Università del Salento

Corso di Laurea in Matematica

APPUNTI DI GEOMETRIA I

Giovanni Calvaruso

DISCLAIMER: Queste note sono realizzate ad esclusivo uso interno per il corso di Geometria I dei Corsi di Laurea in Matematica e Fisica dell'Università del Salento. Come tali, non hanno alcuna pretesa di completezza, e sono da intendersi come un puro supporto al corso stesso, **che non può in alcun modo sostituirsi all'apprendimento fornito dalle lezioni**.

L'Autore ringrazia la Collega Eliana Francot per avergli messo a disposizione il proprio materiale didattico relativo al corso di Geometria I.

PROGRAMMA DEL CORSO:

PRELIMINARI:

0) Matrici, determinanti e sistemi lineari

GEOMETRIA ANALITICA:

1) Vettori geometrici

2) Geometria analitica del piano

3) Geometria analitica dello spazio

ALGEBRA LINEARE:

4) Spazi vettoriali

5) Applicazioni lineari

6) Autovalori ed autovettori di un endomorfismo

BIBLIOGRAFIA ED APPROFONDIMENTI:

- G. CALVARUSO, sezione "Materiale Didattico" del sito web: http://www.dmf.unisalento.it/∼calvaruso/Homepage/
- A. SANINI, Lezioni di Geometria, ed. Levrotto e Bella, Torino.
- A. SANINI, Esercizi di Geometria, ed. Levrotto e Bella, Torino.
- E. FRANCOT, Appunti di Geometria I (disp. online).
- G. DE CECCO e R. VITOLO, Note di Geometria e Algebra (disp. in Biblioteca).
- G. CALVARUSO e R. VITOLO, Esercizi di Geometria ed Algebra Lineare (disp. in Biblioteca).

PRELIMINARI: Matrici, determinanti e sistemi lineari.

0.1 Insiemi, relazioni e funzioni

In Matematica, un raggruppamento di oggetti rappresenta un *insieme* se esiste un criterio oggettivo che permetta di decidere univocamente se un qualunque oggetto fa parte o no del raggruppamento (N.B.: questa NON è una definizione!).

Definizione 1 Un *relazione* $\mathcal{R}$ tra due insiemi A e B è un sottoinsieme del loro prodotto cartesiano $A \times B$, ossia, un insieme di coppie ordinate di elementi di A e B: $\mathcal{R} \subset A \times B$.

Dati $a \in A$ e $b \in B$ ed una relazione $\mathcal{R}$, anziché scrivere $(a, b) \in \mathcal{R}$ si scrive $a\mathcal{R}b$.

Definizione 2 Un *funzione* f tra due insiemi A e B è una relazione tra questi insiemi, che verifica:

$$\forall a \in A \quad \exists | b \in B : \qquad afb \quad (\text{si scrive: } f(a) = b).$$

Per indicare che f è una funzione dall'insieme A nell'insieme B si scrive $f : A \to B$.

Una funzione f è completamente determinata dai 3 elementi seguenti:

- il *dominio*, ossia, l'insieme A su cui f è definita;

- il *codominio*, ossia, l'insieme B in cui f assume valori;

- la *legge di applicazione*, che specifica il modo in cui f associa a ciascun elemento $a \in A$ la sua immagine $f(a) \in B$.

Basta cambiare uno dei 3 elementi di cui sopra per modificare sostanzialmente una funzione e le sue proprietà.

Esempio 3 Consideriamo gli insiemi

$$A = \{x : x \text{ è iscritto al primo anno del CdL in Matematica}\}$$

e

$$B = \{y : y \text{ è un comune della provincia di Brindisi}\}.$$

Allora,

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B : x \text{ risiede in } y\}$$

è una relazione tra A e B. Chiaramente, non è una funzione, a meno che tutti gli iscritti risiedano in qualche comune della provincia di Brindisi!

Esempio 4 Indichiamo con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ gli insiemi dei numeri naturali, interi e reali rispettivamente.

1. $\mathcal{R} = \{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : p = q^2\}$ è una relazione su $\mathbb{Z}$. Perché non è una funzione?
2. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq y\}$ è una relazione su $\mathbb{R}$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ è una funzione su $\mathbb{R}$: per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste uno ed un solo numero reale y, tale che $y = x^2$.

0.2 Strutture algebriche

Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. In $\mathbb{Z}$ è definita un'operazione indicata con il simbolo $+$, detta *somma*, che ad ogni coppia (a, b) di numeri interi associa il numero intero $a + b$. In simboli:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto a + b. \end{aligned}$$

L'operazione di somma definita in $\mathbb{Z}$ gode delle seguenti proprietà:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ (*proprietà associativa*);
2. $\exists 0 \in \mathbb{Z} \quad \text{t.c.} \quad a + 0 = 0 + a = a \qquad \forall a \in \mathbb{Z}$ (*esistenza dell'elemento neutro*);
3. $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists (-a) \in \mathbb{Z} \quad \text{t.c.} \quad a + (-a) = (-a) + a = 0$ (*esistenza dell'opposto*);
4. $a + b = b + a \qquad \forall a, b \in \mathbb{Z}$ (*proprietà commutativa*).

Indichiamo con $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ l'insieme dei numeri razionali non nulli. In questo insieme, oltre alla somma, è definita un'operazione indicata con il simbolo $\cdot$, detta *prodotto*, che ad ogni coppia (a, b) di numeri razionali non nulli associa il numero razionale $a \cdot b$ non nullo. In simboli:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* &\to \mathbb{Q}^* \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

L'operazione di prodotto definita in $\mathbb{Q}^*$ gode delle seguenti proprietà:

1. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}^*$ (*proprietà associativa*);
2. $\exists 1 \in \mathbb{Q}^* \quad$ t.c. $\quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad \forall a \in \mathbb{Q}^*$ (*esistenza dell'elemento neutro*);
3. $\forall a \in \mathbb{Q}^* \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{Q}^* \quad$ t.c. $\quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (*esistenza dell'inverso*);
4. $a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \in \mathbb{Q}^*$ (*proprietà commutativa*).

Vediamo ora come si generalizzano gli esempi precedenti. Indichiamo con G un insieme qualsiasi (ad esempio, G può essere $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ oppure $\mathbb{R}$). Indichiamo con $*$ un'*operazione (interna)* definita in G, ossia una legge che ad ogni coppia (a, b) di elementi di G associa un unico elemento di G, indicato con $a * b$

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

che verifichi la proprietà associativa:

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Definizione 5 La coppia $(G, *)$ prende il nome di *struttura algebrica*.

Ad esempio, se G è un insieme numerico, $*$ può rappresentare la somma $+$ oppure il prodotto $\cdot$. Le coppie $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ sono esempi di strutture algebriche.

Definizione 6 Sia $(G, *)$ una struttura algebrica in cui $*$ gode delle seguenti proprietà:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c \qquad \forall a, b, c \in G$ (*proprietà associativa*);
2. $\exists e \in G \quad$ t.c. $\quad a * e = e * a = a \qquad \forall a \in G$ (*esistenza dell'elemento neutro*);
3. $\forall a \in G \quad \exists a' \in G \quad$ t.c. $\quad a * a' = a' * a = e$ (*esistenza dell'elemento inverso*);

in questo caso la struttura $(G, *)$ è detta *gruppo*.

Se oltre alle proprietà 1, 2 e 3 vale anche la proprietà

4. $a * b = b * a \qquad \forall a, b \in G$ (*proprietà commutativa*)

allora $(G, *)$ è detta *gruppo abeliano* (o *commutativo*).

Definizione 7 Siano $(G, *)$ un gruppo e $H \subset G$. Si dice che $(H, *)$ è un *sottogruppo* di $(G, *)$ se H è un gruppo rispetto alla stessa operazione definita in G.

Esempi.

i) $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ e $(\mathbb{R},+)$ sono gruppi (commutativi). Si osservi che $(\mathbb{Z},+)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Q},+)$, il quale è a sua volta un sottogruppo di $(\mathbb{R},+)$.

ii) $(\mathbb{Z},\cdot)$ è una struttura algebrica (è associativo, ed esiste l'elemento neutro, 1), ma non è un gruppo, in quanto in genere un elemento non possiede il simmetrico (inverso).

iii) $(\mathbb{Q},\cdot)$ è una struttura algebrica, ma non è un gruppo, in quanto lo zero non ammette inverso.

iv) $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ è un gruppo.

Consideriamo ora un insieme in cui sono definite due operazioni, ossia una struttura algebrica del tipo $(G,*,\circ)$. Se:

1. $(G,*)$ è un gruppo abeliano;

2. $a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c) \quad \text{e} \quad (b*c)\circ a=(b\circ a)*(c\circ a) \qquad \forall a,b,c\in G$ (*prop. distributiva*);

3. $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c \qquad \forall a,b,c\in G$ (*prop. associativa*);

allora la struttura $(G,*,\circ)$ è detta *anello*.
Se inoltre vale:

4. $a\circ b=b\circ a \qquad \forall a,b\in G$ (*prop. commutativa*)

la struttura $(G,*,\circ)$ è detta *anello commutativo*.
Se vale anche

5. $\exists e'\in G \quad \text{t.c.} \quad a\circ e'=e'\circ a=a \qquad \forall a\in G$ (*esistenza dell'elemento neutro rispetto a* $\circ$)

allora la struttura $(G,*,\circ)$ è detta *anello commutativo unitario*.
Infine, se un anello commutatico unitario $(G,*,\circ)$ verifica l'ulteriore proprietà:

6. $(G^*=G-\{0\},\circ)$ è un gruppo commutativo,

allora la struttura $(G,*,\circ)$ è detta *campo*.

Esempio 8 $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ e $(\mathbb{C},+,\cdot)$ sono esempi di campo. Nel seguito indicheremo con la lettera $\mathbb{K}$ un generico campo e chiameremo *scalari* i suoi elementi.

Anche $(G=\{0,1\},+,\cdot)$ è un campo. In tutte queste note, quando consideriamo un campo $\mathbb{K}$, si sottintende sempre $\mathbb{K}\neq\{0,1\}$, per il quale diversi risultati non valgono.

0.3 Matrici

Dato un numero naturale n, denotiamo con $\underline{n}$ l'insieme

$$\underline{n} = \{i \in \mathbb{N} : i \leq n\} = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Definizione 9 Siano $\mathbb{K}$ un campo e $m, n \in \mathbb{N}$. Si chiama *matrice ad m righe ed n colonne* (o *matrice di tipo $m \times n$*) ad elementi in $\mathbb{K}$, una applicazione

$$\begin{aligned} A : \underline{m} \times \underline{n} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (i, j) &\mapsto a_{ij}. \end{aligned}$$

Pertanto, A è un insieme di $m \cdot n$ scalari, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $(i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n)$, disposti in modo da formare m righe ed n colonne, ossia, una tabella del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Lo scalare a_{ij} è l'elemento di A che si trova nella i^{sima} riga e j^{sima} colonna. Con questa notazione possiamo rappresentare in modo compatto la matrice A con $A = (a_{ij})$, con $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{3,2} &= -1, \\ b_{1,2} &= 0. \end{aligned}$$

TERMINOLOGIA:

- Se $m \neq n$ la matrice A è detta *rettangolare*;
- se $m = n$ la matrice A è detta *quadrata di ordine n*;
- se $m = 1$ la matrice $A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$ è detta anche *matrice riga* (o *vettore riga*);
- se $n = 1$ la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ è detta anche *matrice colonna* (o *vettore colonna*).

Denotiamo con $\mathbb{K}^{m,n}$ l'insieme delle matrici ad m righe ed n colonne ad elementi in $\mathbb{K}$.

Definizione 10 Siano A,$B \in \mathbb{K}^{m,n}$ con $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Allora:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n)$$

Definizione 11 Si definisce *matrice trasposta* di A, $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, la matrice, indicata con A^t, $A^t \in \mathbb{K}^{n,m}$ ottenuta da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne, ossia la matrice il cui elemento di posto ij è l'elemento a_{ji} .

Si noti che $(A^t)^t = A$.

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, definiamo ora alcune matrici particolari:

- se $a_{ij} = 0\ \forall i, j$ allora $A = O$ si dice *matrice nulla*;

- la matrice $-A := (-a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ si dice *matrice opposta* di A;

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, vediamo alcuni casi particolari di matrici quadrate:

- A si dice *simmetrica* se $A = A^t$, ossia se $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$;

- A si dice *antisimmetrica* se $A = -A^t$, ossia se $a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i, j$;

- A si dice *triangolare superiore* se $a_{ij} = 0\ \forall i > j$;

- A si dice *triangolare inferiore* se $a_{ij} = 0\ \forall i < j$;

- A si dice *diagonale* se $a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$, cioè quando è contemporaneamente triangolare superiore ed inferiore.

Gli elementi $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ di una matrice quadrata di ordine n costituiscono la *diagonale principale* di A.

Tra tutte le matrici diagonali di ordine n, la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

è detta *matrice unità* (o *matrice ibentità*) di ordine n. In forma compatta, $I_n = (\delta_{ij})$, dove $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$.

0.3.1 Somma tra matrici.

Definizione 12 Due matrici A e B sono *sommabili* se entrambe appartengono a $\mathbb{K}^{m,n}$.

