e B sono invertibili:

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 3 & 1+k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-k & 3 & -1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & -k & 2 \end{pmatrix}.$$

- Discutere il seguente sistema, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, e risolverlo nei casi in cui è compatibile

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ 2x - \lambda z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- Determinare il polinomio

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

di grado ≤ 3 tale che

$$P(0) = 1, \quad P(1) = -2, \quad P(-1) = -6, \quad P(2) = 3.$$

1.8 Esercizi di riepilogo

1. Date le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0,$$
calcolare $2A - 3B$, A^2, B^T, AB, BA.

2. Date le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
calcolarne tutti i possibili prodotti a due a due.

3. Risolvere il sistema lineare $AX = B$, dove
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Dire se le seguenti matrici sono invertibili. In caso affermativo, trovarne l'inversa.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinare il rango della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -\mu \\ \mu - 1 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

6. Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinare il rango della matrice
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\mu \\ 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

7. Risolvere il sistema lineare
$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 0, \\ x - 2z - t = -1. \end{cases}$$

8. Verificare che i seguenti sistemi lineari sono equivalenti (hanno le stesse soluzioni):
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + y - 4z = 5, \\ x + 3y - 7z = 0, \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x - z = 3, \\ y - 2z = -1. \end{cases}$$

9. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare e risolvere il sistema lineare
$$\begin{cases} x + kz = k, \\ 2y + z = 0, \\ kx + z = k. \end{cases}$$

2 Vettori dello spazio ordinario

2.1 Lo spazio $\mathbf{V}_3$

Sia S_3 lo spazio ordinario della geometria euclidea. Ogni segmento di estremi A e B individua due segmenti orientati AB e BA aventi orientazioni opposte; ciò è espresso scrivendo che

$$AB = -BA \quad \text{oppure} \quad \vec{AB} = -\vec{BA}.$$

Nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio introduciamo la seguente relazione di equivalenza, detta di *equipollenza*

$$AB \sim CD \Leftrightarrow AB \text{ è parallelo a } CD,\ \|AB\| = \|CD\|, \text{ e } AB,CD \text{ sono equiversi.}$$

Le classi di equivalenza si chiamano *vettori* (liberi). Il vettore $\vec{u}$ individuato da $\vec{AB}$ e da tutti quelli ad esso equipollenti (come $\vec{CD}$) soddisfa l'uguaglianza $\vec{u} = [\vec{AB}] = [\vec{CD}]$. Il rappresentante $\vec{AB}$ di un vettore $\vec{u}$ si dice *vettore $\vec{u}$ applicato in A* e si indica $(\vec{u}, A)$. Si usa anche la notazione $\vec{u} = B - A$.

I segmenti AA, BB, $\dots$, individuano il vettore nullo $\vec{0}$.

Un vettore non nullo è individuato dalla direzione, dal verso e dal modulo. Indichiamo con $\mathbf{V}_3$ l'insieme dei vettori liberi dello spazio e con $\mathbf{S}_3$ i punti dello spazio. Fissato un punto $O \in \mathbf{S}_3$, ad ogni punto $P \in \mathbf{S}_3$ si può associare un unico vettore $\vec{u} \in \mathbf{V}_3$, ponendo $\vec{u} = \vec{OP}$, e viceversa.

2.2 Somma di vettori

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori, che vogliamo sommare. Se si considerano i rappresentanti indicati $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - B$, poniamo

$$\vec{u} + \vec{v} = C - A$$

(che non dipende dai rappresentanti scelti).

Proprietá:

1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + (\vec{v}) + \vec{w}$ (associativa)

2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativa)

3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (elemento neutro)

4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (inverso rispetto alla somma)

Si osservi che se consideriamo rappresentanti opportuni $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AD}$, allora $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$ è la diagonale del parallelogramma di lati AB e AD, in accordo con quanto si studia in Fisica.

Differenza di vettori: Per definizione, poniamo $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Se $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - A$, allora $\vec{u} - \vec{v} = B - C$.

2.3 Prodotto di un numero reale per un vettore

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbf{V_3}$. Vogliamo definire $\lambda\vec{u}$.

1. Se $\lambda = 0$, oppure $\vec{u} = \vec{0}$, poniamo $\lambda\vec{u} = \vec{0}$.

2. Se $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, il vettore $\lambda\vec{u}$ ha direzione coincidente con $\vec{u}$, verso concorde con quello di $\vec{u}$ se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$, e inoltre

$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|.$$

Il numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è detto *scalare*.

Proprietà:

1) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$,

2) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$,

3) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$,

4) $1\vec{u} = \vec{u}$

2.4 Dipendenza lineare

I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente dipendenti* se e solo se esiste una n-pla $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tale che

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}.$$

Se ad esempio $\lambda_n \neq \vec{0}$, allora

$$\vec{v}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\vec{v}_1 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\vec{v}_{n-1},$$

cioè, $\vec{v}_n$ 'dipende' da $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$. Più precisamente, $\vec{v}_n$ è <u>combinazione lineare</u> di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$. In generale, si dice che un vettore $\vec{v}$ è *combinazione lineare* di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ con coefficienti $\lambda_1, \dots \lambda_n$ se

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n\,. \tag{2.1}$$

Indipendenza lineare: I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente indipendenti* se e solo se *non* sono linearmente dipendenti, cioè

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Chiaramente vale sempre (sia nel caso dell'indipendenza, sia nel caso della dipendenza)

$$\lambda_i = 0 \text{ per ogni } i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}\,.$$

Significato geometrico: Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbf{V}_3$. Allora

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \text{ dipendente} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 = \vec{0} \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ dipendenti} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ dipendenti} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ complanari.} \end{aligned}$$

$n \geq 4$ **vettori di $\mathbf{V}_3$ sono sempre dipendenti**. Quindi, in $\mathbf{V}_3$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 3.

Sia $\mathbf{V}_2$ l'insieme dei vettori del piano; in $\mathbf{V}_2$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 2.

Sia $\mathbf{V}_1$ l'insieme dei vettori della retta; in $\mathbf{V}_1$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 1.

Si dice anche che la **dimensione** della retta è 1 ed una sua base è data da un vettore non nullo $\{\vec{v}_1\}$; la dimensione del piano è 2 ed una sua base è data da 2 vettori indipendenti $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$; la dimensione dello spazio è 3 ed una sua base è data da 3 vettori indipendenti $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base di $\mathbf{V}_3$. Allora, $\{\vec{v}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sono dipendenti ($\forall \vec{v}$) e

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3.$$

La terna di numeri $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ è univocamente individuata, e λ_1, λ_2, λ_3 sono dette le *coordinate* di $\vec{v}$ nella base $\mathcal{B}$. Naturalmente, nella base $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 & \text{ha coordinate} & (1,0,0), \\ \vec{e}_2 & \text{ha coordinate} & (0,1,0), \\ \vec{e}_3 & \text{ha coordinate} & (0,0,1). \end{array}$$

Vediamo ora come condizioni vettoriali si traducano in problemi scalari tramite le coordinate. Siano

$$\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \qquad \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \qquad \vec{w}(w_1, w_2, w_3).$$

Allora:

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} au_1 + bv_1 + cw_1 = 0 \\ au_2 + bv_2 + cw_2 = 0 \\ au_3 + bv_3 + cw_3 = 0. \end{cases}$$

Si consideri

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Se $rg(A) = p$, allora p è il massimo numero di vettori indipendenti in $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Naturalmente, $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$, e $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

Se consideriamo il riferimento cartesiano affine $\mathcal{R}(Oxyz)$ associato a $\mathcal{B}$ tale che $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ siano i vettori unità sugli assi si ha, con l'usuale simbolismo,

$$\vec{e}_1 = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{j}, \quad \vec{e}_3 = \vec{k},$$
$$u_1 = u_x, \quad u_2 = u_y, \quad u_3 = u_z.$$

Se $P_i(x_i, y_i, z_i)$ per $i = 1, 2$, allora

$$\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Esercizi.

- Siano dati i vettori $\vec{v}(1,2,3)$, $\vec{w}(1,1,1)$ e $\vec{v}_1(1,-1,0)$, $\vec{v}_2(0,1,1)$, $\vec{v}_3(2,2,4)$.
  1. Si possono scrivere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$? Se sì, trovare i coefficienti della combinazione lineare.
  2. $\vec{v}_2$ è combinazione lineare di $\vec{w}, \vec{v}_1, \vec{v}_3$?
- Si consideri $\mathbf{V}_2$ ed una sua base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, i vettori

  $$\vec{v}_1 = (1-t)\vec{e}_1 + t\vec{e}_2, \qquad \vec{v}_2 = t\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

  costituiscono una base di $\mathbf{V}_2$?
- Siano dati i seguenti vettori di $\mathbf{V}_3$ riferiti alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

  $$\vec{v}_1 = (2-h, 4-2h, 2-h), \qquad \vec{v}_2(h, 3h, 2h), \qquad \vec{v}_3(1-h, 1-2h, h).$$

  1. determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\vec{w}(1-2h, 1-h, -5h)$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.
  2. Esaminare il caso $h = 0$.

2.5 Orientazione

In generale, *orientare* uno spazio significa *fissare* una base ordinata di suoi vettori, e assumerla come positiva.

Una retta r si dice *orientata* se é assegnato un vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$, parallelo ad r. Tale vettore determina un verso di percorrenza su r, che **si sceglie** come positivo.

Un piano π si dice *orientato* se é assegnata una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *ordinata* di vettori paralleli a π. Tale base determina un verso di rotazione su π, quello della minima rotazione che porta $\vec{e}_1$ su $\vec{e}_2$, che **si sceglie** come positivo. Per convenzione, si sceglie il verso *antiorario* come positivo.

Lo spazio S_3 é *orientato* se é assegnata una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *ordinata* di vettori paralleli a π. Tale base determina una orientazione, che **si sceglie** come positiva, legata al fatto che un osservatore, posto nel semispazio determinato dal piano di $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ in cui c'é $\vec{e}_3$, vede la minima rotazione che porta $\vec{e}_1$ su $\vec{e}_2$ in senso *antiorario*.

2.6 Prodotto scalare

Il *prodotto scalare* tra due vettori è l'applicazione

$$g\colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbb{R}, \quad g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ o } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, commutatività
2. $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, omogeneità
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, distributività.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base ortonormale di $\mathbf{V}_3$ (cioè i tre vettori sono mutuamente ortogonali ed hanno modulo unitario); allora:

$$\begin{aligned} &\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \qquad && \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \qquad && \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \\ &\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, && \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, && \vec{i} \cdot \vec{k} = 0. \end{aligned}$$

Se $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, allora si ha

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \tag{2.2}$$

Si osservi che se $\mathcal{B}$ non fosse ortonormale, l'espressione precedente non sarebbe così semplice. Si vede facilmente che

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \qquad \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}. \tag{2.3}$$

Dunque, *conoscendo il prodotto scalare*, si può determinare la lunghezza di un vettore e l'angolo tra due vettori. Tutta la geometria euclidea si può dedurre dalla nozione di prodotto scalare (2.2), assumendo le (2.3) come *definizioni* di *modulo* e di *angolo* tra due vettori (vedi esercizi).

La *componente ortogonale* di $\vec{v}$ rispetto ad un vettore non nullo $\vec{u}$ è il numero reale

$$v_{\vec{u}} = \|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \vec{v} \cdot \hat{u} \in \mathbb{R}.$$

La *proiezione ortogonale* di $\vec{v}$ su $\vec{u}$ è il vettore

$$\vec{v}_{\vec{u}} = v_{\vec{u}} \, \hat{u}.$$

2.7 Prodotto vettoriale

Il *prodotto vettoriale* tra vettori è l'applicazione

$$h\colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3, \quad h(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \text{se } \vec{u} \parallel \vec{v} \\ \vec{w} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\vec{w}$ ha direzione perpendicolare a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, verso tale che la terna $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sia equiversa a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, e modulo $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin \widehat{\vec{u}\vec{v}}$.

Proprietà:

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$, anticommutatività,
2. $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, omogeneità
3. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, distributività.

Se $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ è una base ortonormale, allora

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

2.8 Prodotto misto

Il *prodotto misto* di 3 vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_3$ è dato dal numero reale $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$. Considerata una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, si ha

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Esercizi.

- Provare che $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \mathcal{A}$, area del parallelogramma costruito sui vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- Provare che $|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \mathcal{V}$, volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

2.9 Esercizi di riepilogo

1. Rispetto ad una fissata base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, si considerino i vettori $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{w} = 3\vec{j} + \vec{k}$. Provare che $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ formano una base, e trovare le componenti di $\vec{x} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ rispetto a tale base.
2. Rispetto ad una fissata base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, si considerino i vettori $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = -3\vec{j}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Calcolare $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$, l'area del triangolo di lati $\vec{u}$ e $\vec{v}$, il volume del parallelepipedo di lati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
3. trovare la proiezione ortogonale del vettore $\vec{v} = (0, -3, 0)$ sul vettore $\vec{u} = (1, -2, 3)$.
4. Dati i vettori $\vec{a} = (1, -2, 0)$ e $\vec{b} = (3, -1, -1)$,

(a) Verificare che i vettori

$$\vec{u_1} = (2,1,0)\,, \qquad \vec{u_2} = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -2\right)\,,$$

sono perpendicolari ad $\vec{a}$.

(b) Si trovino i vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ perpendicolari a $\vec{b}$ le cui componenti ortogonali ad $\vec{a}$ siano rispettivamente $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$.

5. Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, i vettori $\vec{u} = (h, h-1, 2)$ e $\vec{v} = (5, h, 0)$ sono perpendicolari, e per quali valori sono paralleli.