Siano $A,B \in \mathbb{K}^{m,n}$ con $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Si definisce *matrice somma* di A e B la matrice $S = A + B$, con $S = (s_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ tale che

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \forall i, j.$$

L'applicazione

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K}^{m,n} \times \mathbb{K}^{m,n} &\to \mathbb{K}^{m,n} \\ (A, B) &\mapsto A + B \end{aligned}$$

soddisfa le seguenti proprietà:

1. $A + B = B + A \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C \quad \forall A, B, C \in \mathbb{K}^{m,n}$;
3. $\exists O \in \mathbb{K}^{m,n}$ t.c. $\quad A + O = O + A = A \quad \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$;
4. $\forall A \in \mathbb{K}^{m,n} \quad \exists (-A) \in \mathbb{K}^{m,n}$ t.c. $\quad A + (-A) = O = (-A) + A$

Osservazione 13 Per le precedenti proprietà, $(\mathbb{K}^{m,n}, +)$ è un gruppo abeliano.

0.3.2 Prodotto per uno scalare.

Definizione 14 Siano $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ uno scalare. La matrice

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})$$

ottenuta dalla moltiplicazione di ogni elemento di A con λ, è detta *prodotto della matrice A per lo scalare λ*.

L'applicazione

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m,n} &\to \mathbb{K}^{m,n} \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda A \end{aligned}$$

soddisfa le seguenti proprietà:

5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$;
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \quad \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$;
7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \quad \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$;
8. $1A = A \ \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Sull'insieme $\mathbb{K}^{m,n}$ abbiamo così definito le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

Le proprietà dalla 1. alla 8. ci dicono che la struttura $(\mathbb{K}^{m,n}, +, \cdot)$ è uno *spazio vettoriale* su $\mathbb{K}$ (cfr. Cap. 4).

Osserviamo che dalla proprietà 6 discende che la matrice $(-\lambda)A$ è l'opposto della matrice λA, ossia:

$$(-\lambda)A = -\lambda A.$$

Infatti:

$$\lambda A + (-\lambda)A = (\lambda + (-\lambda))A = 0A = O.$$

Altre proprietà delle matrici:

- $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m,n} \quad (A+B)^t = A^t + B^t \quad$ e $\quad (\lambda A)^t = \lambda A^t$.

- $\forall A \in \mathbb{K}^{m,n} \quad \lambda A = O \Leftrightarrow \lambda = 0$ oppure $A = O$. Infatti:

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ con $A = (a_{ij})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Per la definizione di prodotto di una matrice per uno scalare, si ha $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, da cui

$$\lambda A = O \Leftrightarrow \lambda a_{ij} = 0 \quad \forall i, j.$$

Se $a_{ij} = 0 \; \forall i, j$ allora $A = O$ e la tesi è provata.

Supponiamo quindi che esista almeno un elemento $a_{kh} \neq 0$. Ma allora, essendo $\lambda \widetilde{a}_{kh} = 0$, necessariamente $\lambda = 0$ perché $\mathbb{K}$ è un campo, e quindi vale la *legge di annullamento del prodotto.*

- $\forall A \in \mathbb{K}^{n,n} \quad A + A^t$ è simmetrica. Infatti:

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

- $\forall A \in \mathbb{K}^{n,n} \quad A - A^t$ è antisimmetrica. Infatti:

$$(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$$

- Ogni matrice quadrata A si può scrivere come somma di una matrice simmetrica A_s e di una matrice antisimmetrica A_a con $A_s = \frac{A+A^t}{2}$ e $A_a = \frac{A-A^t}{2}$.

0.3.3 Prodotto righe per colonne tra matrici.

Definizione 15 Due matrici A e B sono *moltiplicabili righe per colonne* se il numero delle colonne di A coincide con il numero delle righe di B, ossia quando A è di tipo $m \times r$ e B è di tipo $r \times n$.

Date due matrici $A \in \mathbb{K}^{m,r}$con $A = (a_{ij})$ e $B \in \mathbb{K}^{r,n}$ con $B = (b_{ij})$, il *prodotto righe per colonne* $A \cdot B$ è la matrice $C \in \mathbb{K}^{m,n}$ con $C = (c_{ij})$, definita da

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

Quindi, c_{ij} è la somma degli r prodotti degli elementi della i-esima riga di A con gli elementi corrispondenti della j-esima colonna di B.

Nel seguito indicheremo $A \cdot B$ semplicemente con AB.

E' evidente che il prodotto BA è definito solo se $m = n$. Ma anche quando A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine, e quindi hanno senso sia AB che BA, in generale $AB \neq BA$.

Esempio.
Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Allora:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

mentre

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se $AB = BA$ allora diremo che le matrici A e B sono *permutabili*.
In $\mathbb{K}^{n,n}$, la matrice I_n permuta con ogni altra matrice, ossia:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{n,n} \quad I_nA = AI_n = A.$$

E' immediato verificare le seguenti proprietà:

1. $A(BC) = (AB)C \quad \forall A, B, C \in \mathbb{K}^{n,n}$;
2. $A(B + C) = AB + AC \quad \forall A, B, C \in \mathbb{K}^{n,n}$;
3. $(B + C)A = BA + CA \quad \forall A, B, C \in \mathbb{K}^{n,n}$.

Di conseguenza, $(\mathbb{K}^{n,n}, +, \cdot)$ è un anello.

Altre proprietà del prodotto tra matrici:

- $A(\lambda B) = \lambda(AB) = (\lambda A)B$;

- $AO = O$. Più in generale, se A è di tipo $m \times p$, ed O è la matrice nulla di tipo $p \times n$, allora $AO = O'$, dove O' la matrice nulla, ma di tipo $m \times n$.)

Si osservi che si può avere $AB = O$ senza che A o B siano matrici nulle, ossia, *il prodotto righe per colonne NON soddisfa la legge di annullamento del prodotto.*

Esempio.
Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Chiaramente, $A \neq O \neq B$. tuttavia,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $(AB)^t = B^t A^t$. Infatti:

Siano $A \in \mathbb{K}^{m,r}$ e $B \in \mathbb{K}^{r,n}$ allora $A^t \in \mathbb{K}^{r,m}$ e $B^t \in \mathbb{K}^{n,r}$ per cui è possibile calcolare sia AB che $B^t A^t$.
Poniamo $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = AB = (c_{ij})$ e $A^t = (a^t_{ij})$, $B^t = (b^t_{ij})$ e $C^t = (c^t_{ij})$. Sia $D = B^t A^t = (d_{ij})$.
Vogliamo provare che $C^t = D$, ossia che $c^t_{ij} = d_{ij}$ $\forall i, j$

$$c^t_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{r} a^t_{kj} b^t_{ik} = \sum_{k=1}^{r} b^t_{ik} a^t_{kj} = d_{ij}$$

- Se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ allora $A^h = A^{h-1}A$. Infatti: $A^2 = AA$, $A^3 = A^2 A$...Chi è A^0?

- Se $AB = BA$ allora $(AB)^h = A^h B^h$. Proviamolo per induzione su h.

Per $h = 2$ si ha $(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2 B^2$
Supponiamo sia $(AB)^{h-1} = A^{h-1} B^{h-1}$ e consideriamo $(AB)^h = (AB)^{h-1} AB$. Per l'ipotesi induttiva

$$(AB)^{h-1} AB = A^{h-1} B^{h-1} AB$$

ma da $AB = BA$ segue

$$A^{h-1} B^{h-1} AB = (A^{h-1} A)(B^{h-1} B) = A^h B^h$$

Esempi ed esercizi.

- Se $A = (1, 0, 3)$ allora

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; A \cdot A^T = (10)\,, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Se $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, provare che AA^T e A^TA sono simmetriche.
- Si osservi che se A e B sono simmetriche, in generale AB non è simmetrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Inversa di una matrice

Consideriamo l'insieme $\mathbb{K}^{n,n}$. Abbiamo visto che la matrice I_n funge da elemento neutro in $\mathbb{K}^{n,n}$ per il prodotto righe per colonne, e che tale operazione è associativa (ma non commutativa). Vogliamo ora dare una risposta alla seguente

DOMANDA: Data una matrice quadrata A, esiste una matrice A' che funga da inversa di A rispetto al prodotto? Cioè tale che $AA' = A'A = I_n$?

Definizione 16 Una matrice quadrata A si dice *invertibile* se esiste una matrice A', dello stesso ordine di A, tale che

$$AA' = A'A = I_n.$$

Proposizione 17 *La matrice inversa di A, se esiste, è unica (pertanto, la denoteremo con A^{-1}).*

DIM: Siano A' e B due matrici, entrambe inverse di A. Allora,

$$AB = I_n \quad \Rightarrow \quad A'(AB) = A'I_n \quad \Rightarrow \quad (A'A)B = A' \quad \Rightarrow \quad I_nB = B = A' \quad \square$$

Valgono le seguenti proprietà:

- Se A e B sono invertbili (dello stesso ordine), allora lo è anche AB, e
  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Infatti si ha:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

e, analogamente,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Quindi, $B^{-1}A^{-1}$ è l'inversa di AB (che, di conseguenza, è invertibile).

- $(A^{-1})^{-1} = A$.

Banalmente, da $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ segue che A è l'inversa di A^{-1}, cioè, $(A^{-1})^{-1} = A$.

- Se A è invertibile allora

$$AB = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \qquad \text{e} \qquad AB = AC \quad \Rightarrow \quad B = C.$$

Esercizio: Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

utilizzare la definizione di matrice invertibile per stabilire se sono invertibili, e in tal caso trovare l'inversa.

Per stabilire quando una matrice è invertibile e per calcolare poi la sua inversa useremo uno strumento particolarmente utile: il *determinante*.

0.4 Determinante

Definizione 18 Sia S un insieme, si chiama *permutazione* di S ogni corrispondenza biunivoca di S in sè,

$$\sigma : S \longrightarrow S$$

Se la cardinalità di S è uguale ad n, in simboli $card(S) = n$, possiamo pensare di "numerare" gli elementi di S da 1 ad n e considerare σ come permutazione dell'insieme numerico $\underline{n} = \{1, 2, ..., n\}$.

Ad esempio se $S = \underline{3} = \{1, 2, 3\}$ e $\sigma : \underline{3} \to \underline{3}$ è determinata da

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 1,$$

allora indichiamo la permutazione σ con la notazione $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, o più semplicemente con $(3, 2, 1)$, essendo la prima riga costituita sempre da $(1, 2, 3)$.

Il numero delle possibili permutazioni su n oggetti è $n(n-1)(n-2)...1 = n!$. La permutazione identica $(1, 2, ..., n)$ è detta *fondamentale*. Ogni permutazione si può ottenere dalla fondamentale tramite un numero finito di *trasposizioni*, ovvero scambi di due soli elementi.

Se consideriamo $\sigma = (3, 2, 1)$, per ottenere la permutazione fondamentale possiamo seguire i due percorsi seguenti:

$$(3, 2, 1) \to (3, 1, 2) \to (1, 3, 2) \to (1, 2, 3)$$

$$(3, 2, 1) \to (1, 2, 3).$$

Osserviamo che, in entrambi i casi, il numero di scambi effettuato è diverso, *ma sempre dispari*. Questo vale in generale.

Una permutazione σ è detta *di classe pari (dispari)* se occorrono un numero pari (dispari) di scambi per ottenere la permutazione fondamentale. Fissata una permutazione σ, col simbolo $\epsilon(\sigma)$ si indica il numero 1, oppure -1, a seconda che σ risulti di classe pari o dispari.

Definizione 19 Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ con $A = (a_{ij})$, chiamiamo *determinante* di A il numero

$$\det A = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le $n!$ permutazioni dell'insieme $\{1, 2, ..., n\}$.

IMPORTANTE: Il concetto di determinante ha senso <u>solo</u> per matrici quadrate!

- se $n = 1$ allora $\det A = a_{11}$.
- se $n = 2$ le permutazioni possibili su 2 oggetti sono $(1, 2)$ e $(2, 1)$ da cui

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- se $n = 3$ le permutazioni possibili su 3 oggetti sono

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1),\ (2, 3, 1),\ (2, 1, 3)$$

  da cui

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

All'aumentare dell'ordine n della matrice A, il calcolo del determinante di A diventa sempre più complicato. Viene in aiuto la *regola di Laplace*, una fondamentale regola di calcolo che andiamo ad introdurre.

Definizione 20 Fissato un elemento a_{ij} di $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, si chiama *minore complementare* di a_{ij} la sottomatrice di A, di ordine $(n - 1)$, ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna di A.

Si chiama *complemento algebrico* di a_{ij} o *cofattore* di a_{ij}, il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\text{minore complementare di } a_{ij}).$$

Teorema 21 (I Teorema di Laplace) *Sia* $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. *Allora,*

$$\det A = a_{r1}A_{r1} + ... + a_{rn}A_{rn}$$

dove r *è una fissata riga (scelta arbitrariamente). Analogamente,*

$$\det A = a_{1c}A_{1c} + ... + a_{nc}A_{nc}$$

dove c *è una fissata colonna (scelta arbitrariamente).*

Con questo teorema si può dare una *definizione ricorsiva* di determinante:

$$|A| = \det A = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1 \\ \sum_i a_{ij}A_{ij} = \sum_j a_{ij}A_{ij} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Quindi

$$det : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}.$$

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Le seguenti proprietà derivano facilmente dal I Teorema di Laplace:

1. $\det A = \det A^t$;
2. se gli elementi di una riga (o colonna) di A vengono moltiplicati per uno stesso numero reale k, allora il determinante della matrice così ottenuta è dato da $k \det A$;
3. il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale. In particolare $\det I_n = 1$

Nel calcolo pratico dei determinanti solitamente si utilizzano delle particolari proprietà che consentono di giungere al risultato senza ricorrere alla definizione generale di determinante.

Procedendo per induzione, dopo averlo verificato direttamente per $n = 2$, si hanno le seguenti *proprietà per il calcolo dei determinanti***:**

1. se due matrici A e B differiscono soltanto per uno scambio di righe (o colonne), allora $\det B = -\det A$;

ne segue che:

2. se A ha due righe (o colonne) uguali, allora $\det A = 0$;
3. se A ha due righe (o colonne) proporzionali, allora $\det A = 0$.

Inoltre

4. se B si ottiene da A aggiungendo ad una certa riga (o colonna) di A un'altra riga (o colonna) di A moltiplicata per un fattore di proporzionalità, allora $\det A = \det B$.

Teorema 22 (II Teorema di Laplace) *Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) di A per i complementi algebrici dei corrispondenti elementi di un'altra riga (o colonna) è sempre uguale a zero. Cioè:*

$$\begin{array}{ll} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 & \forall i \neq j, \\ a_{1k}A_{1h} + a_{2k}A_{2h} + \ldots + a_{nk}A_{nh} = 0 & \forall h \neq k. \end{array}$$

Teorema 23 (Regola di Binet) *Se $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ si ha*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Quindi, anche se in generale $AB \neq BA$, tuttavia $\det(AB) = \det(BA)$.

Esercizi.
1) Si calcoli $detA$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad (detA = -5).$$

2) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si calcoli $detA$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & -k & k+2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esempi ed esercizi.

- Se $I_n \in \mathbb{R}^{n,n}$, allora $\det I_n = 1$, $\det(-I_n) = (-1)^n$.
- Provare con un esempio che, in generale, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.
- Provare che per $k \in \mathbb{R}$ si ha $\det(kA) = k^n \det A$.

Definizione 24 Data $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, si chiama *aggiunta classica* di A la matrice $Ad_j(A) \in \mathbb{K}^{n,n}$, che ha al posto (i, j) il cofattore A_{ji} di a_{ji}.

Teorema 25 *Sia A una matrice quadrata. La matrice A è invertibile se e solo se* $\det A \neq 0$. *In tal caso,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Ad_j(A).$$

DIM: Sia A invertibile, allora $AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det I$. Per la Regola di Binet si ha $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ da cui segue $\det A \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Per il viceversa, dal I e II Teorema di Laplace e dalla definizione di aggiunta classica segue che

$$AAd_j(A) = (\det A)I_n = Ad_j(A)A.$$

Pertanto, se $\det A \neq 0$, allora ha senso considerare la matrice $A' = \frac{1}{\det A}Ad_j(A)$, e $A' = A^{-1}$ $\square$

Esempi ed esercizi.

1) Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha $detA = -8 \neq 0$,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -1/2 \\ -12 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e $A^{-1} = -\frac{1}{8}Adj(A)$.

0.4.1 Il Gruppo Lineare ed il gruppo Ortogonale.

Siano A e B due matrici (quadrate) non singolari. Da $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$ segue $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$, quindi anche la matrice AB risulta essere non singolare. Inoltre, siccome esiste A^{-1} e $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \neq 0$, *l'inversa di una matrice non singolare è ancora non singolare.*

Indichiamo con $GL(n, \mathbb{K})$ l'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine n, ad elementi in $\mathbb{K}$, non singolari

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n,n} \,| \det A \neq 0\}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. $A, B \in GL(n, \mathbb{K}) \Rightarrow AB \in GL(n, \mathbb{K})$ (ossia, $GL(n, \mathbb{K})$ è chiuso rispetto al prodotto tra matrici);

2. $(AB)C = A(BC) \qquad \forall A, B, C \in GL(n, \mathbb{K})$ (proprietà associativa);

3. $\exists I_n \in GL(n,\mathbb{K})$ t.c. $\quad AI_n = I_nA = A \quad \forall A \in GL(n,\mathbb{K})$ (esistenza dell'elemento neutro);

4. $\forall A \in GL(n,\mathbb{K}) \quad \exists A^{-1} \in GL(n,\mathbb{K})$ t.c. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ (esistenza dell'inverso).

Pertanto, $(GL(n,\mathbb{K}),\cdot)$ è un gruppo, detto *Gruppo Lineare* (delle matrici invertibili).

Definiamo ora un particolare sottoinsieme di $GL(n,\mathbb{R})$.

Definizione 26 Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice *ortogonale* se $AA^t = A^tA = I_n$.

Osserviamo che se A è ortogonale allora $\det A = \pm 1$. Infatti:

$$A \text{ ortogonale } \Rightarrow A^tA = I_n$$

da cui

$$\det(A^tA) = \det I_n$$

e per la regola di Binet

$$\det(A^tA) = \det A^t \det A = 1$$

e quindi

$$\det A^t = \det A \;\Rightarrow (\det A)^2 = 1$$

e quindi $\det A = \pm 1$.

Non vale il viceversa. Ad esempio, consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora, $\det A = 1$ ma

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq I_n.$$

Siano A, B due matrici ortogonali. Allora, $A^t = A^{-1}$ e $B^t = B^{-1}$, e

$$(AB)^t = B^tA^t = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

da cui segue che AB è ancora ortogonale. Inoltre,

$$(A^{-1})^tA^{-1} = (A^t)^tA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

analogamente

$$A^{-1}(A^{-1})^t = A^{-1}(A^t)^t = A^{-1}A = I_n$$

da cui segue che $(A^{-1})^t$ è l'inversa di A^{-1}, ossia A^{-1} è ortogonale.

Ovviamente la matrice identica I_n è ortogonale, in quanto $I_n^t = I_n^{-1} = I_n$.

Indichiamo con $\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le matrici ortogonali di ordine n. Ovviamente $\mathcal{O}(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$.

Valgono le seguenti proprietà:

1. $A, B \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \Rightarrow AB \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ (ossia $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ è chiuso rispetto al prodotto tra matrici).

2. $(AB)C = A(BC) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ (proprietà associativa).

3. $\exists I_n \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \quad$ t.c. $\quad AI_n = I_nA = A \quad \forall A \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ (esistenza dell'elemento neutro).

4. $\forall A \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \quad \exists A^{-1} \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ t.c. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ (esistenza dell'inverso).

Possiamo quindi dire che $(\mathcal{O}(n, \mathbb{R}), \cdot)$ è un gruppo detto *Gruppo Ortogonale* ed è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$.

0.5 Rango di una matrice.

0.5.1 Combinazioni lineari di colonne (o righe).

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n}.$$

Se indichiamo con $\mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,1}$ la j-esima colonna di A, possiamo rappresentare la matrice A in modo più compatto come

$$A = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ . \ . \ \mathbf{c}_n) \, .$$

Siano poi $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,1}$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n,1}$ (attenzione ai numeri di riga e colonna!).

Definizione 27 La matrice colonna $\mathbf{b}$ si dice *combinazione lineare* delle colonne di A con coefficienti $x_1, x_2, ..., x_n$ se

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + ... + x_n\mathbf{c}_n.$$

Quindi, in tal caso

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 a_{11} \\ . \\ . \\ x_1 a_{m1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 a_{12} \\ . \\ . \\ x_2 a_{m2} \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} x_n a_{1n} \\ . \\ . \\ x_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + ... + x_n a_{1n} \\ . \\ . \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + ... + x_n a_{mn} \end{pmatrix},$$

ossia, $\mathbf{b} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = AX.$

Analogamente, se indichiamo con $\mathbf{r}_i = (\ a_{i1}, ..., a_{in}) \in \mathbb{K}^{1,n}$ la i-esima riga di A, possiamo rappresentare la matrice A per righe:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ . \\ . \\ \mathbf{r}_m \end{pmatrix}.$$

Siano ora $\widetilde{\mathbf{b}} = (\widetilde{b}_1, ..., \widetilde{b}_n) \in \mathbb{K}^{1,n}$ e $Y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{K}^{1,m}$.

Definizione 28 La matrice riga $\widetilde{\mathbf{b}}$ si dice *combinazione lineare* delle righe di A con coefficienti $y_1, y_2, ..., y_m$ se

$$\widetilde{\mathbf{b}} = y_1 \mathbf{r}_1 + y_2 \mathbf{r}_2 + ... + y_m \mathbf{r}_m.$$

In questo caso sarà $\widetilde{\mathbf{b}} = YA$.

Osserviamo che data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, può accadere che una colonna (o riga) sia combinazione lineare delle rimanenti colonne (o righe).

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Da A possiamo estrarre sottomatrici quadrate di ordine r, con $1 \le r \le min\{n, m\}$. Di queste sottomatrici quadrate, dette *minori*, si può calcolare il determinante e verificare se è o meno nullo.

Definizione 29 Il *rango* di una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, indicato con $rg(A)$, è dato dal **massimo** ordine dei suoi minori con determinante non nullo.

Quindi, $rg(A) = p$ significa che:

1. esiste almeno un minore B di A che ha ordine p e tale che $\det B \neq 0$, e
2. tutti gli eventuali minori di ordine maggiore di p hanno determinante nullo.

Esempi ed esercizi.

- La matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$
ha rango 2, poiché $\det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, e tutti i minori di ordine 3 hanno determinante nullo.

- Determinare il rango delle seguenti matrici, al variare di λ,
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \lambda \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 4 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Si vede che $rg(A) = 2\ \forall\lambda$; $rg(B) = 3$ per $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -2$, mentre $rg(B) = 2$ per $\lambda = -2$ e $rg(B) = 1$ per $\lambda = 1$.

- Calcolare il rango della seguente matrice B al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Poiché $detB = 0$, si ha che $rg(B) \leq 3$. Inoltre,
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$
Dunque, $\mathrm{rg}(B) = 3$ per ogni λ.

0.6 Sistemi Lineari

Definizione 30 Un sistema di equazioni del tipo

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

o, in forma compatta,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, 2, ..., m$$

si dice *sistema lineare (di m equazioni in n incognite)*, a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$.
$x_1, x_2, ..., x_n$ sono dette *incognite del sistema.*
$a_{ij} \in \mathbb{K}$ sono detti *coefficienti del sistema.*
$b_i \in \mathbb{K}$ *termini noti del sistema.*
Se $b_i = 0\ \forall i$ il sistema si dice *omogeneo.*

In forma matriciale, il sistema $(*)$ si rappresenta con

$$AX = B$$

dove $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ è la *matrice dei coefficienti*, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ è la *(matrice)colonna delle incognite* e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$ quella *dei termini noti.*

Definizione 31 Una n-pla $\widetilde{X} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n)$ è una *soluzione del sistema* $(*)$ se $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n$, sostituite alle incognite del sistema, ne soddisfano simultaneamente tutte le equazioni.
Equivalentemente possiamo dire che $\widetilde{X}$ è soluzione del sistema $(*)$ se la colonna B è combinazione lineare delle colonne di A con coefficienti $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n$:

$$B = \widetilde{x}_1 C_1 + ... + \widetilde{x}_n C_n.$$

Un sistema si dice *compatibile* se ammette almeno una soluzione.

I problemi fondamentali che si presentano nello studio di un sistema lineare sono:

1. esistenza delle soluzioni o compatibilità del sistema (aspetto **qualitativo**);
2. determinazione del numero delle soluzioni (aspetto **quantitativo**);
3. calcolo esplicito di tutte le eventuali soluzioni (aspetto **computazionale**).

I primi due problemi sono risolti completamente dal seguente risultato, che dimostreremo in seguito con strumenti di Algebra Lineare.

Teorema 32 (di Rouchè-Capelli)

$$\textit{Il sistema } (*) \textit{è compatibile } \Leftrightarrow rg(A) = rg(A|B),$$

dove $A|B$ è la matrice completa *del sistema, ottenuta aggiungendo alle colonne di A la colonna B dei termini noti (in generale,$rg(A) \leq rg(A|B)$). Inoltre,*

$$\textit{se } rg(A) = rg(A|B) = p \textit{ si hanno: } \begin{cases} \textit{se } p = n & \textit{una sola soluzione} \\ \textit{se } p < n & \infty^{n-p} \textit{ soluzioni,} \end{cases}$$

dove con "∞^{n-p} soluzioni" si intendono infinite soluzioni, dipendenti da $(n-p)$ parametri indipendenti.

Esempi.

(1) Il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è chiaramente incompatibile. Infatti $1 = rg(A) \neq rg(\tilde{A}) = 2$.

(2) Il sistema

$$\{ \; x + y = 1 \;, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

second è chiaramente compatibile, essendo $1 = rg(A) = rg(\tilde{A})$. Secondo il Teorema, deve avere $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni. Infatti, le sue soluzioni sono esprimibili nella forma

$$x = 1 - y \quad (y = y),$$

dove y è indipendente, ossia, posto $y = \lambda$, le soluzioni sono tutte le coppie della forma $(1 - \lambda, \lambda)$, al variare di λ in $\mathbb{K}$.

Osservazione 33 La risoluzione di un sistema compatibile di rango p si riconduce sempre a quella di un sistema di p equazioni in p incognite (con matrice dei coefficienti non singolare). Basta considerare come parametri le $(n-p)$ incognite, i cui coefficienti non concorrono a formare il minore A' di rango uguale a p.

Si tratterà allora di risolvere un sistema di p equazioni in p incognite con $\det A' \neq 0$. Ma in tal caso, essendo A' invertibile, avremo:

$$A'X = B' \Leftrightarrow X = A'^{-1}B'.$$

Il problema computazionale, ricondotto a sistemi lineari di p equazioni in p incognite con determinante della matrice associata non nullo *(Sistema di Cramer)*, è quindi risolto dal seguente risultato (che segue dall'espressione dell'inversa di una matrice).