6. Siano dati i vettori

$$\vec{u} = (2,1,3)\,, \quad \vec{v_1} = (0,-1,-1)\,, \quad \vec{v_2} = (1,0,2)\,, \quad \vec{w} = (1,1,1)\,.$$

Trovare la giacitura $\vec{a}$ individuata da $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ (cioè un vettore perpendicolare al piano individuato da $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$).

7. Si considerino i seguenti vettori

$$\vec{u} = \lambda\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\,, \quad \vec{v} = \vec{i} - \lambda\vec{j} + \vec{k}\,, \quad \vec{w} = -2\vec{i} + \mu\vec{k}\,,$$

dove $\lambda\,, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) Trovare per quali valori di $\lambda\,, \mu$ esistono vettori $\vec{x}$ tali che

$$\vec{u} \wedge \vec{x} + \vec{x} \wedge \vec{v} = \vec{w}\,.$$

(b) Determinare, quando possibile, le componenti di $\vec{x}$ per $\lambda = 1$.

8. trovare i vettori di modulo 3, perpendicolari ai vettori $\vec{u} = (1,1,4)$ e $\vec{v} = (1,-1,0)$.

3 Geometria analitica del piano

La Geometria Analitica, nata con Cartesio (intorno al 1637), ha lo scopo di tradurre un problema geometrico in uno analitico, cioè mediante l'uso delle coordinate tradurre un problema riguardante figure geometriche in un problema riguardante numeri ed equazioni. Ma è ancora più interessante l'inverso: interpretare geometricamente equazioni e loro sistemi. In tal modo la geometria e l'analisi si illuminano a vicenda ed è possibile passare dallo spazio dell'intuizione a spazi astratti.

3.1 Coordinate cartesiane nel piano

Un **riferimento ortonormale cartesiano** del piano è individuato da una base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ dei vettori del piano, e da un punto O scelto come origine del riferimento. Il riferimento si indica con $RC(O, x, y)$.

Sia P un punto del piano.

$$P(x, y) \Leftrightarrow \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Fissare un riferimento $RC(O, x, y)$ permette quindi di stabilire *corrispondenze biunivoche* tra i punti del piano, i vettori del piano e le coppie di $\mathbb{R}^2$.

Assi coordinati:

asse x: retta per O e parallela a $\vec{i}$. Ha equazione $y = 0$.

asse y: retta per O e parallela a $\vec{j}$. Ha equazione $x = 0$.

Dati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ del piano,

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

è il vettore posizione di P_2 rispetto a P_1. La *distanza* tra P_1 e P_2 è quindi data da:

$$d(P_1, P_2) = \|\vec{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Il *punto medio* del segmento $\overline{P_1P_2}$ è il punto M di coordinate

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2},\right).$$

3.2 Retta

Due punti P_1, P_2 non coincidenti individuano una retta r del piano:

$$P \in r \Leftrightarrow \vec{P_1P} \parallel \vec{P_1P_2}.$$

Posto $P_i(x_i, y_i)$, $P(x, y)$, il parallelismo si può esprimere in due modi:

Equazione cartesiana di una retta del piano.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante, si ha l'*equazione cartesiana della retta:*

$$r : ax + by + c = 0, \qquad (a, b) \neq (0, 0).$$

I parametri (a, b) rappresentano le coordinate di un vettore (non nullo) perpendicolare alla retta r. Di conseguenza, i parametri $(b, -a)$ rappresentano le coordinate di un vettore parallelo a r.

Equazioni parametriche di una retta del piano.

$$\vec{P_1P} = t\,\vec{P_1P_2}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1) = x_1 + lt \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) = y_1 + mt \end{cases}$$

che sono dette *equazioni parametriche della retta*. I parametri (l, m) sono le coordinate di un vettore parallelo ad r, e si dicono *parametri direttori* della retta. Eliminando il parametro t si perviene all'equazione cartesiana.

Esempio. Dati i punti $P_1(1, 0)$, $P_2(1, 1)$, troviamo le equazioni parametriche e cartesiana della retta. Si ha $\vec{P_1P_2} = (0, 1)$, dunque

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases},$$

da cui l'equazione cartesiana $x = 1$.

Mutue posizioni di due rette.

Siano r ed s due rette del piano. Volendo studiare la loro mutua posizione, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Risulta

$$\text{sistema incompatibile} \Leftrightarrow rg(A) \neq rg(\tilde{A}) \qquad \Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset,$$

$$\text{sistema compatibile} \Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A}) \qquad \Leftrightarrow r \cap r' \neq \emptyset.$$

Inoltre

$$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow 1 \text{ soluzione} \qquad \Leftrightarrow r \cap r' = \{P_0\},$$

$$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni} \qquad \Leftrightarrow r \equiv r'.$$

Ponendo

$$r \parallel r' \Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset \quad \text{oppure} \quad r \equiv r'$$

possiamo dire che

$$r \parallel r' \Leftrightarrow (b, -a) \sim (b', -a') \Leftrightarrow (a, b) \sim (a', b'),$$

dove '$\sim$' sta per 'è proporzionale a'.

Due rette r ed r' sono perpendicolari se e solo se tali sono i loro parametri direttori. Quindi:

$$r \perp r' \Leftrightarrow (l, m) \perp (l', m') \Leftrightarrow (l, m) \cdot (l', m') = 0 \Leftrightarrow (a, b) \cdot (a', b') = 0.$$

Esempi ed esercizi.

- Le rette $x - y = 1$ e $3x - 3y = 1$ sono parallele; le rette $x + 2z = 1$ e $3x + 6z = 3$ sono parallele e coincidenti.
- Le rette $x - 2y = 1$ e $4x + 2y = 1$ sono perpendicolari.

Angoli tra due rette.

Siano r ed r' due rette orientate e $\vec{r}$, $\vec{r'}$ due vettori concordemente orientati con r ed r'. Allora

$$\cos\widehat{rr'} = \cos\widehat{\vec{r}\vec{r'}} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} = \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2+m^2}\sqrt{l'^2+m'^2}}.$$

Se, invece, le due rette non sono orientate, l'angolo $\widehat{rr'}$ può assumere due valori tra loro supplementari:

$$\cos\widehat{rr'} = \pm\frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} = \pm\frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2+m^2}\sqrt{l'^2+m'^2}}.$$

Fasci di rette.

Siano r ed r' due rette. Se $r \cap r' = \{A\}$, si chiama *fascio di rette proprio* la totalità delle rette del piano passanti per A, che si dice *centro* del fascio proprio. Se $r \parallel r'$, la totalità delle rette del piano parallele ad r (o ad r') costituisce il *fascio di rette improprio* individuato dalla giacitura di α (e di α').

Se $r\colon ax + by + c = 0$ e $r'\colon a'x + b'y + c' = 0$ il fascio è rappresentato da

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0,$$

al variare dei parametri omogenei λ e μ, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Se $\lambda \neq 0$, ponendo $k = \mu/\lambda$, il fascio è rappresentato dall'equazione

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0,$$

che esplicita il fatto che le rette di un fascio sono ∞^1.

Si osservi che nell'equazione precedente, al variare di k in $\mathbb{R}$, la retta r' non è rappresentata; essa si può pensare ottenuta per $k = \pm\infty$.

Esempi ed esercizi.

- Scrivere il fascio di rette del piano, di centro $A(-1, 1)$.

Distanze.

Geometricamente, la distanza di un punto P da una retta r, è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su r. Per determinare H, si trova la retta per P e perpendicolare ad r e la si interseca con r.

In termini analitici, se $P(x_0, y_0)$ ed $r : ax + by + c = 0$, allora

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dati due punti distinti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, la *retta assiale del segmento AB* è il luogo dei punti del piano, equidistanti da A e B. La sua equazione (necessariamente di I grado) è

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

Distanza di due rette parallele r, r': è la distanza tra r ed un qualsiasi punto di r'.

3.3 Circonferenza

Chiamiamo *circonferenza* l'insieme dei punti P del piano tali che $\|\vec{CP}\| = R$, dove C è un punto fisso e R un numero reale positivo. Se $C(\alpha, \beta)$ e $P(x, y)$, da $\|\vec{CP}\| = R$ si ha

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

che dà l'equazione cartesiana di una circonferenza generica. Equivalentemente:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

dove $\delta = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$. Viceversa, ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza Σ di centro (α, β), dove $\alpha = -a$, $\beta = -b$, e di raggio $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. Si ha:

$$\begin{array}{lr} a^2 + b^2 - c > 0 & \text{circonferenza ordinaria,} \\ a^2 + b^2 - c = 0 & \text{circonferenza di raggio nullo,} \\ a^2 + b^2 - c < 0 & \text{circonferenza immaginaria.} \end{array}$$

Esempio:
Scrivere l'equazione della circonferenza che ha come punti diametralmente opposti $A(3, 0)$ e $B(1, 1)$.

3.4 Esempi ed esercizi.

1. Determinare le rette del piano che soddisfano le seguenti condizioni:
   (a) r : passante per $A(1, -2)$ e parallela al vettore $\vec{u} = (3, 2)$.
   (b) s : passante per $A(1, -2)$ e $B(2, 2)$.
   (c) t : passante per $A(1, -2)$ e perpendicolare al vettore $\vec{u} = (3, 2)$.
2. Trovare il punto A', simmetrico del punto $A(1, 1)$ rispetto alla retta $r : 2x + 4y + 1 = 0$. (Ripetere per $A(0, 0)$ ed $r : x - 3y + 2 = 0$).
3. Dati i punti $A(1, -1)$, $B(-2, 3)$ e la retta $r : x - y + 3 = 0$, trovare
   (a) i punti $P \in r$ tali che $d(A, P) = d(A, B)$,
   (b) il punto $Q \in r$ tali che $d(A, Q) = d(B, Q)$,
   (c) l'equazione dell'asse del segmento AB.
4. Data la retta $r : x - 3y + 2 = 0$, trovare i punti dell'asse delle x, aventi distanza 3 da r. (Ripetere per l'asse y).
5. Studiare la mutua posizione delle seguenti coppie di rette:
   (a) $r : x + y - 2 = 0$, $s : 2x - 1 = 0$,
   (b) $r : x + y - 2 = 0$, $s : 4x + 4y - 3 = 0$,
   (c) $r : 2x + ky + 1 = 0$, $s : x - y + 1 = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
6. Determinare gli angoli formati dalle seguenti coppie di rette:

(a) $r : x + 3y - 1 = 0$, $s : 2x + y + 5 = 0$,

(b) $r : x + y - 5 = 0$, $s : x = 1 - t, y = 2 + t$,

7. Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$:

   (a) di centro $A(2, 1)$ e raggio 2,

   (b) di centro $B(0, -2)$ e passante per $P(3, 1)$,

   (c) di centro $C(1, -3)$ e tangente ad $r : x - y + 3 = 0$,

   (d) di centro $E(1, 1)$, e secante la retta $s : x - y + 2 = 0$ in una corda di lunghezza 2.

8. Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$ tangente ad $r : x + y + 3 = 0$ in $A(1, -4)$, e passante per l'origine.

9. Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$, passante per $A(1, -1)$, $B(0, 2)$ e $D(-1, 3)$.

10. Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$, passante per $A(1, 2)$, $B(-1, -2)$ ed avente centro sulla retta $r : x = 2 + t, y = 1 - t$. Trovare poi la retta tangente a $\mathcal{C}$ in A, e le rette tangenti a $\mathcal{C}$ e passanti per il punto $D(10, 0)$.

3.5 Esercizi di riepilogo.

1. Determinare le equazioni delle bisettrici delle rette

$$r : x - 1 = 0\,, \qquad s : x + 2y - 1 = 0\,.$$

   Suggerimento: si ricordi che se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ sono i *versori* associati alle rette, allora $\vec{r} + \vec{s}$ e $\vec{r} - \vec{s}$ danno le direzioni delle bisettrici.

2. Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per l'origine O ed è tangente nel punto $P(1, 2)$ alla retta

$$r : \; x - y + 1 = 0\,.$$

4 Coniche

4.1 Il piano euclideo ampliato e complessificato

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ delle terne non nulle di numeri reali. Su $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, la relazione $\sim$ (*proporzionalità*), definita da

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} - \{0\} : (y_1, y_2, y_3) = (tx_1, tx_2, tx_3)$$

è una relazione di equivalenza; l'insieme quoziente

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}}{\sim}$$

si chiama *piano proiettivo (numerico reale).*
L'applicazione $p : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, che ad ogni terna ordinata $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ associa la sua classe di equivalenza, si chiama *suriezione canonica.*

Sia $\sum$ l'insieme delle rette del piano euclideo Π. La relazione di *parallelismo* $\mathcal{P}$:

$$r\mathcal{P}s \Longleftrightarrow r||s$$

è una relazione d'equivalenza su $\sum$. Rette parallele hanno la stessa direzione. L'insieme quoziente

$$i_\infty = \frac{\sum}{\mathcal{P}}$$

si chiama insieme delle *direzioni* del piano euclideo Π.

Definizione 4.1 Si chiama *piano euclideo ampliato* l'insieme $\bar{\Pi} = \Pi \cup i_\infty$, in cui si aggiungono ai punto del piano euclideo Π, le direzioni delle rette del piano stesso.

Il legame tra il piano proiettivo ed il piano euclideo ampliato con le direzioni, è chiarito dal seguente

Teorema 4.2 *Esiste una corrispondenza biunivoca tra* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ *e* $\bar{\Pi} = \Pi \cup i_\infty$.