Teorema 34 (di Cramer) *Sia $AX = B$ un sistema di p equazioni in p incognite con $\det A \neq 0$. Allora il sistema ammette un'unica soluzione $(x_1, x_2, ..., x_p)$, le cui componenti sono date da*

$$x_k = \frac{\left|A^{(k)}\right|}{|A|},$$

dove $A^{(k)}$ è la matrice ottenuta da A sostituendo alla k-esima colonna di A la colonna dei termini noti.

Osservazione 35 I sistemi omogenei, ossia del tipo

$$(**) \qquad AX = O,$$

ammettono sempre almeno la soluzione nulla $X = O$ (che è unica se $\det A \neq 0$). Se invece $rg(A) = p < n$ allora il sistema omogeno ammette ∞^{n-p} soluzioni, dette *autosoluzioni.*

Ad ogni sistema lineare non omogeneo $(*)$ si può associare il corrispondente sistema lineare omogeneo $(**)$.

Si osservi che se X_0 è una soluzione particolare di $(*)$ e $\tilde{X}$ una soluzione generica di $(**)$, allora $\tilde{X} + X_0$ è una soluzione generica di $(*)$. Infatti:

$$A(\tilde{X} + \tilde{X}_0) = A\tilde{X} + A\tilde{X}_0 = O + B = B.$$

Esempi.

1) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ A & 0 \\ & 2 \end{array}\right).$$

Poiché $det(A) = -4 \neq 0$, il sistema è di Cramer, e quindi ammette un'unica soluzione. Applicando il metodo risolutivo dei sistemi di tipo Cramer:

$$x = \frac{det(A^1)}{det(A)} = 0, \quad y = \frac{det(A^2)}{det(A)} = 1, \quad z = \frac{det(A^3)}{det(A)} = 0,$$

per cui, $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ è l'unica soluzione del sistema.

2) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y - z = 0 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases} \tag{0.6.1}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} & 3 \\ A & 0 \\ & 6 \end{array}\right).$$

Poiché $p = rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2$ il sistema è compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni $(n - p = 3 - 2 = 1)$. Esso corrisponde al sistema di tipo Cramer

$$\begin{cases} 2y = z \\ 2x = 6 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t + 3 \\ (y = t) \\ z = 2t \end{cases}$$

Applicando il metodo risolutivo dei sistemi di Cramer, il II sistema ha l'unica soluzione $(x, z) = (-3t + 3, 2t)$ (dipendente dal parametro t), e quindi, il sistema dato ha per soluzioni $(x, y, z) = (-3t + 3, t, 2t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Altro metodo: Il sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $(x, y, z) = (h, -1/3\,h, -1/3\,h)$. Una soluzione particolare di (0.6.1), che si ottiene ad esempio ponendo $z = 0$, è $(3, 0, 0)$. Quindi, *tutte* le soluzioni di (0.6.1) sono date da

$$(x, y, z) = (h + 3, -1/3\,h, -1/3\,h), \qquad h \in \mathbb{R}.$$

Ponendo $t = -1/3\,h$, ci si rende conto immediatamente che gli insiemi

$$\{(-3t+3, t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \left\{\left(h+3, -\frac{1}{3}h, -\frac{2}{3}h\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

coincidono.

3) Studiamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 7 \end{cases} \tag{0.6.2}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix}\right).$$

Poiché $p = rg(A) = 1 \neq 2 = rg(\tilde{A})$, il sistema NON è compatibile.

0.6.1 Esempi ed Esercizi

1. Verificare che la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   è ortogonale, per ogni valore reale di θ. Ripetere per

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

2. Trovare A^{-1} e B^{-1}, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Trovare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, il rango delle seguenti matrici A e B. Determinare in particolare i valori reali di k per cui le matrici A e B sono invertibili:

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 3 & 1+k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-k & 3 & -1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & -k & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Discutere il seguente sistema, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, e risolverlo nei casi in cui è compatibile

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ 2x - \lambda z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

5. Date le matrici
$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix},\quad b\neq 0,$$
calcolare $2A-3B$, A^2, B^T, AB, BA.

6. Date le matrici
$$A=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\\-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&-3&1\\1&1&0&4\\1&1&2&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&0&2\end{pmatrix},$$
calcolarne tutti i possibili prodotti a due a due.

7. Risolvere il sistema lineare $AX=B$, dove
$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&1&2\\1&1&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

8. Dire se le seguenti matrici sono invertibili. In caso affermativo, trovarne l'inversa.
$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&3\\-1&-2&0\end{pmatrix}.$$

9. Al variare di $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, determinare il rango della matrice
$$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-\mu\\\mu-1&0&2\lambda\end{pmatrix}.$$

10. Al variare di $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, determinare il rango della matrice
$$A=\begin{pmatrix}\lambda&0&-\mu\\0&1&\lambda\\\lambda&1&\mu\end{pmatrix}.$$

11. Risolvere il sistema lineare
$$\begin{cases}2x-y+z+t=0,\\x-2z-t=-1.\end{cases}$$

12. Verificare che i seguenti sistemi lineari sono equivalenti (hanno le stesse soluzioni):
$$\begin{cases}x-2y+3z=5,\\2x+y-4z=5,\\x+3y-7z=0,\end{cases}\qquad e\qquad\begin{cases}x-z=3,\\y-2z=-1.\end{cases}$$

13. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare e risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + kz = k, \\ 2y + z = 0, \\ kx + z = k. \end{cases}$$

Parte I

Geometria Analitica

Capitolo 1

Vettori geometrici dello spazio ordinario

Sia $\mathbf{S}_3$ l'insieme dei punti dello spazio geometrico ordinario (spazio euclideo).
Dati $A, B \in \mathbf{S}_3$, se $A \neq B$ il segmento di estremi A e B individua due segmenti orientati AB e BA, aventi orientazioni opposte; ciò è espresso scrivendo che

$$AB = -BA.$$

Nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio introduciamo la seguente relazione di equivalenza, detta *relazione di equipollenza*:

Il segmento orientato AB è *equipollente* al segmento CD (in simboli: $AB \sim CD$)

$\Leftrightarrow$ (1) AB è parallelo a CD (giacciono su rette parallele),

(2) $\|AB\| = \|CD\|$, e

(3) AB,CD sono equiversi.

Le classi di equivalenza si chiamano *vettori (liberi)*.

Si osservi che il segmento orientato AB è *equipollente* al segmento CD se e solo se i punti medi di AD e BC coincidono.

Si verifica che la relazione di equipollenza è riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una *relazione di equivalenza*.

Indicheremo i vettori liberi con $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, ...$ e l'insieme di questi vettori con $\mathbb{V}_3$. Per indicare che il segmento orientato AB è un rappresentante del vettore libero $\vec{u}$ useremo la notazione

$$\vec{u} = \vec{AB}.$$

Si usa anche la notazione $\vec{u} = B - A$.

Si osservi che fissati un vettore libero $\vec{u}$ ed un punto A, esiste uno ed un solo rappresentante del vettore $\vec{u}$ con primo estremo A.

La classe di equipollenza costituita da tutti i segmenti orientati in cui l'origine coincide con l'estremo si dice *vettore nullo* e si indica con $\vec{0}$. I segmenti AA, BB, $\ldots$, individuano il vettore nullo $\vec{0}$.

Se $\vec{AB} \neq \vec{0}$, cioè $A \neq B$, al vettore $\vec{AB}$ si associano:

1. un numero strettamente positivo uguale alla lunghezza del segmento AB, rispetto ad una fissata unità di misura, che si chiama *norma* o *modulo* del vettore e si denota con $\left\|\vec{AB}\right\|$;

2. una *direzione*: quella della retta passante per A e B;

3. un *verso*: quello che da A porta a B.

Il vettore nullo ha norma nulla, direzione e verso *indeterminati*.

Fissato un punto $O \in \mathbf{S}_3$, ad ogni punto $P \in \mathbf{S}_3$ si può associare un unico vettore $\vec{u} \in \mathbb{V}_3$, ponendo $\vec{u} = \vec{OP}$, e viceversa. Pertanto, fissare un punto O ("origine") in $\mathbf{S}_3$ permette di staiblire una *corrispondenza biunivoca* tra i punti di $\mathbf{S}_3$ e gli elementi di $\mathbb{V}_3$ (vettori). Vale pertanto la seguente

Proposizione 36 *Fissato un punto $O \in \mathbb{S}_3$, l'applicazione*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S}_3 & \to & \mathbb{V}_3 \\ P & \mapsto & \vec{OP} \end{array}$$

è una corrispondenza biunivoca.

1.1 Somma in $\mathbb{V}_3$

Definizione 37 Siano $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3$. Scelti come rappresentanti di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ i segmenti orientati AB e BC rispettivamente, chiameremo *somma* di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il vettore libero $\vec{u}+\vec{v}$ rappresentato dal segmento orientato AC.

Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

1. $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3$;

2. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$;

infatti, siano $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{BC}$ e $\vec{w} = \vec{CD}$. Allora:

$$\begin{array}{rcl} (\vec{AB}+\vec{BC}\ )+\vec{CD} & = & \vec{AC}\ +\vec{CD} = \vec{AD}, \\ \vec{AB}+(\vec{BC}\ +\vec{CD}) & = & \vec{AB}\ +\vec{BD} = \vec{AD}. \end{array}$$

3. $\exists\, \vec{0} \in \mathbb{V}_3$ t.c. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}_3$;

infatti, se $\vec{u} = \vec{AB}$ basta considerare come rappresentante di $\vec{0}$ il segmento orientato $\vec{AA}$ oppure $\vec{BB}$, e si ha

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{0} &= \vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB} = \vec{u}, \\ \vec{0} + \vec{u} &= \vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB} = \vec{u}. \end{aligned}$$

4. $\forall \vec{u} \in \mathbb{V}_3 \quad \exists(-\vec{u}) \in \mathbb{V}_3$ t.c. $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$;

Sia $\vec{u} = \vec{AB}$. Proviamo che $(-\vec{u}) = \vec{BA}$. Infatti,

$$\begin{aligned} \vec{u} + (-\vec{u}) &= \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}, \\ (-\vec{u}) + \vec{u} &= \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{BB} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Le proprietà 1,...,4 hanno dimostrato la seguente

Proposizione 38 $(\mathbb{V}_3, +)$ *è un gruppo abeliano.*

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono due vettori liberi di cui vogliamo calcolare la somma, possiamo procedere anche nel seguente modo:
se consideriamo $\vec{u} = \vec{OA}$ e $\vec{v} = \vec{OB}$, risulta che $\vec{u} + \vec{v} = \vec{OC}$, dove C è il quarto vertice del parallelogramma costruito sui lati OA e OB. La regola appena illustrata è detta *regola del parallelogramma.*

Definizione 39 Si definisce *angolo di due vettori* non nulli $\vec{u}$ e $\vec{v}$ l'angolo convesso $A\widehat{O}B$ formato da due loro rappresentanti $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$.

La misura $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ di tale angolo è pertanto soggetta alle limitazioni

$$0 \leq \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \leq \pi.$$

1.2 Prodotto di un vettore per uno scalare

Definizione 40 Il *prodotto di un vettore per uno scalare* è l'applicazione:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V}_3 &\to \mathbb{V}_3 \\ (\lambda, \vec{v}) &\mapsto \lambda\vec{v}, \end{aligned}$$

dove $\lambda\vec{v} \in \mathbb{V}_3$ è definito nel seguente modo:

a) se $\lambda = 0$ oppure $\vec{v} = \vec{0}$

$$\lambda\vec{v} = \vec{0}$$

b) se $\lambda \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$:

- la direzione di $\lambda\vec{v}$ coincide con quella di $\vec{v}$;

- il modulo di $\lambda\vec{v}$ è il prodotto del valore assoluto di λ per il modulo di $\vec{v}$:

$$\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\,\|\vec{v}\|$$

- il verso di $\lambda\vec{v}$ è concorde con quello di $\vec{v}$ se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$.

L'operazione così definita gode delle le seguenti proprietà, che si possono verificare utilizzando la definizione e nozioni di geometria elementare:

5. $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

6. $(\lambda+\mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v} \;\; \forall \vec{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

7. $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v}) \; \forall \vec{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

8. $1\vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{V}_3$.

Le proprietà dalla 1. alla 8. provano che $(\mathbb{V}_3, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (cfr. Cap. 4).

Dalla proprietà 6 segue che il vettore $(-\lambda)\vec{u}$ è l'opposto del vettore $\lambda\vec{u}$, ossia

$$(-\lambda)\vec{u} = -\lambda\vec{u}.$$

Un vettore $\vec{v}$ si dice *versore* se il suo modulo è unitario, ossia $\|\vec{v}\| = 1$. Se $\vec{v} \neq 0$, il vettore $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ si dice *versore associato* a $\vec{v}$ e si indica con $vers\vec{v}$.

1.3 Lineare dipendenza e indipendenza di vettori.

Definizione 41 Per un qualsiasi numero naturale n, consideriamo n numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ed n vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in \mathbb{V}_3$. Il vettore

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n$$

si dice *combinazione lineare* dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ con coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Definizione 42 I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ si dicono *linearmente dipendenti* se e solo se esiste una n-pla $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq (0, 0, ..., 0)$, tale che

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}.$$

Si noti che se $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ allora esiste almeno un indice i tale che $\lambda_i \neq 0$. Possiamo quindi riscrivere l'eq. precedente

$$\vec{v}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\vec{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i}\vec{v}_2 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_i}\vec{v}_n.$$

Quindi, *almeno uno* tra gli n vettori linearmente dipendenti è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti.