Dim. Sia $\mathcal{R}(O, x, y)$ un riferimento affine su Π. Si consideri l'applicazione:

$$k : \Pi \cup i_\infty \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),$$

definita da

$$\begin{array}{ll} \forall\ P(x,y) \in \Pi : & k(P) = p(x,y,1), \\ \forall\ R_\infty \in i_\infty : & k(R_\infty) = p(b,-a,0), \end{array}$$

dove $r : ax + by + c = 0$ è una retta che rappresenta la direzione R_∞ (si osservi che $l = b$ e $m = -a$ sono parametri direttori della retta r).

Si prova facilmente che k è una corrispondenza biunivoca. Infatti, sia $p(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Se $x_3 \neq 0$, si considera il punto $P(x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}) \in \Pi$, e si ha:

$$k(P) = p(x, y, 1) = p(x_1, x_2, x_3).$$

Se invece $x_3 = 0$, si considera la retta $r : ax + by + c = 0$ con $a = -x_2$ e $b = x_1$. La direzione R_∞ di r soddisfa:

$$k(R_\infty) = p(-b, a, 0) = p(x_1, x_2, x_3).$$

Quindi, k è suriettiva.
Per dimostrare che k è iniettiva, si osserva dapprima che se due elementi di $\Pi \cup i_\infty$ hanno la stessa immagine tramite k, allora essi sono o entrambi punti del piano euclideo, oppure entrambi direzioni.

Se $P(x, y)$ e $Q(x', y')$ sono due punti di Π tali che $k(P) = k(Q)$, (ossia, $p(x, y, 1) = p(x', y', 1)$), allora esiste $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $x' = tx, y' = ty, 1 = t$, per cui $(x, y) = (x', y')$ e quindi $P = Q$.

Se R_∞ ed S_∞ sono direzioni, definite rispettivamente dalle rette $r : ax + by + c = 0$ ed $s : a'x + b'y + c' = 0$, tali che $k(R_\infty) = k(S_\infty)$, allora si ha $p(b, -a, 0) = p(b', -a', 0)$. Quindi, esiste $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, tale che $b' = tb$ e $a' = ta$. Ma allora $r||s$, e quindi $R_\infty = S_\infty$. $\square$

L'applicazione k definita nel precedente teorema si chiama *sistema di coordinate omogenee* associato al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$.

Se $P \in \Pi \cup i_\infty$ e $k(P) = p(x_1, x_2, x_3)$, la terna ordinata (x_1, x_2, x_3) si chiama *terna delle coordinate omogenee* di P; si osservi che (tx_1, tx_2, tx_3), per ogni $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, è ancora terna di coordinate omogenee di P.

Se P è un punto del piano euclideo Π, allora le sue coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) hanno $x_3 \neq 0$; le coordinate cartesiane di P sono $(x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3})$. Se P è una direzione, per le coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) di P si ha sempre $x_3 = 0$.

Le *rette* del piano euclideo ampliato $\bar{\Pi}$ sono i_∞ ed i sottoinsiemi del tipo $r \cup R_\infty$ (r = retta del piano euclideo, R_∞ direzione definita dalla retta r). La retta i_∞ si chiama *retta impropria*, una retta del tipo $r \cup R_\infty$ si chiama *retta propria* e si indica semplicemente con r (sottintendendo l'ampliamento con il suo punto improprio).

Fissato su $\bar{\Pi}$ un sistema di coordinate omogenee:

$$k : \bar{\Pi} = \Pi \cup i_\infty \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

associato ad un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$, si può ottenere una *rappresentazione analitica delle rette* di $\bar{\Pi}$ nel modo seguente:

- La retta impropria i_∞ è rappresentata dall'equazione $x_3 = 0$. Infatti, tutti i punti impropri hanno coordinate omogenee del tipo $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$, che soddisfano ovviamente l'equazione $x_3 = 0$. Viceversa, ogni soluzione non banale $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ dell'equazione $x_3 = 0$ è terna di coordinate omogenee di un punto improprio.

- La retta propria $r \cup R_\infty$, di equazione cartesiana $r : ax + by + c = 0$, è rappresentata dall'equazione lineare omogenea:

  $$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \qquad (a, b) \neq (0, 0). \tag{4.1}$$

  Infatti, tale equazione è soddisfatta dalle coordinate omogenee $(b, -a, 0)$ di R_∞, e dalle coordinate omogenee $(\bar{x}, \bar{y}, 1)$ dei punti propri $P(\bar{x}, \bar{y}) \in r$. Viceversa, ogni soluzione $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \neq (0, 0, 0)$ dell'equazione (4.1) è una terna di coordinate omogenee o di un punto $P \in r$ oppure di R_∞.

L'equazione (4.1) si chiama *equazione in coordinate omogenee* della retta r.

Si osservi che $t(ax_1 + bx_2 + cx_3) = 0$, con $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, è ancora equazione in coordinate omogenee della retta r.

Dalla precedente descrizione si ottiene facilmente la seguente

Proposizione 4.3 *Rispetto ad un fissato sistema di coordinate omogenee, una retta del piano euclideo ampliato* Π *è il luogo dei punti* P*, le cui coordinate omogenee* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \neq (0, 0, 0)$ *sono tutte e sole le soluzioni di un'equazione omogenea di primo grado:*

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Vale inoltre la seguente

Proposizione 4.4 *Due rette distinte del piano euclideo ampliato hanno esattamente un punto in comune.*

Dim. Siano r ed s due rette distinte di $\bar{\Pi}$, di equazioni rispettivamente $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ ed $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0$, rispetto ad un sistema di coordinate omogenee k. Essendo le rette distinte, la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Allora, il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0 \end{cases}$$

ammette ∞^1 soluzioni diverse da quella banale. Se $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è una di queste soluzioni, tutte le altre sono del tipo $(t\bar{x}_1, t\bar{x}_2, t\bar{x}_3)$, con $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Di conseguenza, il punto $P \in \overline{\Pi}$, di coordinate omogenee $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è un punto sia di r che di s, ed è unico (l'unico punto di coordinate omogenee $(t\bar{x}_1, t\bar{x}_2, t\bar{x}_3), t \neq 0$). $\square$

Complessificazione del piano euclideo ampliato.
Sia $\mathcal{R}(O, x, y)$ un riferimento affine sul piano euclideo Π. Il piano euclideo Π si dice *complessificato*, e si indica con $\Pi^{\mathbb{C}}$, quando il campo di variabilità delle coordinate cartesiane è il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Un punto $P(x, y)$, con $x, y \in \mathbb{C}$, si dice *punto complesso.* Il *punto coniugato* di $P(x, y)$ è il punto $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. I punti di Π, o *punti reali*, sono i punti per cui $P = \bar{P}$.

Le rette di $\Pi^{\mathbb{C}}$ si definiscono nel modo seguente:
una retta complessa è il luogo dei punti di $\Pi^{\mathbb{C}}$, le cui coordinate omogenee complesse sono le soluzioni (in $\mathbb{C}^2$) di un'equazione algebrica del tipo $ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$ ed $(a, b) \neq (0, 0)$.
Quando $a, b, c \in \mathbb{R}$, la retta complessa si chiama *retta reale* di $\Pi^{\mathbb{C}}$.
Ad esempio:

-) la retta r di equazione: $(1 + 2i)x + 3y + 1 = 0$ è una retta complessa; come si può notare, essa ha sia punti reali (ad esempio, $P(0, -\frac{1}{3})$) che punti complessi (ad esempio, $Q(-\frac{1}{1+2i}, 0)$);

-) la retta $r : x - y + 1 = 0$ è una retta reale; essa ha sia punti reali (ad esempio $P(1, 2)$), che punti complessi (ad esempio, $Q(i, i + 1)$);

-) la retta $r : x - 1 - 2i = 0$ è una retta complessa, priva di punti reali; infatti i suoi punti sono tutti del tipo $P(2i + 1, y)$.

Sia $r : ax + by + c = 0$ una retta di $\Pi^{\mathbb{C}}$; la *retta complessa coniugata* di r è la retta $\bar{r}$ di $\Pi^{\mathbb{C}}$ di equazione $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$, dove $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sono rispettivamente i numeri complessi coniugati di a, b, c. Ovviamente, r è reale se e solo se $r = \bar{r}$, e quindi se $P \in r$ anche il complesso coniugato di P appartiene ad r.
Si osservi che $r \cap \bar{r} = \{1 \textit{ punto reale}\}$ oppure $r \cap \bar{r} = \emptyset$.

Due rette $r : ax + by + c = 0$ ed $s : a'x + b'y + c' = 0$ di $\Pi^{\mathbb{C}}$ si dicono *parallele* se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ (con la solita convenzione che se uno dei denominatori è 0, allora è 0 anche il corrispondente numeratore).

Anche l'estensione complessa $\Pi^{\mathbb{C}}$ del piano euclideo Π si può ampliare con i punti impropri, considerando l'insieme $\sum^{\mathbb{C}}$ delle rette di $\Pi^{\mathbb{C}}$ con la relazione di parallelismo $\mathcal{P}$. L'insieme quoziente

$$i_\infty = \frac{\sum^{\mathbb{C}}}{\mathcal{P}}$$

si chiama *insieme delle direzioni* di $\Pi^{\mathbb{C}}$.

In modo analogo al caso reale si definisce il *piano proiettivo complesso*, considerando nell'insieme $\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$ la relazione di equivalenza $\sim$:

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{C} - \{0\} : (y_1, y_2, y_3) = (tx_1, tx_2, tx_3).$$

L'insieme quoziente:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}}{\sim}$$

si chiama *piano numerico proiettivo complesso.*

Fissato sul piano euclideo Π un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$, si consideri l'applicazione

$$k : \overline{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

così definita: se $P(x, y) \in \Pi^{\mathbb{C}}$, si pone $k(P) = p(x, y, 1)$; se $R_\infty \in i_\infty$ è la direzione definita da una retta $r : ax + by + c = 0$, allora $k(R_\infty) = p(b, -a, 0)$. Allora, k (detta *sistema di coordinate omogenee*) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ e $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

L'insieme $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ prende il nome di *estensione complessa del piano euclideo ampliato con i punti impropri.*

Le *rette* di $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ sono i_∞ e tutti i sottoinsiemi di $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ del tipo $r \cup R_\infty$, dove r è una retta del piano euclideo complessificato $\Pi^{\mathbb{C}}$ ed R_∞ il suo punto improprio.

Rispetto ad un sistema di coordinate omogenee k assegnato, le rette di $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ sono rappresentate da equazioni lineari omogenee del tipo $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

La retta impropria i_∞ ha equazione $x_3 = 0$. Ogni altra retta propria $r \cup R_\infty$, con $r : ax + by + c = 0$ (equazione cartesiana di r rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ associato a k), ha equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$; l'equazione $ax + by + c = 0$ si chiama anche equazione della retta $r \cup R_\infty$ in coordinate non omogenee.

Particolare interesse rivestono i punti impropri $I_\infty(1, i, 0)$ e $J_\infty(1, -i, 0)$, detti *punti ciclici*; una retta propria passante per un punto ciclico si chiama *retta isotropa.*

Fissato un punto proprio P_0, vi sono due rette isotrope passanti per esso; se (x_0, y_0) sono le coordinate non omogenee di P_0 allora le rette isotrope per P_0 hanno equazione (non omogenea):

$$y - y_0 = \pm i(x - x_0).$$

Come si può notare, sono rette complesse coniugate di coefficiente angolare $\pm i$.

4.2 Definizione e classificazione proiettiva

In questo e nei paragrafi successivi, l'ambiente in cui si considera una conicaè l'estensione complessa $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ del piano euclideo ampliato con i punti impropri, su cui è fissato un sistema di coordinate proiettive omogenee (x_1, x_2, x_3), indotto da un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ (in particolare, cartesiano ortogonale quando intervengono questioni metriche).

Si dice *conica* l'insieme $\mathcal{C}$ dei punti del piano $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}}$, le cui coordinate omogenee sono soluzioni di un'equazione omogenea di secondo grado, ossia del tipo:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \tag{4.2}$$

dove a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ sono numeri reali non tutti nulli. L'equazione precedente si chiama *equazione della conica* $\mathcal{C}$ rispetto al sistema di coordinate omogenee fissato.

Posto $a_{ij} = a_{ji}$, per ogni $i, j = 1, 2, 3$, l'equazione (4.2) si scrive nella forma compatta

$$\mathcal{C} : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0.$$

Posto $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$, dalla (4.2) si ottiene l'equazione di $\mathcal{C}$ in coordinate non omogenee:

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{4.3}$$

detta *equazione cartesiana* di $\mathcal{C}$ rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ fissato. La matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

si chiama *matrice (dell'equazione) della conica* $\mathcal{C}$.

La conica $\mathcal{C}$, rappresentata dall'equazione (4.3), si dice *generale* (o *non degenere*) se il polinomio che ne determina l'equazione è irriducibile (nel campo dei numeri reali), si dice *degenere* se tale polinomio è decomponibile nel prodotto di due polinomi di primo grado. In particolare, $\mathcal{C}$ è *semplicemente degenere* se tali polinomi sono distinti, *doppiamente degenere* se tali polinomi coincidono.

La suddivisione delle coniche in generali, semplicemente degeneri e doppiamente degeneri costituisce la *classificazione proiettiva* delle coniche, in quanto tale classificazione è invariante per trasformazioni proiettive. In particolare, è anche invariante per cambiamenti di riferimento cartesiani.

Esempi: $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$ è generale, $\mathcal{C}_2 : x^2 - 2xy = 0$ è semplicemente degenere, $\mathcal{C}_3 : x^2 + y^2 - 2xy = 0$ è doppiamente degenere.

Osservazione: L'equazione (4.3) dipende da 5 parametri essenziali, quindi per determinare una conica occorrono 5 condizioni tra loro indipendenti.

Vale il seguente

Teorema: Data la conica $\mathcal{C}$, di equazione (4.3), risulta:

- $\mathcal{C}$ è generale $\iff rg(A) = 3 \iff \mathcal{C}$ non contiene rette,
- $\mathcal{C}$ è semplicemente degenere $\iff rg(A) = 2 \iff \mathcal{C}$ è formata da due rette distinte,
- $\mathcal{C}$ è doppiamente degenere $\iff rg(A) = 1 \iff \mathcal{C}$ è formata da due rette coincidenti.

Si può dimostrare che le matrici $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ ed $A' = (a'_{hk})_{1 \le h,k \le 3}$, che rappresentano $\mathcal{C}$ rispetto a diversi sistemi do coordinate omogenee, hanno lo stesso rango. Quindi, tale rango è invariante per cambiamenti di riferimento. Perciò, si dice che $rg(A)$ è un invariante della conica, e si chiama *rango della conica.*

4.3 Posizioni di una retta rispetto ad una conica

Siano $\mathcal{C} : \sum a_{ij} x_i x_j = 0$ una conica *generale* ed $r : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ una retta del piano. La retta r può assumere tre posizioni rispetto a $\mathcal{C}$:

r è *secante* se $r \cap \mathcal{C}$ contiene due punti reali e distinti.

r è *tangente* se $r \cap \mathcal{C}$ contiene due punti reali e coincidenti.

r è *esterna* se $r \cap \mathcal{C}$ contiene due punti complessi coniugati.

Le intersezioni di $\mathcal{C}$ con r corrispondono alle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a_{ij}x_ix_j = 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Consideriamo separatamente i casi della retta impropria i_∞ e di una retta propria.

Caso I: intersezioni con la retta impropria (Classificazione Affine).
Se $r = i_\infty : x_3 = 0$ è la retta impropria, allora il sistema (4.4) diventa

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Indichiamo con Δ il discriminante dell'equazione di II grado contenuta in (4.5). Posto

$$D_{33} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\Delta,$$

risulta che D_{33} è un'invariante *affine* della conica (cioè, non dipende dal sistema di riferimento affine). Si hanno le seguenti tre possibilità:

- $D_{33} > 0 \iff i_\infty \cap \mathcal{C}$=\{*due punti complessi coniugati*\}.
- $D_{33} < 0 \iff i_\infty \cap \mathcal{C}$=\{*due punti reali e distinti*\}.
- $D_{33} = 0 \iff i_\infty \cap \mathcal{C}$=\{*due punti reali e coincidenti*\}.

Definizione 4.5 Se $D_{33} > 0$ la conica $\mathcal{C}$ si chiama *ellisse; se $D_{33} < 0$, $\mathcal{C}$ si chiama* iperbole; se $D_{33} = 0$, $\mathcal{C}$ si chiama *parabola.*

La suddivisione delle coniche generali in ellissi, parabole ed iperboli, sulla base dei punti all'infinito, prende il nome di *classificazione affine*, ed è invariante per cambiamenti di riferimento affini (in particolare, anche ortonormali, ma NON per cambiamenti di riferimento proiettivi).

Una *circonferenza* è una ellisse con $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$.

Siano $\mathcal{C}$ un'iperbole, e $R_\infty(l, m, 0), S_\infty(l', m', 0)$ i punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con la retta impropria. Le direzioni definite da R_∞ ed S_∞ si dicono *direzioni asintotiche* dell'iperbole $\mathcal{C}$.

Se il riferimento $\mathcal{R}(O, x, y)$ è ortonormale, si può dimostrare che vale:

$$ll' + mm' = 0 \qquad \iff \qquad a_{11} + a_{22} = 0.$$

Quindi, le direzioni asintotiche dell'iperbole sono perpendicolari se e solo se $T := a_{11} + a_{22} = 0$. In questo caso, si dice che $\mathcal{C}$ è un' *iperbole equilatera.* Si può dimostrare che $T = a_{11} + a_{22}$ è un invariante (metrico) della conica.

Caso II: intersezioni con una retta propria.
Sia r la retta propria di equazioni parametriche $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$. In coordinate non omogenee (x, y), il sistema (4.4) si scrive :

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ a_{11}(x_0 + lt)^2 + a_{22}(y_0 + mt)^2 + 2a_{12}(x_0 + lt)(y_0 + mt) + 2a_{13}(x_0 + lt) + 2a_{23}(y_0 + mt) + a_{33} = 0 \end{cases}$$

Posto

$$\begin{aligned}\alpha &= a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2\\ \beta &= (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})l + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})m\\ \gamma &= a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33},\end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{cases} x = x_0 + lt,\\ y = y_0 + mt,\\ \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0.\end{cases}$$

Se $\alpha = 0$, il punto improprio $R_\infty(l, m, 0)$ della retta r appartiene alla conica $\mathcal{C}$, e l'altro punto d'intersezione di r con $\mathcal{C}$ si ottiene per t soluzione dell'equazione $2\beta t + \gamma = 0$.
Se $\alpha \neq 0$, l'equazione $\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0$ ammette due soluzioni, in corrispondenza delle quali si hanno i due punti di intersezione di r con la conica $\mathcal{C}$.
Mantenendo le notazioni precedenti, sia $P_0(x_0, y_0) \in r \cap \mathcal{C}$ (equivalentemente, $\gamma = 0$). Se P_0 è l'unico punto di intersezione di r con $\mathcal{C}$ (cioè, r è tangente in P_0 alla conica) allora tale condizione si traduce analiticamente imponendo $\beta = 0$; tenendo conto dell'espressione di β, deve esistere $\varrho \neq 0$, tale che

$$-(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) = \varrho l, \qquad (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) = \varrho m.$$

Si ottiene così l'equazione di t_{P_0}, la *retta tangente* in $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ alla conica $\mathcal{C}$:

$$t_{P_0} : (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0.$$

Nell'equazione precedente, i coefficienti di x e di y non sono contemporaneamente nulli. Infatti, se fosse $(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) = (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) = 0$ allora si avrebbe anche $a_{11}x_0^2 + a_{12}x_0y_0 + a_{13}x_0 = 0$ e $a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + a_{23}y_0 = 0$ che, insieme alla condizione $\gamma = 0$, implicano $a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0$. Quindi, (x_0, y_0) sarebbe soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,\\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0,\\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0,\end{cases}$$

che è incompatibile, perché le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\\ a_{13} & a_{23}\end{pmatrix}$$

hanno rango diverso ($rg(A) = 3$, essendo $\mathcal{C}$ generale).

4.4 Polarità definita da una conica

Sia $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale. Due punti $P(x_1, x_2, x_3)$ e $Q(x_1', x_2', x_3')$ del piano ampliato si dicono *coniugati rispetto a* $\mathcal{C}$ se le loro coordinate omogenee verificano la relazione

$$\sum a_{ij}x_ix_j' = 0.$$

Essendo tale relazione simmetrica rispetto a x_i ed x_i', si ha che P è coniugato a Q se e solo se Q è coniugato a P. Inoltre, si osservi che P è *autoconiugato* se e solo se $P \in \mathcal{C}$.

Fissato $P_0(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ un punto del piano, il luogo dei punti coniugati a P_0 ha equazione

$$\sum a_{ij}x_i^ox_j = 0,$$

ovvero:

$$\begin{pmatrix} x_1^o & x_2^o & x_3^o \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

dove A è la matrice associata alla conica $\mathcal{C}$. Si noti che tale equazione rappresenta sempre una retta. Infatti, si ponga

$$u_1 = a_{11}x_1^o + a_{12}x_2^o + a_{13}x_3^o, \quad u_2 = a_{12}x_1^o + a_{22}x_2^o + a_{23}x_3^o, \quad u_3 = a_{13}x_1^o + a_{23}x_2^o + a_{33}x_3^o.$$

Essendo $(x_1^o, x_2^o, x_3^o) \neq (0,0,0)$ e $rg(A) = 3$, si conclude facilmente che $(u_1, u_2, u_3) \neq (0,0,0)$. La retta

$$p_{P_0} : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

si chiama *retta polare* di P_0 rispetto alla conica $\mathcal{C}$. P_0 si chiama *polo* della retta p_{P_0}.

Si osservi che quando $P_0 \in \mathcal{C}$, la retta polare p_{P_0} coincide con la retta t, tangente in P_0 alla conica. Più precisamente:

$$P_0 \in \mathcal{C} \iff p_{P_0} = t.$$

Valgono i seguenti importanti risultati.

Teorema 4.6 *Data una conica generale $\mathcal{C}$, l'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Pi}^{\mathbb{C}} & \rightarrow & \sum^{\mathbb{C}} \cup i_\infty \\ P & \mapsto & p_P \end{array}$$

è una corrispondenza biunivoca, detta ***polarità definita dalla conica*** *$\mathcal{C}$.*

Dim. Abbiamo già illustrato come, a partire da un arbitrario punto P_0 del piano (euclideo ampliato complessificato), si determina univocamente la sua retta polare rispetto a $\mathcal{C}$. Pertanto, ci basta provare che, per ogni retta r del piano stesso, esiste uno ed un solo punto P_0 tale che $p_{P_0} = r$. Sia $r : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ una arbitraria retta. Consideriamo il sistema lineare

$$(4.6) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = u_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = u_2, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = u_3 \end{cases}$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3 (non omogeneo, in quanto $(u_1, u_2, u_3) \neq (0,0,0)$). La matrice del sistema è quella della conica $\mathcal{C}$, quindi ha rango 3. Quindi, il sistema è di Cramer, per cui ammette una ed una sola soluzione $(x_1^o, x_2^o, x_3^o) \neq (0,0,0)$.

Considerato il punto $P_0((x_1^o, x_2^o, x_3^o)$, dalla definizione di retta polare risulta ovviamente $r = p_{P_0}$. D'altra parte, P_0 è unico, per l'unicità della soluzione (x_1^o, x_2^o, x_3^o) del sistema (4.6). $\square$

Teorema 4.7 (teorema di reciprocità) *Siano $\mathcal{C}$ una conica generale, P e Q due punti del piano, p_P e p_Q le rette polari di P e Q rispetto a $\mathcal{C}$. Allora, si ha:*

$$(4.7) \qquad P \in p_Q \iff Q \in p_P.$$

Dim. Sia $\mathcal{C} : a_{ij}x_ix_j = 0$ e siano $P(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ e $Q(y_1^o, y_2^o, y_3^o)$ due punti del piano. L'equazione della polare di Q è $\sum_i(\sum_j a_{ij} \overset{o}{y}_j)x_i = 0$. Pertanto:

$$P \in p_Q \iff \sum_i(\sum_j a_{ij}y_j^o)x_i^o = 0 \iff \sum_j(\sum_i a_{ij}x_i^o)y_j^o = 0 \iff Q \in p_P \quad \square$$

Definizione 4.8 Le rette p_Q e p_P per cui vale la (4.7), si dicono *rette coniugate* rispetto alla conica $\mathcal{C}$.

I seguenti risultati sono conseguenze del teorema di reciprocità.

Corollario 4.9 *Siano $\mathcal{C}$ una conica generale e r una retta del piano. Al variare di P su r, la polare p_P descrive un fascio di rette di centro il polo di r.*

Dim. Sia $r = p_{P_0}$. Allora, per il teorema di reciprocità, si ha

$$P \in r = p_{P_0} \iff P_0 \in p_P \iff p_P \in \mathcal{F}(P_0),$$

dove $\mathcal{F}(P_0)$ indica il fascio di rette di centro P_0, da cui la tesi. $\square$

Corollario 4.10 *Siano $\mathcal{C}$ una conica generale e $P_0 \notin \mathcal{C}$. Allora si ha:*

(i) Se $\{T_1, T_2\} = p_{P_0} \cap \mathcal{C}$ allora le rette P_0T_1 e P_0T_2 sono tangenti alla conica $\mathcal{C}$ rispettivamente in T_1 e T_2.

(ii) Se $t_1 = P_0T_1$ è tangente in T_1 a $\mathcal{C}$ e $t_2 = P_0T_2$ è tangente in T_2 a $\mathcal{C}$, allora $p_{P_0} = T_1T_2$.

Dim. *(i)*: Poiché $T_1, T_2 \in \mathcal{C}$, si ha $p_{T_1} = t_1$, tangente in T_1 a $\mathcal{C}$, e $p_{T_2} = t_2$, tangente in T_2 a $\mathcal{C}$. Allora, per il teorema di reciprocità, si ha anche:

$$\begin{array}{l} T_1 \in p_{P_0} \Rightarrow P_0 \in p_{T_1} = t_1 \\ T_2 \in p_{P_0} \Rightarrow P_0 \in p_{T_2} = t_2, \end{array}$$

da cui si ottiene $t_1 = P_0T_1$ e $t_2 = P_0T_2$.

(ii): Per il teorema di reciprocità si ha:

$$\begin{array}{l} P_0 \in t_1 = p_{T_1} \Rightarrow T_1 \in p_{P_0} \\ P_0 \in t_2 = p_{T_2} \Rightarrow T_2 \in p_{P_0}. \end{array}$$

Quindi, p_{P_0} è la retta congiungente i punti T_1 e T_2 (si osservi che $T_1 \neq T_2$, perché $P_0 \notin \mathcal{C}$). $\square$

Data una conica generale $\mathcal{C}$, un punto $P \notin \mathcal{C}$ del piano si dice
- *esterno* a $\mathcal{C}$ se le tangenti condotte da P alla conica sono reali e distinte;
- *interno* a $\mathcal{C}$ se le tangenti condotte da P alla conica sono complesse coniugate.