Definizione 43 I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ si dicono *linearmente indipendenti* se e solo se non sono linearmente dipendenti, ossia, l'unica combinazione lineare nulla $(= \vec{0})$ di tali vettori è quella banale, con tutti i coefficienti nulli:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

Proposizione 44 *Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ n vettori di $\mathbb{V}_3$.*

1. *se l'insieme $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ contiene k vettori linearmente dipendenti con $k \leq n$, allora $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ sono linearmente dipendenti;*
2. *se $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n$ allora $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ sono linearmente dipendenti.*

DIM. 1. Se $k = n$ si ha banalmente la tesi. Supponiamo allora $k < n$ e riordiniamo l'insieme $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ in modo che i primi k vettori siano linearmente dipendenti. Esiste allora una k-pla $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \neq (0, 0, ..., 0)$ tale che

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}.$$

Se consideriamo la n-pla $(\lambda_1, ..., \lambda_k, 0, ..., 0)$, questa risulta essere diversa dalla n-pla nulla, e verifica

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_k\vec{v}_k + 0\vec{v}_{k+1} + ... + 0\vec{v}_n = \vec{0},$$

ossia, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ sono linearmente dipendenti.

2. Se $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n$ allora esiste la $(n+1)$-pla $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, -1) \neq (0, 0, ..., 0)$ tale che

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n - \vec{v} = \vec{0},$$

ossia, $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ sono linearmente dipendenti $\square$

Osserviamo che se $\vec{0} \in \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ allora $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ sono necessariamente linearmente dipendenti.

Definizione 45 Due o più vettori non nulli si dicono *paralleli* se hanno la stessa direzione.

Diremo che un vettore $\vec{v}$ è parallelo ad un piano α se $\vec{v}$ ha un rappresentante che giace nel piano α.

Definizione 46 Tre o più vettori si dicono *complanari* se hanno direzioni parallele ad uno stesso piano.

Il vettore nullo $\vec{0}$, per cui non è definita la direzione, si assume parallelo ad ogni vettore di $\mathbb{V}_3$; pertanto esso risulta anche complanare con ogni coppia di vettori.

Consideriamo i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ e di loro rappresentanti

$$\vec{v}_1 = \vec{OP}_1, \vec{v}_2 = \vec{OP}_2 \text{ e } \vec{v}_3 = \vec{OP}_3.$$

Allora:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 \text{ linearmente dipendente} &\quad\Leftrightarrow\quad \vec{v}_1 = \vec{0};\\
\vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ paralleli} &\quad\Leftrightarrow\quad \text{i punti } O, P_1, P_2 \text{ sono allineati};\\
\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ complanari} &\quad\Leftrightarrow\quad \text{i punti } O, P_1, P_2, P_3 \text{ sono complanari.}
\end{aligned}$$

Vediamo ora di tradurre geometricamente il concetto di lineare dipendenza, e quindi di lineare indipendenza, di n vettori al variare di n.

Proposizione 47 *Due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono paralleli.*

DIM. Se $\vec{v}_1$ o $\vec{v}_2$ è il vettore nullo allora la tesi segue banalmente. Supponiamo quindi che $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ siano entrambi non nulli. Se sono linearmente dipendenti, allora

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0) \text{ tale che } \quad \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Senza perdere di generalità, supponiamo sia $\lambda_2 \neq 0$. Allora, $\vec{v}_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\vec{v}_1$, quindi $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ per la definizione di prodotto di un numero reale per un vettore.

Viceversa, se $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$, considerando rappresentanti dei due vettori uscenti da uno stesso punto si vede facilmente che

$$\exists\lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } \vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_1$$

cioè $\vec{v}_2 - \lambda\vec{v}_1 = \vec{0}$ con $(1, -\lambda) \neq (0,0)$. Quindi, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono linearmente dipendenti $\square$

Proposizione 48 *Tre vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.*

DIM. Se ogni coppia $(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$ con $i, j \in \{1,2,3\}$ è costituita da vettori linearmente dipendenti allora $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono banalmente complanari. Supponiamo quindi, senza perdere di generalità, che $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ siano linearmente indipendenti e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linearmente dipendenti. Allora esiste una terna $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ tale che

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}.$$

Se fosse $\lambda_3 = 0$ avremmo

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{0} \text{ con } (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0),$$

contro l'ipotesi di lineare indipendenza di $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Possiamo quindi affermare che $\lambda_3 \neq 0$, da cui segue

$$\vec{v}_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\vec{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\vec{v}_2.$$

Ma allora $\vec{v}_3$ si può rappresentare con un segmento orientato $\vec{OP}_3$ del piano individuato da $\vec{v}_1 = \vec{OP}_1$ e $\vec{v}_2 = \vec{OP}_2$, cioè $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono complanari.

Viceversa, siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ complanari.

Se $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ allora $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono linearmente dipendenti, e quindi anche $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono linearmente dipendenti.

Supponiamo quindi che $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ non siano paralleli. Poniamo

$$\vec{v}_1 = \vec{OP}_1, \vec{v}_2 = \vec{OP}_2 \text{ e } \vec{v}_3 = \vec{OP}_3.$$

con O, P_1, P_2, P_3 complanari. Poichè $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ non sono paralleli, i punti O, P_1, P_2 non sono allineati. Siano Q_1 e Q_2 le intersezioni delle rette per P_3 parallele alle rette OP_1 e OP_2 rispettivamente. Allora applicando la regola del parallelogramma si ha

$$\vec{OP}_3 = \vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2,$$

dove $\vec{OQ}_1 = \lambda_1\vec{OP}_1$ e $\vec{OQ}_2 = \lambda_2\vec{OP}_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Da ciò segue

$$\vec{v}_3 = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$$

e quindi i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ risultano linearmente dipendenti $\square$

Proposizione 49 *Quattro o più vettori di $\mathbb{V}_3$ sono <u>sempre</u> linearmente dipendenti. Pertanto, in $\mathbb{V}_3$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 3.*

DIM. E' sufficiente provare che 4 vettori di $\mathbb{V}_3$ sono sempre linearmente dipendenti, poichè ogni insieme di k vettori con $k \geq 4$ conterrà 4 vettori linearmente dipendenti, e quindi per quanto visto prima i k vettori saranno ancora linearmente dipendenti.

Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \in \mathbb{V}_3$. Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono linearmente dipendenti allora anche $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sono linearmente dipendenti e la tesi è provata.

Supponiamo allora che $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ siano linearmente indipendenti, cioè non complanari. Poniamo

$$\vec{v}_1 = \vec{OP}_1, \vec{v}_2 = \vec{OP}_2,\ \vec{v}_3 = \vec{OP}_3 \text{ e } \vec{v}_4 = \vec{OP}.$$

Sia P' l'intersezione della retta per P parallela alla retta OP_3 con il piano individuato da O, P_1 e P_2. Allora:

$$\vec{v}_4 = \vec{OP'} + \vec{P'P},$$

dove $\vec{OP'} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$, essendo $\vec{OP'}$ complanare con $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, e $\vec{P'P} = \lambda_3 \vec{v}_3$ essendo $\vec{P'P}$ parallelo a $\vec{v}_3$. Pertanto,

$$\vec{v}_4 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3,$$

cioè esiste una quadrupla $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -1) \neq (0, 0, 0, 0)$ tale che

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 - \vec{v}_4 = \vec{0}.$$

Abbiamo così provato che $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sono linearmente dipendenti □

In maniera analoga alla precedente si provano le proposizioni seguenti.

Proposizione 50 *Sia $\mathbb{V}_2$ l'insieme dei vettori del piano euclideo. Tre o più vettori di $\mathbb{V}_2$ sono sempre linearmente dipendenti. Pertanto, in $\mathbb{V}_2$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 2.*

Proposizione 51 *Sia $\mathbb{V}_1$ l'insieme dei vettori di una retta. Due o più vettori di $\mathbb{V}_1$ sono sempre linearmente dipendenti. Pertanto, in $\mathbb{V}_1$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 1.*

1.4 Dimensione, Basi e componenti.

Le Proposizioni della Sezione precedente giustificano la seguente

Definizione 52 Chiamiamo *dimensione* di uno spazio di vettori geometrici il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che ammette.

La dimensione dello spazio $\mathbb{V}_3$ è 3. Si dice *base di* $\mathbb{V}_3$ ogni insieme $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ di 3 suoi vettori linearmente indipendenti (ossia, non complanari).

Analogamente:

- la dimensione del piano $\mathbb{V}_2$ è 2. Si dice *base di* $\mathbb{V}_2$ ogni insieme $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ di 2 suoi vettori linearmente indipendenti (ossia, non paralleli).

- La dimensione della retta è 1. Si dice *base di* $\mathbb{V}_1$ ogni insieme $\{\vec{v}_1\}$ di 1 suo vettore linearmente indipendente (ossia, non nullo).

Indichiamo con $\mathbb{R}^3$ l'insieme delle terne ordinate di numeri reali:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \,|x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Proposizione 53 *Sia $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base di $\mathbb{V}_3$. Allora per ogni $\vec{v} \in \mathbb{V}_3$ esiste un unica terna $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tale che*

$$\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

DIM. L'esistenza di una tale terna (x_1, x_2, x_3) si dimostra come nella Proposizione 49.

Per provarne l'unicità, supponiamo che esistano due terne (x_1, x_2, x_3), $(x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathbb{R}^3$, tali che

$$\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x'_1\vec{e}_1 + x'_2\vec{e}_2 + x'_3\vec{e}_3.$$

Allora, sottraendo membro a membro, si ha:

$$\vec{0} = (x_1 - x'_1)\vec{e}_1 + (x_2 - x'_2)\vec{e}_2 + (x_3 - x'_3)\vec{e}_3.$$

Essendo $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base di $\mathbb{V}_3$, i vettori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sono linearmente indipendenti e quindi i coefficienti di una loro combinazione lineare nulla devono essere necessariamente tutti nulli, cioè

$$x_i - x'_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3,$$

e quindi $(x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3)$ $\square$

Gli scalari x_1, x_2, x_3 si dicono *componenti* (o *coordinate*) del vettore $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Osservazione 54 Occorre sempre precisare la base rispetto alla quale si considerano le componenti di un vettore; infatti se si cambia base, cambiano anche le componenti di un fissato vettore. Soltanto il vettore nullo ha le stesse componenti (tutte nulle) rispetto ad una base qualsiasi.

Fissare una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ di $\mathbb{V}_3$ permette di stabilire la *corrispondenza biunivoca*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}_3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} & \mapsto & (x_1, x_2, x_3) \end{array}$$

dove (x_1, x_2, x_3) sono le componenti di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, ossia, permette di identificare $\mathbb{V}_3$ con $\mathbb{R}^3$. Ciò¡ si esprime scrivendo

$$\vec{v} = (x_1, x_2, x_3).$$

Si faccia attenzione al fatto che fissando un'altra base $\mathcal{B}'$ in $\mathbb{V}_3$, tale corrispondenza cambia!

L'identificazione di $\mathbf{S}_3$, $\mathbb{V}_3$ *e* $\mathbb{R}^3$ *(fissati una base* $\mathcal{B}$ *ed un punto O scelto come origine) è il principio su cui si fonda tutta la Geometria Analitica.*

La corrispondenza tra elementi di $\mathbb{V}_3$ e $\mathbb{R}^3$ permette di tradurre le operazioni geometriche sui vettori in operazioni numeriche sulle loro componenti. Ad esempio, considerati i vettori $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{u} = (y_1, y_2, y_3)$ si ha che il vettore somma di $\vec{v}$ ed $\vec{u}$ è dato da

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{u} &= (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) + (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) \\ &= x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + y_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + y_3\vec{e}_3 \\ &= (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + (x_3 + y_3)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

cioè, le componenti di $\vec{v} + \vec{u}$, rispetto alla base $\mathcal{B}$, sono la somma delle corrispondenti componenti di $\vec{v}$ e $\vec{u}$.

Analogamente, il prodotto di un numero reale λ per il vettore $\vec{v}$ è il vettore

$$\lambda\vec{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3),$$

le cui componenti sono i prodotti di λ per le componenti di $\vec{v}$.

Anche la lineare indipendenza o dipendenza dei vettori si può tradurre in condizioni sulle componenti dei vettori stessi:

Siano $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una fissata base di $\mathbb{V}_3$ e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$, con

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3),\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ e } \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

Allora:

a) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono linearmente indipendenti $\quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

Infatti, dire che $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono linearmente indipendenti equivale a dire che

$$\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

ossia, traducendo la precedente condizione sulle componenti dei vettori,

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3 w_1 = 0 \\ \lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w_2 = 0 \\ \lambda_1 u_3 + \lambda_2 v_3 + \lambda_3 w_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0).$$

Quindi, il sistema lineare omogeneo (1), di 3 equazioni nelle 3 incognite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ammette solo la soluzione banale $(0, 0, 0)$. Ciò equivale a dire, per il teorema di Rouchè-Capelli, che $rg(A) = 3$ ossia $\det A \neq 0$. Ma

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix},$$

da cui la conclusione.

b) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$

c) $\vec{u}, \vec{v}$ sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ $rg \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 2.$

Infatti, procedendo come nel caso **a)**, si giunge ad un sistema lineare omogeneo, di 3 equazioni in 2 incognite

$$(2) \qquad \begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1 = 0 \\ \lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2 = 0 \\ \lambda_1 u_3 + \lambda_2 v_3 = 0 \end{cases}$$

Perchè tale sistema lineare omogeneo ammetta solo la soluzione banale $(0,0)$ deve essere $rg(A) = 2$, dove

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}.$$

d) $\vec{u}, \vec{v}$ (non entrambi nulli) sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ $rg \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 1.$

Esercizi.