Per costruire la polare di un punto P rispetto ad una conica $\mathcal{C}$ si procede nel modo seguente.
-) Se P è esterno alla conica $\mathcal{C}$, si mandano da P le tangenti alla conica. Detti T_1 e T_2 i punti di contatto, la polare di P è la retta congiungente i punti T_1 e T_2.
-) Se P è interno alla conica, si considerano due rette distinte r ed s passanti per P. Si si costruisce il polo R della retta r ed il polo S della retta s, e la polare di P è la retta passante per i punti R ed S.

4.5 Centro e diametri di una conica.

Sia $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale. Si chiama *centro* di $\mathcal{C}$ *il polo della retta impropria.*

La parabola, essendo tangente alla retta impropria, ha come centro un punto improprio, invece l'ellisse e l'iperbole hanno centro proprio. Per questo motivo, la parabola è detta conica *senza centro*, l'ellisse e l'iperbole *coniche a centro*.

Nel caso dell'ellisse o dell'iperbole, il centro si determina nel seguente modo: si considerano i punti impropri $X_\infty(1,0,0)$ dell'asse delle x e $Y_\infty(0,1,0)$ dell'asse delle y, del riferimento affine $\mathcal{R}(O,x,y)$ prefissato, e si scrivono le equazioni delle rispettive polari:

$$\left\{\begin{array}{l} p_{X_\infty} : a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ p_{Y_\infty} : a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{array}\right. \tag{4.8}$$

Poichè $X_\infty \in i_\infty = p_C$ e $Y_\infty \in i_\infty = p_C$, per il teorema di reciprocità si ha che $C \in p_{X_\infty}$ e $C \in p_{Y_\infty}$, ossia $\{C\} = p_{X_\infty} \cap p_{Y_\infty}$. Quindi, *le coordinate di C sono la soluzione del sistema* (4.8).
(Tale sistema è sicuramente compatibile poiché, essendo la conica generale $\mathcal{C}$ una ellisse o una iperbole, risulta $D_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$).

Sia $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale. Si chiama *diametro* di $\mathcal{C}$ ogni retta propria passante per il centro. Da tale definizione scaturisce subito la seguente

Proposizione 4.11 *Siano $\mathcal{C}$ una conica generale e d una retta propria. Allora:*

$$d \text{ è diametro} \iff \text{il polo di } d \text{ è un punto improprio.}$$

Dim. Sia Q il polo del diametro d, cioè $d = p_Q$. Allora:

$$C \in d = p_Q \quad \Leftrightarrow \quad Q \in p_C = i_\infty \quad \Leftrightarrow \quad Q \text{ è punto improprio.} \quad \square$$

Il polo di un diametro d, essendo un punto all'infinito, definisce una direzione, detta *direzione coniugata* a d.

In una parabola, poiché il suo centro è un punto improprio, tutti i diametri sono paralleli.

Proposizione 4.12 *Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro. Se d e d' sono diametri coniugati rispetto a $\mathcal{C}$, allora ogni corda parallela a d è bisecata da d' (cioè incontra d' nel suo punto medio). In particolare, il centro C di $\mathcal{C}$ è centro di simmetria della conica.*

Dim. Siano P_1 e P_2 due punti della conica e d il diametro della conica parallelo alla corda $\overline{P_1P_2}$. Indicati con $D_\infty(l,m,0)$ il punto improprio di d, con d' il diametro coniugato di d e con $M(x_0,y_0)$ il punto medio della corda $\overline{P_1P_2}$, la retta r passante per M e parallela a d ha equazioni

$$r \left\{\begin{array}{l} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{array}\right.$$

Denotati con t_1 e t_2 i valori del parametro corrispondenti rispettivamente ai punti P_1 e P_2, il punto M, che si ottiene per $t = 0$, corrisponde anche al valore del parametro $t = \frac{t_1+t_2}{2}$, e quindi si ha $t_1 + t_2 = 0$. Ma t_1, t_2 sono le soluzioni dell'equazione

$$\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0,$$

con α, β, γ definiti come in (4.3). Quindi, $\frac{t_1+t_2}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}$, da cui $\beta = 0$. Ma $\beta = 0$ equivale a dire che $M(x_0,y_0) \in p_{D_\infty} = d'$.

Se $P \in \mathcal{C}$ e d è il diametro per P, indicata con P' l'ulteriore intersezione di d con $\mathcal{C}$, per quanto visto prima, il centro C è punto medio di $\overline{PP'}$, ossia C è centro di simmetria della conica. $\square$

Si chiamano *asintoti* di una iperbole $\mathcal{C}$ i diametri passanti per i punti impropri di $\mathcal{C}$.

Proposizione 4.13 *Siano $\mathcal{C}$ un'iperbole, R_∞ ed S_∞ punti impropri di $\mathcal{C}$, r ed s due rette aventi direzioni rispettivamente R_∞ ed S_∞. Allora:*

r ed s sono asintoti $\iff$ r ed s sono tangenti a $\mathcal{C}$ nei suoi punti impropri.

Dim. Se r ed s sono asintoti, allora passano per il centro C della conica, per cui $\{C\} = r \cap s$. Essendo $p_C = i_\infty$ e $p_C \cap \mathcal{C} = \{R_\infty, S_\infty\}$, per la *(i)* del Corollario (4.10) si ha che r ed s sono tangenti alla conica $\mathcal{C}$ rispettivamente in R_∞ ed S_∞.

Viceversa, siano $r = p_{R_\infty} = t_1$ tangente in R_∞ a $\mathcal{C}$ e $s = p_{S_\infty} = t_2$ tangente in S_∞ a $\mathcal{C}$. Per la *(ii)* del Corollario (4.10), si ha che $i_\infty = R_\infty S_\infty = p_{r\cap s}$ e quindi $r \cap s = \{C\}$, centro della conica. Si conclude che r ed s sono diametri e, poiché passano per i punti impropri di $\mathcal{C}$, sono asintoti. $\square$

Per determinare le *equazioni degli asintoti* di una iperbole $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$, si trovano i punti R_∞ ed S_∞ di intersezione della conica $\mathcal{C}$ con la retta impropria i_∞. Le loro coordinate sono soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Equivalentemente, i parametri direttori degli asintoti sono le soluzioni dell'equazione omogenea:

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0. \tag{4.9}$$

Esempio: si vogliono trovare gli asintoti dell'iperbole $\mathcal{C} : x^2 - 4y^2 + x - y + 1 = 0$. L'equazione (4.9) si scrive

$$l^2 - 4m^2 = 0,$$

le cui soluzioni $(-2, 1)$ e $(2, 1)$ sono i parametri direttori degli asintoti. Per trovare le coordinate del centro, si risolve il sistema (4.8) che in questo caso dà

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} = 0, \\ 4y + \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Quindi, il centro è $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$, e gli asintoti a_1 e a_2 hanno equazioni

$$a_1 : \frac{x+\frac{1}{2}}{-2} = \frac{y+\frac{1}{8}}{1}, \qquad a_2 : \frac{x+\frac{1}{2}}{2} = \frac{y+\frac{1}{8}}{1}.$$

4.6 Assi di una conica.

Fissato un riferimento ortonormale $\mathcal{R}(O, x, y)$, sia $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale. Un diametro d di $\mathcal{C}$ si dice *asse* se è perpendicolare alla sua direzione coniugata. Si può provare che gli assi sono di una conica sono i suoi assi di simmetria.
Per determinare gli assi di una conica distinguiamo i seguenti casi:

Caso I: $\mathcal{C}$ è una ELLISSE o IPERBOLE.
Siano $d = p_{D'_\infty}$ e $d' = p_{D_\infty}$ due diametri coniugati di $\mathcal{C}$, con $D_\infty(l, m, 0)$ e $D'_\infty(l', m', 0)$ (esistono, perchè $\mathcal{C}$ è a centro). Allora, essendo d e d' diametri coniugati, risulta:

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + l'm) + a_{22}mm' = 0. \tag{4.10}$$

Ora, d è asse se e solo se D_∞ è una direzione perpendicolare a D'_∞, ossia,

$$d \quad \text{asse} \quad \iff \quad ll' + mm' = 0$$

o equivalentemente, $(l', m') = (\varrho m, -\varrho l)$, con $\varrho \neq 0$. L'equazione (4.10) allora si scrive:

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0. \tag{4.11}$$

Si osservi che essendo $\Delta = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$, l'equazione (4.11) ammette soluzioni reali. quindi, *gli assi di una conica a centro sono rette reali.*

Osserviamo inoltre che $\Delta = 0$ se e solo se $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$. In tal caso, l'equazione (4.11) è identicamente soddisfatta, ossia, *ogni diametro è un asse.*

La condizione analitica $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$ equivale al fatto che $\mathcal{C}$ è una *circonferenza.* Perciò, *Una conica generale $\mathcal{C}$ è una circonferenza se e solo se ogni diametro è asse.*

Se $\Delta > 0$ (quindi la conica è iperbole o ellisse, ma non circonferenza) allora la conica ha due assi reali e distinti. I parametri direttori di essi sono le soluzioni distinte (definiti a meno di un fattore di proporzionalità $\varrho \neq 0$) di (4.11).

Esempio: si vogliono trovare le equazioni degli assi della conica

$$\mathcal{C} : x^2 - 4y^2 + x - y + 1 = 0.$$

La conica $\mathcal{C}$ ha centro $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$. L'equazione $a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0$ in questo caso si scrive: $(-4 - 1)lm = 0$, le cui soluzioni sono: $(\varrho, 0, 0)$ e $(0, \varrho, 0)$, con $\varrho \neq 0$. Ponendo $\varrho = 1$, si ha: $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Quindi, gli assi sono le rette di equazioni

$$x = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{1}{8},$$

cioè le rette per C e parallele rispettivamente all'asse delle y e all'asse delle x.

Caso II: $\mathcal{C}$ è una PARABOLA.
Nel caso della parabola, tutti i diametri sono paralleli, quindi hanno tutti la stessa direzione. Sia D_∞ il punto improprio della parabola $\mathcal{C}$. Per definizione, l'*asse* di $\mathcal{C}$ è la polare del puinto D'_∞ che definisce la *direzione ortogonale* a D_∞.

Esempio: troviamo l'equazione dell'asse della parabola $\mathcal{C} : x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$. Il punto improprio D_∞ della parabola si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{C} : x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 = 0, \\ i_\infty : x_3 = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $D_\infty(1, 1, 0)$. Il punto improprio che definisce la direzione ortogonale a quella di D_∞ è allora $D'_\infty(-1, 1, 0)$. Quindi, l'asse a di $\mathcal{C}$ è la polare di D'_∞, di equazione $4x_1 - 4x_2 - x_3 = 0$ (in coordinate non omogenee, $a : 4x - 4y - 1 = 0$).

Si chiama *vertice* di una conica generale $\mathcal{C}$ ogni punto *proprio e reale* V, di intersezione di $\mathcal{C}$ con un suo asse a.

In una parabola c'è un solo vertice. Nell'iperbole ce ne sono due e appartengono ad uno stesso asse. Nell'ellisse ci sono quattro vertici.

Proposizione 4.14 *Siano $\mathcal{C}$ una conica generale, V un suo vertice e t la retta tangente in V a $\mathcal{C}$. Allora, t è perpendicolare all'asse passante per V.*

Dim. Se a è asse, allora $a = p_{D'_\infty}$ è perpendicolare alla sua direzione coniugata D'_∞. Di conseguenza, se V è un vertice e $V \in a$, per il teorema di reciprocità si ha:

$$V \in a = p_{D'_\infty} \Rightarrow D'_\infty \in p_V = t$$

e quindi t ha direzione perpendicolare ad a. $\square$

4.7 Equazioni canoniche.

Mediante la scelta di un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è possibile scrivere l'equazione di una conica (non degenere) in una forma particolarmente semplice. Distinguiamo i seguenti casi.

a) Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro, di equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

in un riferimento cartesiano $RC(O, x, y)$. Nel nuovo riferimento $RC'(O', x', y')$, scelto in modo tale che $O' = C$ sia il centro della conica, e gli assi del riferimento gli assi della conica, l'equazione si riduce alla forma

$$Lx'^{\,2} + My'^{\,2} + N = 0.$$

Il modo più semplice per determinare i coefficienti L, M, N, consiste nell'usare gli invarianti della conica. Infatti, L, M, N possono determinarsi risolvendo il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} LMN = det(A), \\ LM = D_{33}, \\ L + M = T. \end{cases}$$

Inoltre, in base alle diverse possibilità per il segno di L, M, N, si può scrivere l'equazione canonica in uno dei seguenti modi standard:

I) $\dfrac{x'^{\,2}}{a^2} + \dfrac{y'^{\,2}}{b^2} = 1$ (ellisse a punti reali);

II) $\dfrac{x'^{\,2}}{a^2} + \dfrac{y'^{\,2}}{b^2} = -1$ (ellisse a punti immaginari);

III) $\dfrac{x'^{\,2}}{a^2} - \dfrac{y'^{\,2}}{b^2} = \pm 1$ (iperbole);

b) Sia $\mathcal{C}$ una parabola. In un sistema di riferimento cartesiano $RC'(O', x', y')$, scelto in modo tale che $O' = V$ sia il vertice della conica, e gli assi del riferimento il suo asse e la tangente nel vertice, l'equazione di $\mathcal{C}$ si riduce alla forma

$$\alpha y'^{\,2} + 2\beta x' = 0.$$

Tenendo conto del fatto che $\alpha \neq 0$ (essendo $\mathcal{C}$ generale), ne segue che, posto $p = -\beta/\alpha$, si può scrivere l'equazione canonica nel seguente modo standard:

$$y'^{\,2} = 2px'.$$

Il modo più semplice per determinare i coefficienti α, β consiste nell'usare gli invarianti della conica, che verificano

$$\begin{cases} -\alpha\beta^2 = det(A), \\ (0 = D_{33}), \\ \alpha = T. \end{cases}$$

4.8 Fuochi di una conica. Eccentricità.

Sia $\mathcal{R}(O, x, y)$ un riferimento <u>ortonormale</u>. Se $\mathcal{C}$ è una conica generale, si ha la seguente

Proposizione 4.15 *$\mathcal{C}$ è una circonferenza se e solo se $\mathcal{C}$ passa per i punti ciclici.*

Dim. Se $\mathcal{C}$ è una circonferenza, allora ha $a_{11} - a_{22} = a_{12} = 0$. Pertanto, $\mathcal{C}$ ha un'equazione del tipo $\mathcal{C} : a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$, e si verifica subito che le coordinate dei punti ciclici $I_\infty(1, i, 0)$, $J_\infty(1, -i, 0)$ soddisfano la sua equazione.

Viceversa, supponiamo che i punti ciclici $I_\infty(1, i, 0)$ e $J_\infty(1, -i, 0)$ appartengono alla conica $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$. Allora, si ha

$$a_{11} - a_{22} + 2a_{12}i = 0,$$
$$a_{11} - a_{22} - 2a_{12}i = 0$$

da cui, sommando membro a membro si ottiene $a_{11} = a_{22}$ e sottraendo membro a membro si ottiene $a_{12} = 0$. Pertanto, $\mathcal{C}$ è una circonferenza. $\square$

Sia $\mathcal{C}$ una conica generale a punti reali. Si chiama *fuoco* di $\mathcal{C}$ un punto *proprio e reale*, tale che le tangenti condotte da esso alla conica siano le rette isotrope.

Proposizione 4.16 *Sia $\mathcal{C}$ una conica generale a punti reali. Allora, il centro di $\mathcal{C}$ è un fuoco se e solo se $\mathcal{C}$ è una circonferenza. (Una circonferenza ha un solo fuoco, che coincide con il centro.)*

Dim. Supponiamo che il centro C della conica $\mathcal{C}$ coincida con un fuoco F. Allora, $p_F = p_C = i_\infty$.

Poichè F è fuoco, le rette CA_∞ e CB_∞, tangenti a $\mathcal{C}$ condotte da $C = F$, sono le rette isotrope. Quindi, A_∞ e B_∞ sono i punti ciclici. Ma A_∞ e B_∞ appartengono alla conica. Quindi, per la proposizione (4.15), $\mathcal{C}$ è una circonferenza.

Viceversa, sia $\mathcal{C}$ una circonferenza. Per la proposizione (4.15), $\mathcal{C}$ passa per $I_\infty(1, i, 0)$ e $J_\infty(1, -i, 0)$. Le tangenti alla conica per I_∞ e J_∞ si incontrano nel polo della retta $I_\infty J_\infty = i_\infty$, ossia nel centro C. Allora, C è anche fuoco, perchè le tangenti condotte da esso a $\mathcal{C}$ sono le rette isotrope. $\square$

Proposizione 4.17 *Una conica a punti reali, a centro e che non sia una circonferenza, ha due fuochi distinti, che appartengono ad uno stesso asse detto **asse focale**. Una parabola ha un solo fuoco, che appartiene all'asse della parabola.*

Sia $\mathcal{C}$ una conica generale a punti reali. Si chiama *direttrice* della conica $\mathcal{C}$ una retta propria e reale, *polare di un fuoco.*

Proposizione 4.18 *Se $\mathcal{C}$ è una conica a centro, qualunque sia P punto proprio e reale di $\mathcal{C}$, il rapporto delle distanze di P da un fuoco e dalla relativa direttrice è costante.*

Dim. Una conica $\mathcal{C}$ con fuoco $F(x_0, y_0)$ e direttrice $d : ax + by + c = 0$, ha equazione, in coordinate non omogenee, del tipo:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - h(ax + by + c)^2 = 0.$$

Sia $P(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C}$; allora si ha:

$$d(P, F) = \sqrt{(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2},$$
$$d(P, d) = \left| \frac{a\bar{x} + b\bar{y} + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

da cui si ricava:

$$\frac{d(P, F)^2}{d(P, d)^2} = \frac{(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2}{(a\bar{x} + b\bar{y} + c)^2}(a^2 + b^2) = h(a^2 + b^2). \quad \square$$

Proposizione 4.19 *Sia $\mathcal{C}$ una parabola. Il rapporto delle distanze di un punto proprio e reale $P \in \mathcal{C}$ dal fuoco F e dalla direttrice d è uguale a 1.*

Dim. Supponiamo che il fuoco abbia coordinate $F(\frac{p}{2}, 0)$ e la direttrice d abbia equazione $x + \frac{p}{2} = 0$; allora l'equazione di $\mathcal{C}$ è $y^2 = 2px$. Se $P(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, allora si ha:

$$d(P,F) = \sqrt{(x_o - \tfrac{p}{2})^2 + y_o^2} = \sqrt{(x_o - \tfrac{p}{2})^2 + 2px_o} = \sqrt{(x_o + \tfrac{p}{2})^2} = \left|x_o + \tfrac{p}{2}\right| = d(P,d),$$

da cui la tesi. □

Se $\mathcal{C}$ è una conica generale a punti reali, il rapporto delle distanze di $P \in \mathcal{C}$ da un fuoco e dalla relativa direttrice si chiama *eccentricità*, e si indica con e.

Si può dimostrare che un'ellisse ha eccentricità $e < 1$; un'iperbole ha eccentricità $e > 1$; una parabola ha eccentricità $e = 1$.

Proposizione 4.20 *In un'ellisse, la somma delle distanze di un suo punto qualunque dai fuochi è costante ed è uguale alla misura dell'asse focale (lunghezza del segmento di estremi V_1, V_2, vertici che stanno sull'asse contenente i fuochi).*

Dim. Se F_1 ed F_2 sono fuochi e d_1 e d_2 rispettivamente le relative direttrici, si ha:

$$\frac{d(P,F_1)}{d(P,d_1)} = \frac{d(P,F_2)}{d(P,d_2)} = e$$

da cui

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = e \cdot (d(P,d_1) + d(P,d_2)) = e \cdot d(d_1,d_2),$$

che quindi non dipende da P.

Allora, per $P = V_1$ si ha:

$$d(V_1,F_1) + d(V_1,F_2) = e \cdot d(d_1,d_2).$$

Ma

$$d(V_1,F_1) + d(V_1,F_2) = d(V_1,F_1) + d(F_1,F_2) + d(F_2,V_2) = d(V_1,V_2)$$

e quindi

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = d(V_1,V_2) \quad (= 2a). \quad \square$$

Nel caso dell'iperbole si può dimostrare che il valore assoluto della differenza delle distanze di un punto dell'iperbole dai fuochi è uguale alla misura dell'asse focale, cioè

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a.$$

Osservazione: E' facile calcolare le coordinate dei fuochi e l'eccentricità di una conica, quando questa ha equazione in forma canonica.

Per l'**ELLISSE**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a \geq b > 0$, posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ si trova facilmente che i fuochi hanno coordinate $F(\pm c, 0)$, l'eccentricità e è data da $e = \frac{c}{a} < 1$ e le direttrici sono le rette $x = \pm\frac{a}{e}$.

Per l'**IPERBOLE**: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > 0$ e $b > 0$, posto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, i fuochi hanno coordinate $F(\pm c, 0)$, l'eccentricità $e = \frac{c}{a} > 1$ e le direttrici sono le rette $x = \pm\frac{a}{e}$.

Per la **PARABOLA**: $y^2 = 2px$, il fuoco ha coordinate $F(\frac{p}{2}, 0)$, l'eccentricità $e = 1$ e la direttrice d ha equazione $x + \frac{p}{2} = 0$.

4.9 Studio di una conica.

Sia fissato un sistema $RC(O, x, y)$. **Studiare** una assegnata conica $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$ vuol dire:

a) Classificarla dal punto di vista proiettivo ed affine.

b) Trovarne assi, centro, (eventuali) asintoti.

c) Trovarne l'equazione canonica.

d) Scrivere l'equazione canonica in modo standard, e trovare vertici, fuochi, eccentricità, direttrici.

Esercizi:

1) *Studiare* $\mathcal{C} : 3x^2 - 2xy - 2x + 2y + 3 = 0$.

2) *Studiare* $\mathcal{C} : 2x^2 + 4y^2 + 4xy + 6x + 1 = 0$.

3) *Al variare di* $k \in \mathbb{R}$, *si consideri la conica* $\mathcal{C}_k : x^2 + y^2 + 2kxy + 2ky + 1 = 0$.

a) Classificare $\mathcal{C}_k$ *dal punto di vista proiettivo e affine.*

b) Per $k = 1$, *studiare* $\mathcal{C}_1$.

4) *Al variare di* $k \in \mathbb{R}$, *si consideri la conica* $\mathcal{C}_k : x^2 + ky^2 + 4kxy + 2(k-1)y = 0$.

a) Classificare $\mathcal{C}_k$ *dal punto di vista proiettivo e affine.*

b) Per $k = 3$, *studiare* $\mathcal{C}_3$.

5) *Al variare di* $k \in \mathbb{R}$, *si consideri la conica* $\mathcal{C}_k : 3x^2 - 2kxy - 2x + 2y + 3 = 0$.

a) Classificare $\mathcal{C}_k$ *dal punto di vista proiettivo e affine.*

b) Per $k = 1$, *studiare* $\mathcal{C}_1$.

5 Geometria analitica dello spazio

5.1 Coordinate cartesiane

Un **riferimento ortonormale cartesiano** *dello spazio è individuato da una base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ dei vettori dello spazio, e da un punto O scelto come origine del riferimento. Il riferimento si indica con $RC(O, x, y, z)$.*

Sia P un punto dello spazio.

$$P(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Fissare un riferimento $RC(O, x, y, z)$ permette quindi di stabilire corrispondenze biunivoche *tra i punti di S_3, i vettori di V_3 e le terne di $\mathbb{R}^3$.*

Assi coordinati:

asse x: *retta per O e parallela a $\vec{i}$. Ha equazioni $y = z = 0$.*

asse y: *retta per O e parallela a $\vec{j}$. Ha equazioni $x = z = 0$.*

asse z: *retta per O e parallela a $\vec{k}$. Ha equazioni $x = y = 0$.*

Piani coordinati:

piano xy: *piano degli assi x ed y. Ha equazione $z = 0$.*

piano xz: *piano degli assi x e z. Ha equazione $y = 0$.*

piano yz: *piano degli assi y e z. Ha equazione $x = 0$.*

Dati due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dello spazio,

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

è il vettore posizione di P_2 rispetto a P_1. La distanza *tra P_1 e P_2 è quindi data da:*

$$d(P_1, P_2) = \|\vec{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Il punto medio *del segmento $\overline{P_1P_2}$ è il punto M di coordinate*

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

5.2 Piano

Tre punti P_1, P_2, P_3 non allineati individuano un piano α

$$P \in \alpha \Leftrightarrow \vec{P_1P}, \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3} \quad \textit{dipendenti.}$$

Posto $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $P(x, y, z)$, la dipendenza lineare si può esprimere in due modi:

Equazione cartesiana di un piano.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

*Sviluppando il determinante, si ha l'*equazione cartesiana del piano:

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

I parametri (a, b, c) si chiamano coefficienti di giacitura *del piano e rappresentano le coordinate di un vettore (non nullo) perpendicolare al piano. Infatti, considerando il vettore $\vec{n} = (a, b, c)$ uscente da $P_0 \in \alpha$, si ha*

$$\vec{n} \cdot \vec{P_0 P} = 0 \qquad \forall P \in \alpha$$

da cui

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

che rappresenta il piano per P_0 con coefficienti di giacitura (a, b, c).

Equazioni parametriche di un piano.

$$\vec{P_1 P} = u\vec{P_1 P_2} + v\vec{P_1 P_3}, \qquad u, v \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + u(x_2 - x_1) + v(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + u(y_2 - y_1) + v(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + u(z_2 - z_1) + v(z_3 - z_1) \end{cases}$$

che sono dette equazioni parametriche del piano*. Eliminando i parametri u e v si perviene all'equazione cartesiana.*

Esempio. *Dati i punti $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(1, 1, 1)$, $P_3(1, 0, 1)$ troviamo le equazioni parametriche e cartesiana del piano. Si ha $\vec{P_1 P_2} = (0, 1, 1)$, $\vec{P_1 P_3} = (0, 0, 1)$, dunque*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = u \\ z = u + v \end{cases},$$

da cui l'equazione cartesiana $x = 1$.

Mutue posizioni di due piani.

Siano α ed α' due piani. Volendo studiare la loro mutua posizione, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Risulta

$$\begin{aligned} \textit{sistema incompatibile} &\Leftrightarrow rg(A) \neq rg(\tilde{A}) && \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = \emptyset, \\ \textit{sistema compatibile} &\Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A}) && \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2 &\Leftrightarrow \infty^1 \textit{ soluzioni} && \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = r, \\ rg(A) = rg(\tilde{A}) = 1 &\Leftrightarrow \infty^2 \textit{ soluzioni} && \Leftrightarrow \alpha \equiv \alpha', \end{aligned}$$

dove r è una retta. Ponendo

$$\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = \emptyset \quad \textit{oppure} \quad \alpha \equiv \alpha'$$

possiamo dire che

$$\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow (a, b, c) \sim (a', b', c'),$$

dove '$\sim$' sta per 'è proporzionale a'.

Esempi ed esercizi.