- Siano dati i vettori $\vec{v}(1,2,3)$, $\vec{w}(1,1,1)$ e $\vec{v}_1(1,-1,0)$, $\vec{v}_2(0,1,1)$, $\vec{v}_3(2,2,4)$.
    1. Si possono scrivere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$? Se sì, trovare i coefficienti della combinazione lineare.
    2. $\vec{v}_2$ è combinazione lineare di $\vec{w}, \vec{v}_1, \vec{v}_3$?
- Si consideri $\mathbb{V}_2$ ed una sua base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, i vettori

  $$\vec{v}_1 = (1-t)\vec{e}_1 + t\vec{e}_2, \qquad \vec{v}_2 = t\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

  costituiscono una base di $\mathbf{V}_2$?
- Al variare di $h \in \mathbb{R}$, si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{V}_3$ riferiti alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

  $$\vec{v}_1 = (2-h, 4-2h, 2-h), \qquad \vec{v}_2(h, 3h, 2h), \qquad \vec{v}_3(1-h, 1-2h, h).$$

    1. determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\vec{w}(1-2h, 1-h, -5h)$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.
    2. Esaminare il caso $h = 0$.

1.5 Orientazione di retta, piano e spazio

In modo analogo a quanto visto per i vettori di $\mathbb{V}_3$, se $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ è una base di $\mathbb{V}_2$, allora

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{V}_2 \quad \exists!(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } \vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$$

e la corrispondenza

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}_2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} & \mapsto & (v_1, v_2), , \end{array}$$

dove (v_1, v_2) sono le componenti di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, permette di identificare $\mathbb{V}_2$ con $\mathbb{R}^2$.

Se $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1\}$ è una base di $\mathbb{V}_1$, allora

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{V}_1 \quad \exists! v_1 \in \mathbb{R} \text{ tale che } \vec{v} = v_1\vec{e}_1$$

e la corrispondenza

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}_1 & \to & \mathbb{R} \\ \vec{v} & \mapsto & v_1, \end{array}$$

dove v_1 è la componente di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, permette di identificare $\mathbb{V}_1$ con $\mathbb{R}$.

Vogliamo ora introdurre una orientazione su una retta, in un piano e nello spazio.

- Una **retta** r si dice *orientata* quando è assegnato un vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$ parallelo ad r, ossia *una base* per i vettori paralleli ad r. Il vettore $\vec{v}$ determina *un verso di percorrenza* sulla retta.

- Un **piano** α si dice *orientato* quando è assegnata una *coppia ordinata* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ di vettori non paralleli del piano. Si noti che una base ordinata $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ determina un *verso di rotazione* nel piano nel seguente modo: se poniamo

  $$\vec{e}_1 = \vec{OP}_1 \text{ e } \vec{e}_2 = \vec{OP}_2,$$

  il verso di rotazione è quello che permette di sovrapporre OP_1 ad OP_2 descrivendo un angolo convesso.

Per convenzione, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ si dice *positiva* se determina una rotazione antioraria.

- Lo **spazio (euclideo)** si dice *orientato* quando è assegnata una *terna ordinata* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ di vettori linearmente indipendenti. Consideriamo

  $$\vec{e}_1 = \vec{OP}_1, \quad \vec{e}_2 = \vec{OP}_2 \quad \text{e} \quad \vec{e}_3 = \vec{OP}_3.$$

  Per convenzione, la base ordinata $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ si dice *positiva* se un osservatore posto nel semispazio determinato da $\vec{OP}_3$ vede ruotare $\vec{OP}_1$ per sovrapporsi ad $\vec{OP}_2$, (descrivendo l'angolo convesso $(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2})$) in senso *antiorario.*

Siano $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}$ e $\mathcal{B}' = \left\{\vec{e_i'}\right\}$ due basi ordinate di $\mathbb{V}_3$. Ogni vettore $\vec{e_i'}$ di $\mathcal{B}'$, in quanto vettore di $\mathbb{V}_3$, si potrà scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}$, ossia,

$$\vec{e_j'} = \sum_i p_{ij}\vec{e}_i.$$

La matrice $P = (p_{ij})$ (detta *matrice di passaggio* tra le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$) è tale che $\det P \neq 0$, in quanto le sue colonne sono costituite dalle componenti dei vettori $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}$ che sono linearmente indipendenti.

Indichiamo con $\boldsymbol{B}$ l'insieme di tutte le basi ordinate di $\mathbb{V}_3$ e definiamo su tale insieme la seguente relazione:

$$\{\vec{e}_i\} \sim \left\{\vec{e_i'}\right\} \iff \det P > 0 \qquad (*)$$

La relazione $\{\vec{e}_i\} \sim \left\{\vec{e_i'}\right\}$ si legge $\{\vec{e}_i\}$ è *equiversa* ad $\left\{\vec{e_i'}\right\}$. La relazione $\sim$ conserva la positività della base.

Teorema 55 *La relazione binaria $\sim$ definita in $\boldsymbol{B}$ è una relazione di equivalenza. Essa ha solo due classi di equivalenza, dette* orientazioni.

DIM. Anzitutto osserviamo che date tre basi (ordinate) $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$, ed indicate con P e Q le matrici di passaggio tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e tra $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ rispettivamente, risulta che PQ è la matrice di passaggio tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}''$. Infatti:

$$\vec{e_j''} = \sum_k q_{kj}\vec{e_k'} = \sum_k q_{kj}\left(\sum_i p_{ik}\vec{e}_i\right) = \sum_i \left(\sum_k p_{ik}q_{kj}\right)\vec{e}_i.$$

Il fatto che $\sim$ sia una relazione di equivalenza segue allora dal fatto che

$$\{A \in \mathbb{R}^{n,n} | \det A > 0\}$$

è un gruppo (sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$) rispetto al prodotto righe per colonne.

Siano ora $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}$ e $\mathcal{B}' = \left\{\vec{e_i'}\right\}$ due basi (ordinate) con $\det P < 0$. Considerata un'altra base (ordinata) $\mathcal{B}'' = \left\{\vec{e_i''}\right\}$, o $\det Q > 0$ e quindi $\mathcal{B}'' \sim \mathcal{B}'$, oppure $\det Q < 0$ ed allora (per regola di Binet) $\det(PQ) = \det P \cdot \det Q > 0$, e quindi $\mathcal{B}'' \sim \mathcal{B}$. Pertanto,

$$\boldsymbol{B}/\sim \quad = \quad \{[\mathcal{B}]_\sim, [\mathcal{B}']_\sim\} \qquad \square$$

1.6 Prodotto scalare.

Il *prodotto scalare* è l'applicazione:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

che ad ogni coppia di vettori $\vec{u}, \vec{v}$ di $\mathbb{V}_3$ associa un numero reale, che si indica con $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (e si legge $\vec{u}$ scalare $\vec{v}$), così definito:

a) se $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$ si pone $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

b) se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ si pone $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Le seguenti sono conseguenze immediate della definizione di prodotto scalare:

- *l'ortogonalità di due vettori è espressa dall'annullarsi del loro prodotto scalare*, ossia,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

  Infatti, il prodotto scalare di due vettori è nullo se $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\pi}{2}$, oppure se uno almeno dei vettori è nullo. Si noti che il vettore nullo, avendo direzione indeterminata, si può considerare ortogonale ad un qualsiasi altro vettore.

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. Infatti, se $\vec{u} = \vec{v}$ si ha $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

- $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$.

Inoltre, il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3$ (prop. commutativa).

Infatti:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\| \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

ii) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (prop. di omogeneità).

Infatti: se $\lambda = 0$ l'asserto è verificato banalmente. Supponiamo allora $\lambda \neq 0$. Si ha:

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \|\lambda \vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}}) = |\lambda| \, \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}}).$$

Se $\lambda > 0$ allora

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \|\lambda \vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}}) = \lambda \, \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}}) = \lambda \, \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

e se $\lambda < 0$ allora

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \|\lambda \vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}}) = |\lambda| \, \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\pi - \widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\,|\lambda| \, \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

iii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$ (prop. distributiva).

La dimostrazione di questa proprietà la vedremo nel seguito.

iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, e $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Infatti, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$. Inoltre,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Longleftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

1.6.1 Proiezione ortogonale di un vettore.

Siano r una retta e O, U due punti (distinti) fissati su r. Il vettore $\vec{OU}$ fissa dunque un'orientazione sulla retta r. Siano A e B due punti della retta r.

Con $\overline{AB}$ indichiamo la misura assoluta del segmento AB rispetto al segmento OU, che definisce un'unità di misura su r.

Si definisce *misura algebrica* del segmento orientato $\vec{AB}$ il numero reale, che indicheremo con AB, dato da:

$$AB = \begin{cases} +\overline{AB} & \text{se } A \text{ precede } B \\ -\overline{AB} & \text{se } B \text{ precede } A \end{cases}$$

Siano $\vec{u}$ un vettore non nullo ed r una retta orientata parallela e concorde rispetto ad $\vec{u}$. Sia $\vec{v}$ un generico vettore di $\mathbb{V}_3$. Poniamo $\vec{v} = \vec{AB}$ e siano A', B' le proiezioni ortogonali di A, B su r, cioè le intersezioni di r con i piani ad essa perpendicolari e passanti per A e B.

Il vettore $\vec{v}_u = \vec{A'B'}$ si dice *(vettore) proiezione ortogonale* di $\vec{v}$ su $\vec{u}$.

La misura algebrica di $\vec{A'B'}$ si dice *componente ortogonale* di $\vec{v}$ rispetto ad $\vec{u}$ e si indica con v_u. Pertanto,

$$\vec{v}_u = v_u vers(\vec{u}).$$

Poichè $v_u = \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, dalla definizione di prodotto scalare segue che

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

e quindi,

$$v_u = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{v} = vers(\vec{u}) \cdot \vec{v},$$

da cui

$$\vec{v}_u = (vers(\vec{u}) \cdot \vec{v}) vers(\vec{u}).$$

Osserviamo che:

- $v_u = 0$ se $\vec{u} \perp \vec{v}$;
- $v_u > 0$ se $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < \frac{\pi}{2}$;
- $v_u < 0$ se $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) > \frac{\pi}{2}$;
- $\vec{z} = \vec{v} + \vec{w} \Longrightarrow z_u = v_u + w_u$.

Possiamo ora provare la proprietà iii) (distributiva) del prodotto scalare, che afferma:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3.$$

Supponiamo innanzitutto $\vec{u} \neq \vec{0}$, altrimenti l'asserto seguirebbe banalmente. Poniamo $\vec{z} = \vec{v} + \vec{w}$. Allora,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{z} = \|\vec{u}\| \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{z}}{\|\vec{u}\|} \right) = \|\vec{u}\| \, z_u = \|\vec{u}\| \, (v_u + w_u) \\ &= \|\vec{u}\| \, v_u + \|\vec{u}\| \, w_u = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

Consideriamo ora un piano α ed un generico vettore $\vec{v}$ di $\mathbb{V}_3$ rappresentato da $\vec{AB}$. Siano A'', B'' le proiezioni ortogonali di A, B su α, cioè le intersezioni di α con le rette passanti per A e B perpendicolari ad α. Il vettore $\vec{v_\alpha}$ rappresentato dal segmento orientato $\vec{A''B''}$ si dice *(vettore) proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su α.*

Tra i rappresentanti di $\vec{v}$ consideriamo il segmento orientato $\vec{OP}$ con $O \in \alpha$. Sia n una retta orientata perpendicolare ad α. Se $\vec{n}$ è un vettore parallelo alla retta n (ossia, perpendicolare alla retta r), allora la relazione

$$\vec{v} = \vec{v_n} + \vec{v_\alpha}$$

fornisce una *decomposizione ortogonale* di $\vec{v}$, secondo un vettore parallelo ed uno perpendicolare ad α.

Definizione 56 Una base di $\mathbb{V}_3$ si dice *ortonormale* se è costituita da *versori a due a due ortogonali.*

Nel seguito, con $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ denoteremo sempre una *base ortonormale positiva.*

Siano $\vec{v}$ e $\vec{u}$ due vettori di $\mathbb{V}_3$, le cui componenti rispetto ad una base ortonormale positiva $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ sono $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Allora,

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) \cdot (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}).$$

Applicando le proprietà ii) e iii) del prodotto scalare e considerando che

$$\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\} \text{ base ortonormale} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \end{cases}$$

si ha:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) \cdot (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3.$$

Quindi,

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_i v_i u_i$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2},$$

e

$$\cos(\widehat{\vec{u}\vec{v}}) = \frac{v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ si ha:

$$\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{v}}) = \frac{v_1}{\|\vec{v}\|}, \qquad \cos(\widehat{\vec{j}, \vec{v}}) = \frac{v_2}{\|\vec{v}\|} \quad \text{e} \quad \cos(\widehat{\vec{k}, \vec{v}}) = \frac{v_3}{\|\vec{v}\|}.$$

Tali numeri si dicono *coseni direttori* del vettore $\vec{v}$, e sono le componenti rispetto alla base $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ del versore di $\vec{v}$.

1.7 Prodotto vettoriale

Definizione 57 Il *prodotto vettoriale* è l'applicazione:

$$\begin{aligned} \wedge : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 &\rightarrow \mathbb{V}_3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} \wedge \vec{v} \end{aligned}$$

che ad ogni coppia di vettori $\vec{u}, \vec{v}$ di $\mathbb{V}_3$ associa un vettore, che si indica con $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (e si legge "$\vec{u}$ vettoriale $\vec{v}$") così definito:

a) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli (in particolare, se uno dei due è nullo):

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0};$$

b) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono paralleli, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è il vettore che ha:

- **modulo** $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, sen(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$;

- **direzione** ortogonale sia ad $\vec{u}$ che a $\vec{v}$;

- **verso** tale che la terna $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ sia positiva.

Come conseguenza immediata della definizione di prodotto vettoriale si ha che *il modulo di $\vec{u} \wedge \vec{v}$ rappresenta l'area del parallelogramma che ha come lati consecutivi i rappresentanti di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ aventi la stessa origine.*

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

i) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3$ (prop. *anticommutativa*);

ii) $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (prop. di omogeneità);

infatti: se $\lambda = 0$ l'asserto è verificato banalmente. Supponiamo allora $\lambda \neq 0$.
I vettori $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v}$ e $\lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$ hanno:

- la stessa direzione (quella perpendicolare a $\vec{u}$ e $\vec{v}$),

- stesso modulo. Infatti:

$$\|(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v}\| = \|\lambda \vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, sen(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}}) = |\lambda| \, \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, sen(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}}).$$

  Ora, se $\lambda > 0$ si ha $sen(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}}) = sen(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ e se $\lambda < 0$ si ha $sen(\widehat{\lambda \vec{u} \vec{v}}) = sen(\pi - \widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = sen(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, quindi

$$sen(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}}) = sen(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}),$$

  da cui segue

$$\|(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v}\| = |\lambda| \, \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, sen(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = |\lambda| \, \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})\|$$

- stesso verso.

  Questo è ovvio se $\lambda > 0$ è. Se $\lambda < 0$, basta verificare che le terne $(\vec{u}, \vec{v}, (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v})$ e $(\vec{u}, \vec{v}, \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}))$ sono entrambe positive.

iii) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$ (prop. distributiva).

Fissiamo in $\mathbb{V}_3$ la base ortonormale $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$. Per i possibili prodotti vettoriali tra i vettori di tale base, si ha:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \wedge \vec{i} = 0 & \vec{j} \wedge \vec{j} = 0 & \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}, \\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} & \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} & \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}. \end{array}$$

Osservazione 58 *Il prodotto vettoriale* non è associativo *(quindi, non è una operazione su $\mathbb{V}_3$). Infatti:*

$$(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0} \qquad \textit{mentre} \qquad \vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}.$$

Siano $\vec{v}$ e $\vec{u}$ due vettori di $\mathbb{V}_3$, le cui componenti rispetto ad una fissata base ortonormale positiva $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ siano $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Allora,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \wedge (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}).$$

Applicando le proprietà ii) e iii) del prodotto vettoriale si ha:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= u_1v_2\vec{k} - u_1v_3\vec{j} - u_2v_1\vec{k} + u_2v_3\vec{i} + u_3v_1\vec{j} - u_3v_2\vec{i} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \end{aligned}$$

Quindi, il prodotto vettoriale di $\vec{u}$ per $\vec{v}$ usando le componenti dei vettori rispetto ad una *base ortonormale positiva*, si può esprimere mediante lo *sviluppo formale* del determinante

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

(non è un determinante in senso proprio, in quanto $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ non sono elementi del campo).

1.8 Prodotto misto

Definizione 59 Il *prodotto misto* della terna ordinata di vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$ è il numero reale

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Dalla definizione è evidente l'ordine con cui vanno eseguite le operazioni: non avrebbe alcun senso, infatti, l'operazione $\vec{u} \wedge (\vec{v} \cdot \vec{w}\ )$.

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ rispetto ad una fissata *base ortonormale positiva* $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, allora

$$\begin{aligned} &\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}) \\ &= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

da cui

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Il prodotto misto gode delle seguenti proprietà:

i) $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$.

Segue dalla proprietà commutativa del prodotto scalare.

ii) $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$.

Infatti:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{w} \cdot \vec{u} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \qquad (**)$$

osserviamo che la matrice $(**)$ si ottiene da $(*)$ dopo aver effettuato 2 scambi sulle righe. Per le proprietà del determinante si ha quindi

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

da cui $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Come conseguenze della definizione stessa di prodotto misto si hanno:

a) $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ sono complanari.

Infatti:

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ complanari} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$

b) $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \Longleftrightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ è una base positiva.

Infatti:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Quindi, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ è una base equiversa alla base $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, che è positiva.

c) Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono linearmente indipendenti allora $|\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}|$ è il volume del parallelepipedo costruito sui rappresentanti dei tre vettori aventi l'origine in comune.

Infatti:

$$|\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \left| \cos(\widehat{\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}}) \right|,$$

dove

$$\widehat{\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}} = \begin{cases} \theta & \text{se } \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ è una base positiva,} \\ \pi - \theta & \text{se } \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ è una base negativa.} \end{cases}$$

In ogni caso, $\left| \cos(\widehat{\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}}) \right| = \cos\theta$ e quindi

$$|\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\theta,$$

dove $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ rappresenta l'area di base del parallelepipedo e $\|\vec{w}\| \cos\theta$ la sua altezza.

Capitolo 2

Geometria analitica del piano

La Geometria Analitica, nata con Cartesio (intorno al 1637), ha lo scopo di tradurre un problema geometrico in uno analitico, cioè tradurre, mediante l'uso delle coordinate, un problema riguardante figure geometriche in un problema riguardante numeri ed equazioni. Ma è ancora più interessante l'inverso: interpretare geometricamente equazioni e loro sistemi. In tal modo la geometria e l'analisi si illuminano a vicenda ed è possibile passare dallo spazio dell'intuizione a spazi astratti.

2.1 Coordinate cartesiane nel piano

Un **riferimento ortonormale cartesiano** del piano è individuato da una base ortonormale (positiva) $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ dei vettori del piano, e da un punto O scelto come origine del riferimento. Il riferimento si indica con $RC(O, x, y)$.

Dato un punto P del piano,

$$P(x, y) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Fissare un riferimento $RC(O, x, y)$ permette quindi di stabilire *corrispondenze biunivoche* tra i punti del piano, i vettori del piano e le coppie di $\mathbb{R}^2$.

Assi coordinati:

asse x: retta per O e parallela a $\vec{i}$. Ha equazione $y = 0$.

asse y: retta per O e parallela a $\vec{j}$. Ha equazione $x = 0$.

Dati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ del piano,

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

è il vettore posizione di P_2 rispetto a P_1. La *distanza* tra P_1 e P_2 è quindi data da:

$$d(P_1, P_2) = \|\vec{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Il *punto medio* del segmento $\bar{P_1 P_2}$ è il punto M di coordinate

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

2.2 Retta

Due punti P_1, P_2 non coincidenti individuano una retta r del piano:

$$P \in r \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{P_1 P} \parallel \vec{P_1 P_2}.$$

Posto $P_i(x_i, y_i)$, $P(x, y)$, il parallelismo si può esprimere in diversi modi:

Equazione cartesiana di una retta del piano.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante, si ha l'*equazione cartesiana della retta:*

$$r : ax + by + c = 0, \qquad (a, b) \neq (0, 0).$$

I parametri (a, b) rappresentano le coordinate di un vettore (non nullo) *perpendicolare* alla retta r. Di conseguenza, i parametri $(b, -a)$ rappresentano le coordinate di un vettore *parallelo* a r.

Equazioni parametriche di una retta del piano.

$$\vec{P_1 P} = t\, \vec{P_1 P_2}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ossia,

$$\begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

cioè,

$$\begin{cases} x = x_1 + lt, \\ y = y_1 + mt, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

che sono dette *equazioni parametriche della retta*. I parametri (l, m) sono le coordinate di un vettore parallelo ad r, e si dicono *parametri direttori* della retta. Eliminando il parametro t si perviene all'equazione cartesiana.

Equazioni di una retta sotto forma di rapporti uguali.

$$\vec{P_0 P} \parallel \vec{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

da cui si ottengono le *equazioni della retta sotto forma di rapporti uguali*:

$$r : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

con la convenzione che se uno dei denominatori è nullo allora deve essere posto uguale a zero il numeratore corrispondente.

Esempio. Dati i punti $P_1(1,0)$, $P_2(1,1)$, troviamo le equazioni parametriche, sotto forma di rapporti unguali e cartesiana della retta passante per essi. Si ha $\vec{P_1P_2} = (0,1)$, dunque:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad\qquad \frac{x-1}{0} = \frac{y-0}{1}, \text{ e} \qquad\qquad x = 1.$$

Mutue posizioni di due rette.

Siano $r : ax + by + c = 0$ ed $r' : a'x + b'y + c' = 0$ due rette del piano. Volendo studiare la loro mutua posizione, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

Risulta:

$$\begin{array}{llll} \text{sistema incompatibile} & \iff rg(A) \neq rg(\tilde{A}) & \iff r \cap r' = \emptyset, \\ \text{sistema compatibile} & \iff rg(A) = rg(\tilde{A}) & \iff r \cap r' \neq \emptyset. \end{array}$$

Inoltre,

$$\begin{array}{lll} rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2 & \iff 1 \text{ soluzione} & \iff r \cap r' = \{P_0\}, \\ rg(A) = rg(\tilde{A}) = 1 & \iff \infty^1 \text{ soluzioni} & \iff r \equiv r'. \end{array}$$

La discussione di tale sistema lineare giustifica le seguenti definizione e risultati.

Definizione 60 Due rette r, r' del piano si dicono

- *parallele* (si scrive $r \parallel r'$) se $r \cap r' = \emptyset$ *oppure* $r \equiv r'$
- *incidenti* se esiste un punto P_0 del piano per cui $r \cap r' = \{P_0\}$.

Proposizione 61 *Due qualsiasi rette r, s del piano euclideo o sono parallele o sono incidenti.*

Proposizione 62 *Il parallelismo di rette del piano è una relazione di equivalenza.*

Si osservi che

$$r \parallel r' \iff (b, -a) \sim (b', -a') \iff (a, b) \sim (a', b') \iff \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b},$$

dove "$\sim$" sta per "è proporzionale a".

Due rette r ed r' sono *perpendicolari* se e solo se tali sono i loro parametri direttori. Quindi:

$$r \perp r' \Leftrightarrow (l, m) \perp (l', m') \Leftrightarrow (l, m) \cdot (l', m') = 0 \Leftrightarrow (a, b) \cdot (a', b') = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0.$$

Esempi ed esercizi.

- Le rette $x - y = 1$ e $3x - 3y = 1$ sono parallele; le rette $x + 2y = 1$ e $3x + 6y = 3$ sono parallele e coincidenti.
- Le rette $x - 2y = 1$ e $4x + 2y = 1$ sono perpendicolari.

Angoli tra due rette.

Siano r ed r' due rette *orientate* e $\vec{r}$, $\vec{r'}$ due vettori concordemente orientati con r ed r'. Allora

$$\cos(\widehat{r, r'}) = \cos(\widehat{\vec{r}, \vec{r'}}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r'}}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{r'}\|} = \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2 + m^2}\sqrt{l'^2 + m'^2}}.$$

Se, invece, le due rette non sono orientate, l'angolo $\widehat{r, r'}$ può assumere due valori tra loro supplementari:

$$\cos(\widehat{r, r'}) = \pm \frac{\vec{r} \cdot \vec{r'}}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{r'}\|} = \pm \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2 + m^2}\sqrt{l'^2 + m'^2}}.$$

Fasci di rette.

Definizione 63 Siano r ed r' due rette del piano. Se $r \cap r' = \{A\}$, si chiama *fascio di rette proprio* la totalità delle rette del piano passanti per A, che si dice *centro* del fascio proprio.

Se $r \parallel r'$, la totalità delle rette del piano parallele ad r (o ad r') costituisce il *fascio di rette improprio* individuato dalla direzione di r (e di r').

Se $r\colon ax + by + c = 0$ e $r'\colon a'x + b'y + c' = 0$, il corrispondente fascio di rette è rappresentato da

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0,$$

al variare dei parametri omogenei λ e μ, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Se $\lambda \neq 0$, ponendo $k = \mu/\lambda$, il fascio è rappresentato dall'equazione

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$$

(*rappresentazione non omogenea*), che esplicita il fatto che le rette di un fascio sono ∞^1.

Si osservi che nell'equazione precedente, al variare di k in $\mathbb{R}$, la retta r' non è rappresentata; essa si può pensare ottenuta per $k = \pm\infty$.

Esempi ed esercizi.

- Determinare il fascio di rette del piano di centro $A(-1, 1)$.

Distanze.

Geometricamente, la distanza di un punto P da una retta r, è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su r. Per determinare H, si trova la retta per P e perpendicolare ad r e la si interseca con r.

Da tale costruzione segue che in termini analitici, se $P(x_0, y_0)$ ed $r : ax+by+c = 0$, allora

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dati due punti distinti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, la *retta assiale del segmento* AB è il luogo dei punti del piano, equidistanti da A e B. La sua equazione (necessariamente di I grado) è

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2.$$

Distanza di due rette parallele r, r'*:* è la distanza tra r ed un qualsiasi punto di r'.