- *I piani* $x - y + 2z = 1$ *e* $3x - 3y + 6z = 1$ *sono paralleli; i piani* $x - y + 2z = 1$ *e* $3x - 3y + 6z = 3$ *sono paralleli e coincidenti.*
- *Il piano perpendicolare al vettore* $(1, -1, 2)$ *e uscente dal punto* $(3, -1, 5)$ *è*

$$1(x - 3) + (-1)(y + 1) + 2(z - 5) = 0.$$

5.3 Retta

Due punti distinti P_1 *e* P_2 *individuano una retta* r*:*

$$P \in r \Leftrightarrow \vec{P_1P}, \vec{P_1P_2} \text{ dipendenti.}$$

La dipendenza lineare si può esprimere nei seguenti modi.

Equazioni cartesiane di una retta.

$$rg \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

che si può porre nella forma

$$r\colon \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

Queste ultime sono dette equazioni cartesiane della retta. *Quindi, ogni retta* r *si può scrivere come intersezione di due piani* α *ed* α'*, di equazioni cartesiane*

$$\alpha\colon ax + by + cz + d = 0, \qquad \alpha'\colon a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

e tali che

$$rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

Si osservi che la retta r *non determina univocamente i piani* α *ed* α'*: due altri piani* distinti *passanti per* r *(ce ne sono* ∞^1*) individuano la stessa retta.*

Si chiamano parametri direttori *di* r *le coordinate di un arbitrario vettore* $\vec{v}$ *parallelo ad* r*. Ovviamente, se* $P_1, P_2 \in r$ *e* $P_1 \neq P_2$*, allora* $\vec{v} = \vec{P_1P_2}$ *è parallelo ad* r *e quindi parametri direttori di* r *sono*

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$$

I parametri direttori (l, m, n) *di una retta sono individuati a meno di un fattore di proporzionalità.*

Equazioni parametriche di una retta.

Si ha

$$\vec{PP_1} = t\vec{P_1P_2}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) = x_1 + lt \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) = y_1 + mt \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) = z_1 + nt \end{cases}$$

che sono dette equazioni parametriche della retta. *Eliminando il parametro* t *si perviene alle equazioni cartesiane.*

Esempi ed esercizi.

- *Trovare i parametri direttori della retta*

$$r\colon \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x+y+z+3=0 \end{cases}$$

I suoi parametri direttori sono le soluzioni del sistema omogeneo associato ad r, ossia

$$\begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Questo sistema rappresenta, infatti, la retta parallela ad r e passante per l'origine (che ha gli stessi parametri direttori di r). Quindi, una terna di parametri direttori è $\vec{v}=(-3,1,2)$.

- *Verificare che le seguenti equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=2 \\ z=2-\frac{t}{2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x=11-4t' \\ y=2 \\ z=t' \end{cases},$$

rappresentano la stessa retta r. Chi sono i parametri direttori di r? Scrivere equazioni cartesiane di r.

Mutua posizione retta-piano.

Ad ogni piano α associamo il vettore $\vec{n}=(a,b,c)$, perpendicolare ad α, di coordinate i parametri di giacitura; ad ogni retta r associamo il vettore $\vec{r}=(l,m,n)$, parallelo ad r, di coordinate i parametri direttori.

$$\begin{aligned} &r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{r}\perp\vec{n} \Leftrightarrow al+bm+cn=0 \\ &r \text{ incidente } \alpha \Leftrightarrow \vec{r}\neg\perp\vec{n} \Leftrightarrow al+bm+cn\neq 0 \end{aligned}$$

In particolare,

$$r\perp\alpha \Leftrightarrow \vec{r}\parallel\vec{n}.$$

Mutua posizione di due rette.

Date due rette dello spazio r ed r', di parametri direttori $\vec{r}=(l,m,n)$ ed $\vec{r'}=(l',m',n')$ rispettivamente, r ed r' possono essere

$$\begin{cases} \text{complanari}: \begin{cases} r\parallel r' \Leftrightarrow \vec{r}\parallel\vec{r'} \Leftrightarrow (l,m,n)\sim(l',m',n') \\ \\ r \text{ incidente } r' \Leftrightarrow r\cap r'=P_0 \end{cases} \\ \\ \text{sghembe}: \ \text{non complanari.} \end{cases}$$

Caso particolare di incidenza:

$$r\perp r' \Rightarrow \vec{r}\perp\vec{r'} \Rightarrow ll'+mm'+nn'=0.$$

Rette sghembe.

Due rette r ed r' sono sghembe *se non esiste alcun piano che le contiene. Si può provare che esistono due piani α e α' tra loro paralleli tali che*

$$r\subset\alpha, \qquad r'\subset\alpha'.$$

Chiaramente, $dist(r, r') = dist(\alpha, \alpha')$*, che è la cosiddetta* minima distanza *tra le rette sghembe* r *e* r'*. Ricordiamo che, se* F *ed* F' *sono due insiemi di punti dello spazio, la distanza tra* F *ed* F' *è per definizione*

$$dist(F, F') = \inf\{dist(P, P');\ P \in F, P' \in F'\}.$$

Siano $\vec{r}$ *ed* $\vec{r'}$ *vettori rispettivamente paralleli alle rette considerate. Esistono e sono univocamente determinati un punto* $R \in r$ *ed un punto* $R' \in r'$*, tali che* $\vec{RR'} \perp \vec{r}, \vec{r'}$*, e la minima distanza tra le rette* r*,* r' *é esattamente* $\|\vec{RR'}\|$*.*

In generale, la distanza tra rette, tra rette e piani, e tra piani, è sempre riconducibile alla distanza tra punti.

Angoli tra rette e piani. *Siano ora* r *ed* r' *due rette orientate e* $\vec{r}$*,* $\vec{r'}$ *due vettori concordemente orientati con* r *ed* r'*. Allora*

$$\cos \widehat{rr'} = \cos \widehat{\vec{r}\vec{r'}} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}.$$

Se, invece, le due rette non sono orientate, l'angolo $\widehat{rr'}$ *può assumere due valori tra loro supplementari:*

$$\cos \widehat{rr'} = \pm\frac{\vec{r} \cdot \vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} = \pm\frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}.$$

Così, indicate con n *ed* n' *le rette normali rispetto ad* α *ed* α'*, si ha*

$$\cos \widehat{\alpha\alpha'} = \cos \widehat{\vec{n}\vec{n'}} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n'}}{\|\vec{n}\|\,\|\vec{n'}\|} = \pm\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

$$\sin \widehat{\alpha r} = |\cos \widehat{\vec{n}\vec{r}}| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{\|\vec{n}\|\,\|\vec{r}\|} = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Esempi ed esercizi.

- *Sono sghembe le due rette seguenti*

$$r\colon \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \qquad r'\colon \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

Infatti r *ed* r' *non sono parallele e* $r \cap r' = \emptyset$*. La loro minima distanza é* $d(r, r') = d(R, R') = 2\sqrt{14}/7$*.*

Fasci di piani.

Siano α *ed* α' *due piani. Se* $\alpha \cap \alpha' = r$*, si chiama* fascio di piani proprio *di asse* r *la totalità dei piani dello spazio passanti per* r*, che si dice* asse *del fascio proprio. Se* $\alpha \parallel \alpha'$*, la totalità dei piani dello spazio paralleli ad* α *(o ad* α'*) costituisce il* fascio di piani improprio *individuato dalla giacitura di* α *(e di* α'*).*

Se $\alpha\colon ax + by + cz + d = 0$ *e* $\alpha'\colon a'x + b'y + c'z + d' = 0$ *il fascio è rappresentato da*

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

al variare dei parametri omogenei λ *e* μ*, con* $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$*. Se* $\lambda \neq 0$*, ponendo* $k = \mu/\lambda$*, il fascio è rappresentato dall'equazione*

$$ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

che esplicita il fatto che i piani di un fascio sono ∞^1.

Si osservi che nell'equazione precedente, al variare di k *in* $\mathbb{R}$, *il piano* α' *non è rappresentato; esso però si può pensare ottenuto per* $k = \pm\infty$. *Ciò porta ad ampliare* $\mathbb{R}$ *in modo spontaneo, aggiungendo un solo punto improprio (mentre in Analisi l'ampliamento è fatto con i due punti impropri* $\pm\infty$*):*

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Esempi ed esercizi.

- *Trovare il piano passante per* $A(0, 2, -1)$ *e per la retta*

  $$r\colon \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

  Poiché $A \notin r$, *il piano è univocamente individuato. Si considera il fascio di piani di asse* r *e si impone il passaggio per* A *del generico piano.*

  Il piano generico $x + 2y + z + k(x - z) = 0$ *passa per* A *se* $k = -3$, *quindi il piano cercato è* $x - y - 2z = 0$.

- *Si risolva l'esercizio precedente considerando il piano passante per* A *e per due punti scelti di* r.

- *Scrivere il fascio di rette del piano* $\alpha\colon 3x - y + 5z + 1 = 0$ *di centro* $P_0(0, 1, 0) \in \alpha$.

  Sia r *una retta per* P_0 *non contenuta in* α*; ad esempio:*

  $$r\colon \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

  L'equazione $x + kz = 0$, *con* $k \in \mathbb{R}$, *rappresenta il fascio di piani di asse* r *e*

  $$\begin{cases} x + kz = 0 \\ 3x - y + 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

  rappresenta il fascio di rette richiesto.

Distanze.

Geometricamente, la distanza di un punto P *da un piano* π, *è la distanza tra* P *e la sua proiezione ortogonale* H *su* π. *Per determinare* H, *si trova la retta per* P *e perpendicolare a* π *e la si interseca con* π.

In termini analitici, se $P(x_0, y_0, z_0)$ *e* $\pi : ax + by + cz + d = 0 = 0$, *allora*

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dati due punti distinti $A(x_1, y_1, z_1)$ *e* $B(x_2, y_2, z_2)$, *il* piano assiale del segmento AB *è il luogo dei punti dello spazio, equidistanti da* A *e* B. *La sua equazione (necessariamente di I grado) è*

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$$

La distanza di un punto P *da una retta* r *dello spazio, è la distanza tra* P *e la sua proiezione ortogonale* H *su* r. *Per determinare* H, *si trova il piano per* P *e perpendicolare a* r, *e lo si interseca con* π. **N.B.:** *NON esiste una formula analitica per la distanza punto-retta nello spazio.*

Distanza di due rette parallele r, r': è la distanza tra r ed un qualsiasi punto di r'.

Distanza di due piani paralleli π, π': è la distanza tra π ed un qualsiasi punto di π'.

Distanza tra una retta r ed un piano π parallelo ad r: è la distanza tra π ed un qualsiasi punto di r.

5.4 Sfere e circonferenze

Chiamiamo sfera *l'insieme dei punti P dello spazio tali che $\|\vec{CP}\| = R$, dove C è un punto fisso e R un numero reale positivo. Se $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e $P(x, y, z)$, da $\|\vec{CP}\| = R$ si ha*

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2,$$

che dà l'equazione cartesiana di una sfera generica. Equivalentemente:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0,$$

dove $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$. Viceversa, ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

rappresenta una sfera Σ di centro (α, β, γ), dove $\alpha = -a$, $\beta = -b$, $\gamma = -c$, e di raggio $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Si ha:

$$\begin{array}{ll} a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 & \qquad\qquad \textit{sfera ordinaria}, \\ a^2 + b^2 + c^2 - d = 0 & \qquad\qquad \textit{sfera di raggio nullo}, \\ a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 & \qquad\qquad \textit{sfera immaginaria}. \end{array}$$

Se π è un piano, $\Sigma \cap \pi$ è una circonferenza.

Esempio:
Scrivere l'equazione della sfera che ha come punti diametralmente opposti $A(3, 0, 0)$ e $B(1, 1, 1)$. Discutere nel campo complesso l'intersezione della sfera con il piano coordinato yz.

5.5 Esercizi di riepilogo

1. *Determinare le equazioni delle bisettrici delle rette*

   $$r : x - 1 = y - z = 0\,, \qquad s : y = 1 = z\,.$$

   Suggerimento*: si ricordi che se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ sono i* versori *associati alle rette, allora $\vec{r} + \vec{s}$ e $\vec{r} - \vec{s}$ danno le direzioni delle bisettrici.*

2. *Si consideri il piano α contenente il triangolo T di vertici*

   $$A(1, 0, 0), \quad B(0, \sqrt{2}, 1), \quad C(-1, 1/\sqrt{2}, 1)\,.$$

   (a) *Determinare l'angolo ϕ $(0 \leq \phi \leq \pi/2)$ tra il piano α e il piano coordinato xy.*

   (b) *Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A e B.*

   (c) *Trovare i parametri direttori di r e quelli di giacitura di α.*

   (d) *Determinare il piano ortogonale ad $\vec{AB}$ e passante per il punto medio H di AB.*

5.6 Superfici e curve

Abbiamo visto come nello spazio un piano si rappresenta con un'equazione, mentre una retta con due equazioni. Ogni equazione, ponendo un vincolo tra le incognite, riduce di uno il grado di libertà. Ciò traduce il fatto che il piano ha dimensione 2*, mentre la retta ha dimensione* 1*.*

Chiamiamo superficie Σ *il luogo dei punti* $P(x, y, z)$ *dello spazio le cui coordinate verificano un'equazione del tipo*

$$f(x, y, z) = 0,$$

che è detta equazione cartesiana *di* Σ*.*

Se f *è un polinomio, la superficie si dirà* algebrica*: le superfici algebriche di grado* 1 *sono i piani, quelle di grado* 2 *si chiamano* quadriche.

Una superficie si può rappresentare parametricamente *tramite equazioni del tipo*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

dove $(u, v) \in A \subset \mathbb{R}^2$*, cioè* $P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \Sigma$ *dipende da due parametri.*

Un punto P *descrive una* curva γ *dello spazio se esso dipende da un solo parametro:*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad t \in I \subset \mathbb{R},$$

che rappresentano le equazioni parametriche *di* γ*. Eliminando il parametro si perviene (spesso con difficoltà) alle equazioni cartesiane di* $\gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$*, dove*

$$\Sigma_1 \colon f_1(x, y, z) = 0, \qquad \Sigma_2 \colon f_2(x, y, z) = 0.$$

Esempio.

Se $\Sigma \colon f(x, y, z) = 0$ *e* $\Sigma' \colon g(x, y, z) = 0$ *sono equazioni algebriche di primo grado, esse rappresentano dei piani. Se non sono paralleli tra loro, il loro sistema rappresenta la retta* $r = \Sigma \cap \Sigma'$*, che è dunque una particolare curva.*

Si osservi che, date due superfici $\Sigma_1 \colon f_1(x, y, z) = 0$ *e* $\Sigma_2 \colon f_2(x, y, z) = 0$*, allora*

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \colon \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \colon f_1(x, y, z)\, f_2(x, y, z) = 0.$$

Evidentemente, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ *è una curva, mentre* $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ *è una superficie. L'intersezione di una curva* γ *e di una superficie* Σ *è, in genere, un insieme finito di punti, possibilmente vuoto.*

Curve piane e sghembe. *Una curva* γ *dello spazio si dice* piana *se esiste un piano che la contiene, altrimenti si dice* sghemba.

Esempio.

Data la curva

$$\gamma \colon x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1, \quad z = 2t,$$

dimostriamo che è piana. Bisogna vedere se esiste un piano

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

tale che $ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$ *per ogni* t*. Ora,*

$$a(t^2 - 1) + b(t^2 + 1) + 2tc + d = 0 \quad \Rightarrow \quad (a + b)t^2 + 2tc + d - a + b = 0,$$

che porta (per il principio di identità dei polinomi) al sistema omogeneo

$$a + b = 0, \quad 2c = 0, \quad d - a + b = 0,$$

che ha soluzioni $c = 0$, $a = -b$, $d = -2b$. Quindi γ è piana ed è contenuta nel piano $\alpha\colon x - y + 2 = 0$. Si noti che si ha $t = z/2$, da cui le equazioni cartesiane di γ:

$$x = \frac{z^2}{4} - 1, \qquad y = \frac{z^2}{4} + 1,$$

oppure

$$4x - z^2 + 1 = 0, \qquad x - y + 2 = 0.$$

Esercizio.
Provare che la curva γ (elica cilindrica) di equazioni parametriche

$$\gamma : x = \cos(u), \quad y = \sin(u), \quad z = u$$

è sghemba.

5.7 Superfici rigate. Coni e cilindri

Una superficie rigata *è una superficie Σ costituita da rette, formata dall'insieme dei punti appartenenti a tutta le rette (dette* generatrici*) che passano per i punti di una assegnata curva γ (detta* direttrice*), secondo una direzione assegnata per ciascun punto di γ. Una tale superficie è quindi completamente determinata a partire dalle equazioni parametriche di γ*

$$\gamma\colon \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \qquad u \in I,$$

e dalle direzioni delle generatrici:

$$\vec{v}(u) = (l(u), m(u), n(u)), \qquad u \in I.$$

La generica generatrice sarà individuata dalle equazioni

$$\frac{x - x(u)}{l(u)} = \frac{y - y(u)}{m(u)} = \frac{z - z(u)}{n(u)},$$

e quindi,

$$\begin{cases} x = x(u) + l(u)v, \\ y = y(u) + m(u)v, \\ z = z(u) + n(u)v. \end{cases}$$

Una superficie rigata è immediatamente riconoscibile come tale a partire dalle sue equazioni parametriche, per il fatto che la dipendenza da uno dei due parametri è **di tipo lineare**.

Sia P un punto dello spazio ed α un piano. Proiettare P su α da un fissato punto *V vuol dire considerare il punto $P' = VP \cap \alpha$; proiettare P su α* secondo una direzione data *$\vec{w}$ vuol dire considerare il punto $P' = s \cap \alpha$, dove s è la retta per P parallela a $\vec{w}$.*

Se P descrive una curva γ, il punto P' descrive una curva $\gamma' \subset \alpha$, che è la proiezione *di γ.*

Si chiama cono *la superficie $\mathcal{K}$ luogo delle rette (dette* generatrici *di $\mathcal{K}$) che proiettano da un punto V (*vertice*) una curva γ, detta* direttrice *del cono.*

La curva γ', proiezione di γ su α da V, è data da $\gamma' = \mathcal{K} \cap \alpha$.

Si chiama cilindro *la superficie Γ luogo delle rette (dette* generatrici *di Γ) incidenti una curva γ ed aventi la stessa direzione individuata da un vettore $\vec{w}$.*

La curva γ', proiezione di γ su α parallelamente a $\vec{w}$, è data da $\gamma' = \Gamma \cap \alpha$.

Troviamo ora le equazioni parametriche di un cono e di un cilindro. Sia

$$\gamma: \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Se $V(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{w}(l, m, n)$, allora

$$\mathcal{K}: \begin{cases} x = x_0 + v(x(u) - x_0) \\ y = y_0 + v(y(u) - y_0) \\ z = z_0 + v(z(u) - z_0), \end{cases}$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = x(u) + lv \\ y = y(u) + mv \\ z = z(u) + nv. \end{cases}$$

Esempi ed esercizi.

- *Scrivere l'equazione del cilindro avente generatrici di direzione $\vec{w}(1,1,1)$ e passante per la curva*

  $$\gamma: \quad x = t^3, \quad y = t^3 - t, \quad z = t^2.$$

  La generica generatrice ha equazioni

  $$\frac{x - t^3}{1} = \frac{y - t^3 + t}{1} = \frac{z - t^2}{1} = h,$$

  quindi equazioni parametriche del cilindro sono

  $$\Gamma: \quad x = t^3 + h, \quad y = t^3 - t + h, \quad z = t^2 + h, \qquad (t, h) \in \mathbb{R}^2.$$

  Per ottenere l'equazione cartesiana, basta eliminare i parametri t ed h

  $$\Gamma: \quad (x - y)^3 - (x - y)^2 + z - x = 0.$$

- *Per proiettare la curva γ dell'esempio precedente sul piano yz parallelamente alla direzione individuata da $\vec{w}$, si pone $x = 0$ nelle equazioni parametriche, si ha $h = -t^3$ e quindi*

  $$\gamma': \quad x = 0, \quad y = -t, \quad z = t^2 - t^3,$$

  oppure in forma cartesiana

  $$\gamma': \quad x = 0, \quad z = y^2 + y^3.$$

- *Proiettare la stessa curva γ nel piano $x = y + 1$ dal punto $V(1,1,1)$.*

  Si ha immediatamente

  $$\mathcal{K}: \quad x = 1 + v(t^3 - 1), \quad y = 1 + v(t^3 - t - 1), \quad z = 1 + v(t^2 - 1)$$

  $$\gamma': \quad x = 1 + t^2 - \frac{1}{t}, \quad y = t^2 - \frac{1}{t}, \quad z = 1 + t - \frac{1}{t}.$$

- *Riconoscere che la superficie seguente è costituita da rette*

  $$x = u + u^2 v, \quad y = (u^2 + 1)v, \quad z = \frac{1}{u} + v.$$

- *Sia data la sfera*
$$\Sigma\colon x^2 + y^2 + z^2 - 3x - y + 2 = 0.$$
  1. *Determinare il cono K con vertice nell'origine e circoscritto a Σ.*
  2. *Scrivere l'equazione del piano contenente la circonferenza $\gamma = K \cap \Sigma$.*
  3. *Trovare il centro ed il raggio di γ.*

  (L'equazione del cono richiesto è $x^2 - 7y^2 - 8z^2 + 6xy = 0$.)

- *Scrivere l'equazione del cono proiettante da $V(0,0,1)$ la curva*
$$\gamma\colon \begin{cases} 2(x^2+y^2) - x^3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- *Si provi che la superficie*
$$\Gamma\colon x^2 + y^2 - x = 0$$
  è un cilindro, con generatrici parallele all'asse z e con direttrice la curva
$$\mathcal{C}\colon \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 - x = 0.$$

- *La curva seguente è chiaramente una circonferenza:*
$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = x \end{cases},$$
  che può essere rappresentata anche dal sistema equivalente
$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1 \\ y = x \end{cases}.$$
  In tal caso $\mathcal{C}$ è pensata come intersezione del cilindro $\Gamma\colon 2x^2+z^2 = 1$ con il piano $\alpha\colon y = x$. La proiezione ortogonale di $\mathcal{C}$ sul piano $y = 0$ sarà
$$\mathcal{C}'\colon \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$
  Si vede immediatamente che $\mathcal{C}'$ non è una circonferenza, ma un'ellisse, com'è intuitivo, essendo i piani $y = x$ e $y = 0$ non paralleli tra loro.

  Qual è la proiezione ortogonale di $\mathcal{C}$ sul piano $x = 0$ e sul piano $z = 0$?

  (Si tenga presente che il piano $y = x$ è ortogonale al piano $z = 0$.)

5.8 Superfici di rotazione

Si chiama superficie di rotazione *la superficie generata dalla rotazione di una curva γ intorno ad una retta a, che prende il nome di* asse *della superficie.*

L'asse a può essere assegnato mediante un suo punto $A(x_0, y_0, z_0)$ e i suoi parametri direttori (l, m, n), la curva γ mediante equazioni parametriche
$$\gamma\colon \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$
Il generico punto $P \in \gamma$, quando γ ruota intorno ad a, descrive una circonferenza, detta parallelo,
$$\mathcal{P} = \tau \cap S,$$

dove τ è il piano per P e perpendicolare ad a ed S la sfera di centro A e raggio $\|\vec{AP}\|$

$$\begin{aligned}
&\tau\colon l(x - x(u)) + m(y - y(u)) + n(z - z(u)) = 0,\\
&S\colon (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (x(u) - x_0)^2 + (y(u) - y_0)^2 + (z(u) - z_0)^2.
\end{aligned}$$

Se a coincide con l'asse z, le precedenti equazioni si semplificano notevolmente perché $(l, m, n) \sim (0, 0, 1)$ e si può prendere $A(0, 0, 0)$.

Esempio. *Trovare la superficie Σ generata dalla rotazione intorno all'asse z della retta*

$$r\colon \quad x = 1, \quad y = 2z.$$

Equazioni parametriche di r sono

$$x = 1, \quad y = 2u, \quad z = u.$$

Quindi, posto $A(0, 0, 0)$ e $(l, m, n) \sim (0, 0, 1)$,

$$\begin{aligned}
\tau\colon &\quad z = u,\\
S\colon &\quad x^2 + y^2 + z^2 = (1 - 0)^2 + (2u - 0)^2 + (u - 0)^2,
\end{aligned}$$

cioè

$$\mathcal{P}\colon \begin{cases} z = u,\\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 5u^2 \end{cases}$$

ed eliminando il parametro

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$$

che è una superficie algebrica di ordine 2, vale a dire una quadrica.

5.9 Coordinate cilindriche e sferiche

Coordinate cilindriche. *Siano α un piano ed r una retta perpendicolare ad α (detta* asse delle quote*). Posto $O = \alpha \cap r$, consideriamo nel piano α un riferimento polare (ρ, φ) e nella retta r un riferimento cartesiano.*

Se P è un punto dello spazio, consideriamo P', la sua proiezione ortogonale su α, e P'', proiezione ortogonale di P su r. Denotiamo (ρ, φ) le coordinate polari di P' in α ed h la coordinata di P'' su r. I tre numeri (ρ, φ, h), associati a P, si chiamano coordinate cilindriche *di P. Fuori dall'asse z, la corrispondenza tra il punto e le sue coordinate cilindriche è biunivoca. Le coordinate si chiamano* cilindriche *poiché per $\rho =$ cost. si ottiene un cilindro rotondo intorno all'asse r di raggio c.*

Spesso ad un riferimento cilindrico si fa corrispondere un riferimento cartesiano $RC(Oxyz)$ tale che r coincida con l'asse z, il semiasse positivo delle x con l'asse polare nel piano α. Allora

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi\\ y = \rho\sin\varphi & \rho \in \mathbb{R}^+\\ z = h & h \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Coordinate sferiche. *Fissiamo nello spazio un riferimento polare costituito da*

- *un punto O detto* polo*;*
- *una retta orientata r per O detta* asse polare*;*
- *un semipiano α di origine r detto* senipiano polare*;*

- *un'unità di misura per le lunghezze ed un verso positivo per le rotazioni intorno all'asse polare.*

Poniamo

$\rho = \|\vec{OP}\|$ *<u>raggio vettore</u>,*

$\varphi = \widehat{\alpha\beta}$ *<u>longitudine</u>, dove β è il piano per r e P,* $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$\theta = \widehat{\vec{OP}\vec{r}}$ *<u>colatitudine</u>,* $0 \leq \theta \leq \pi$ *($\psi = \pi/2 - \theta$ <u>latitudine</u>).*

I tre numeri (ρ, φ, θ) sono detti coordinate sferiche*. Al riferimento polare si può associare un riferimento $RC(Oxyz)$ tale che O coincida con il polo, z coincida con l'asse polare, il semiasse positivo delle x appartenga al semipiano polare e coincidano le unità di misura per i segmenti. Allora*

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ z = \rho \cos\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Le coordinate si dicono sferiche *poiché, per $\rho = cost$, si ottengono sfere concentriche. Pertanto, per $\rho = R$, le equazioni precedenti sono equazioni parametriche della sfera di centro O e raggio R; le coordinate (φ, θ) sono* coordinate geografiche *sulla sfera.*