2.3 Circonferenza

Definizione 64 Chiamiamo *circonferenza* l'insieme dei punti P del piano tali che $\|\vec{CP}\| = R$, dove C è un punto fisso e R un numero reale positivo.

Rispetto ad un sistema di riferimento $RC(O, x, y,)$, se $C(\alpha, \beta)$ e $P(x, y)$, da $\|\vec{CP}\| = R$ si ha

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

che dà l'equazione cartesiana di una circonferenza generica. Equivalentemente:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0,$$

dove abbiamo posto $\delta = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$. Viceversa, ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza Σ di centro $C(\alpha, \beta)$, dove $\alpha = -a/2$, $\beta = -b/2$, e di raggio $R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$. Si ha:

$$\begin{array}{lcl}
\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} - c > 0 & \Rightarrow & \text{circonferenza ordinaria,} \\
\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} - c = 0 & \Rightarrow & \text{circonferenza di raggio nullo,} \\
\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} - c < 0 & \Rightarrow & \text{circonferenza immaginaria.}
\end{array}$$

Dati una circonferenza γ ed una retta r del piano, tale retta rispetto a γ è

- *esterna* se $d(C, r) > R$. In tal caso, $\gamma \cap r = \emptyset$.
- *tangente* se $d(C, r) = R$. In tal caso, $\gamma \cap r = \{P_0\}$.
- *secante* se $d(C, r) < R$. In tal caso, $\gamma \cap r = \overline{AB}$ è una *corda* (un segmento).

Sia ora $P_0(x_0, y_0)$ un punto della circonferenza γ di equazione

$$\gamma : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0.$$

Vogliamo determinare l'equazione della retta r, tangente γ nel punto P_0. Tale retta passa per P_0 ed è perpendicolare al vettore $\vec{CP_0}$, con C centro di γ. Allora si ha

$$\vec{CP_0} = (x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$$

da cui

$$r : (x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) = 0.$$

2.3.1 Esempi ed esercizi.

1. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha come punti diametralmente opposti $A(3, 0)$ e $B(1, 1)$.

2. Determinare le rette del piano che soddisfano le seguenti condizioni:

   (a) r : passante per $A(1, -2)$ e parallela al vettore $\vec{u} = (3, 2)$.

   (b) s : passante per $A(1, -2)$ e $B(2, 2)$.

   (c) t : passante per $A(1, -2)$ e perpendicolare al vettore $\vec{u} = (3, 2)$.

3. Trovare il punto A', simmetrico del punto $A(1, 1)$ rispetto alla retta $r : 2x + 4y + 1 = 0$. (Ripetere per $A(0, 0)$ ed $r : x - 3y + 2 = 0$).

4. Dati i punti $A(1, -1)$, $B(-2, 3)$ e la retta $r : x - y + 3 = 0$, trovare

   (a) i punti $P \in r$ tali che $d(A, P) = d(A, B)$,

   (b) il punto $Q \in r$ tali che $d(A, Q) = d(B, Q)$,

   (c) l'equazione dell'asse del segmento AB.

5. Data la retta $r : x - 3y + 2 = 0$, trovare i punti dell'asse delle x, aventi distanza 3 da r. (Ripetere per l'asse y).

6. Studiare la mutua posizione delle seguenti coppie di rette:

   (a) $r : x + y - 2 = 0$, $s : 2x - 1 = 0$,

   (b) $r : x + y - 2 = 0$, $s : 4x + 4y - 3 = 0$,

   (c) $r : 2x + ky + 1 = 0$, $s : x - y + 1 = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

7. Determinare gli angoli formati dalle seguenti coppie di rette:

   (a) $r : x + 3y - 1 = 0$, $s : 2x + y + 5 = 0$,

   (b) $r : x + y - 5 = 0$, $s : x = 1 - t, y = 2 + t$,

8. Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$:

   (a) di centro $A(2, 1)$ e raggio 2,

   (b) di centro $B(0, -2)$ e passante per $P(3, 1)$,

   (c) di centro $C(1, -3)$ e tangente ad $r : x - y + 3 = 0$,

   (d) di centro $E(1, 1)$, e secante la retta $s : x - y + 2 = 0$ in una corda di lunghezza 2.

9. Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$ tangente ad $r : x + y + 3 = 0$ in $A(1, -4)$, e passante per l'origine.

10. Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$, passante per $A(1, -1)$, $B(0, 2)$ e $D(-1, 3)$.

11. Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$, passante per $A(1, 2)$, $B(-1, -2)$ ed avente centro sulla retta $r : x = 2 + t, y = 1 - t$. Trovare poi la retta tangente a $\mathcal{C}$ in A, e le rette tangenti a $\mathcal{C}$ e passanti per il punto $D(10, 0)$.

2.4 Esercizi di riepilogo.

1. Determinare le equazioni delle bisettrici delle rette

$$r : x - 1 = 0 \,, \qquad s : x + 2y - 1 = 0 \,.$$

   Suggerimento: si osservi che se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ sono i *versori* associati alle rette, allora $\vec{r}+\vec{s}$ e $\vec{r}-\vec{s}$ danno le direzioni delle bisettrici.

2. Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per l'origine O ed è tangente nel punto $P(1,2)$ alla retta

$$r : \; x - y + 1 = 0 \,.$$

Capitolo 3

Geometria analitica dello spazio

3.1 Coordinate cartesiane

Un **riferimento ortonormale cartesiano** dello spazio euclideo è individuato da una base ortonormale (per convenzione, positiva) $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ dei vettori dello spazio $\mathbb{V}_3$, e da un punto O scelto come origine del riferimento. Il riferimento si indica con $RC(O, x, y, z)$.

Si noti che la base $\mathcal{B} = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ di fatto stabilisce una orientazione dello spazio.

Le rette per O individuate da $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, si dicono rispettivamente *asse delle ascisse* o asse x, *asse delle ordinate* o asse y e *asse delle quote* o asse z. I piani individuati da due assi si dicono piani coordinati e si indicano con π_{xy}, π_{xz} e π_{yz}.

Sia P_0 un punto dello spazio. Il vettore $\vec{OP_0}$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B} = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, cioè

$$\exists!(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \text{ tale che } \vec{OP_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}.$$

(x_0, y_0, z_0) sono dette *coordinate cartesiane (ortogonali)* del punto P_0.

Sia $\vec{u} = \vec{P_1P_2}$ con $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Allora,

$$\vec{u} = \vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

3.1.1 Punto medio di un segmento. Distanza di due punti.

Siano $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ due punti dello spazio e sia $M(x_M, y_M, z_M)$ il punto medio del segmento P_1P_2.

Allora, M è l'unico punto dello spazio tale che $\vec{P_1M} = \vec{MP_2}$, ossia,

$$(x_M - x_1)\vec{i} + (y_M - y_1)\vec{j} + (z_M - z_1)\vec{k} = (x_2 - x_M)\vec{i} + (y_2 - y_M)\vec{j} + (z_2 - z_M)\vec{k}.$$

Poichè $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ è una base di $\mathbb{V}_3$, si ha $\begin{cases} x_M - x_1 = x_2 - x_M \\ y_M - y_1 = y_2 - y_M \\ z_M - z_1 = z_2 - z_M \end{cases}$, da cui, risolvendo,

$$(x_M, y_M, z_M) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{z_2 + z_1}{2}\right).$$

Se vogliamo calcolare la distanza dei punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, basta osservare che tale distanza è il modulo del vettore $\vec{P_1P_2}$, ossia

$$\overline{P_1P_2} = \left\|\vec{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3.1.2 Area di un triangolo.

Considerati tre punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3(x_3, y_3, z_3)$, si ha che l'area del triangolo da essi individuato è la metà del modulo di $\vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_1P_3}$.

Infatti, sia T il triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3 e sia h l'altezza relativa al lato P_1P_2. Allora,

$$\left\|\vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_1P_3}\right\| = \left\|\vec{P_1P_2}\right\| \left\|\vec{P_1P_3}\right\| sen(\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}) = \left\|\vec{P_1P_2}\right\| h = 2A_T,$$

da cui

$$A_T = \frac{1}{2}\left\|\vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_1P_3}\right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \right\|.$$

Osservazione (Riferimenti affini).

Un *riferimento affine* $\mathcal{R}(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ è costituito da un'origine O e da una qualsiasi terna di vettori linearmente indipendenti. Le coordinate affini (x, y, z) di un punto P rispetto ad $\mathcal{R}$ sono definite nello stesso modo delle coordinate cartesiane ortogonali, cioè si ha:

$$\vec{OP} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}.$$

Numerose formule, come quelle per le coordinate del punto medio di un segmento, valgono anche in coordinate affini, mentre quelle in cui interviene il prodotto scalare, come quelle riguardanti distanze ed angoli, sono molto diverse se la base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ non è ortonormale.

3.2 Rappresentazione di un piano nello spazio

Un piano π può essere individuato geometricamente in diversi modi:

Piano π per un punto P_0 e perpendicolare ad un vettore $\vec{n}$ non nullo.

Siano P_0 il punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) ed $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ un vettore non nullo $((a, b, c) \neq (0, 0, 0))$.

Un generico punto $P(x, y, z)$ dello spazio appartiene al piano π se e solo se

$$\vec{P_0P} \perp \vec{n},$$

con $\vec{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$. Quindi:

$$\vec{P_0P} \perp \vec{n} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

da cui si ricava l'*equazione cartesiana* del piano

$$\pi : ax + by + cz + d = 0, \tag{3.2.1}$$

avendo posto $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Osserviamo che se moltiplichiamo la (3.2.1) per un fattore di proporzionalità ρ non nullo arbitrario, otteniamo una nuova equazione

$$\pi : \rho ax + \rho by + \rho cz + \rho d = 0,$$

che rappresenta lo stesso piano π. In altre parole, la quadrupla formata dai coefficienti e dal termine noto dell'equazione di un piano, è definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Si chiamano *parametri di giacitura* di un piano $r\alpha$ le coordinate di un arbitrario vettore $\vec{n} \neq \vec{0}$ ortogonale ad α. Per quanto detto, se $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, allora $\vec{n} = (a, b, c)$ (ma anche ogni vettore $(\rho a, \rho b, \rho c)$, con $\rho \neq 0$) determina i parametri di giacitura di α. Quindi, *i parametri di giacitura (a, b, c) di un piano sono individuati a meno di un fattore (non nullo) di proporzionalità.*

Osserviamo, inoltre fissato un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, al variare di a, b, c l'equazione

$$\mathcal{F}(P_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{3.2.2}$$

rappresenta la totalità dei piani passanti per P_0, detta anche *stella di piani di centro* P_0.

Se nell'equazione (3.2.1) uno o più coefficienti sono nulli, allora il piano in questione è in una posizione particolare rispetto al sistema di riferimento.

Ad esempio:

- $d = 0 \Longrightarrow \pi$ passa per l'origine O;

- $c = 0 \Longrightarrow \pi : ax + by + d = 0$. In questo caso, π è un piano perpendicolare al vettore $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$, e quindi parallelo all'asse z. Se inoltre anche d è nullo allora πcontiene l'asse z;

- analogamente, le equazioni $by + cz + d = 0$ e $ax + cz + d = 0$ rappresentano piani rispettivamente paralleli all'asse x ed all'asse y;
- se sono nulli due dei coefficienti dell'equazione (1), essa si può scrivere in una delle seguenti forme:
  - $\cdot$ $a = b = 0 \Rightarrow \pi : z = k$. In questo caso π è un piano parallelo al piano coordinato π_{xy}, che ha equazione $z = 0$;
  - $\cdot$ $b = c = 0 \Rightarrow \pi : x = k$. In questo caso π è un piano parallelo al piano coordinato π_{yz}, che ha equazione $x = 0$;
  - $\cdot$ $a = c = 0 \Rightarrow \pi : y = k$. In questo caso π è un piano parallelo al piano coordinato π_{xz}, che ha equazione $y = 0$.

Piano π per un punto P_0 e parallelo a due vettori indipendenti.

Siano P_0 il punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) e $\vec{u}(l, m, n)$, $\vec{v}(l', m', n')$ due vettori linearmente indipendenti.

Un generico punto $P(x, y, z)$ dello spazio appartiene al piano π passante per P_0 e parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se e solo se i vettori $\vec{P_0P}, \vec{u}, \vec{v}$ sono complanari, ossia

$$\vec{P_0P}, \vec{u}, \vec{v} \text{ complanari} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{P_0P} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{P_0P} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0,$$

da cui, essendo $\vec{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$, si ricava

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0,$$

che è un'equazione della forma (3.2.2).

La complanarità dei vettori $\vec{P_0P}, \vec{u}, \vec{v}$ può essere espressa anche nel seguente modo:

$$\vec{P_0P}, \vec{u}, \vec{v} \text{ complanari} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists t, t' \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \vec{P_0P} = t\vec{u} + t'\vec{v},$$

da cui, passando alle componenti, si ottengono le *equazioni parametriche* del piano:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't', \end{cases} \qquad t, t' \in \mathbb{R}, \tag{3.2.3}$$

che forniscono le coordinate di tutti i punti del piano al variare dei due parametri t, t'.

Piano π per tre punti non allineati.

Siano $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tre punti non allineati. In questo caso, basta considerare $\vec{u} = \vec{P_0P_1}$ e $\vec{v} = \vec{P_0P_2}$ e quindi

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0. \end{vmatrix} = 0.$$

Osserviamo che si può passare da una rappresentazione del piano π ad un'altra. Ad esempio si può passare dalle (3.2.3) alla (3.2.1) ricavando t, t' attraverso due delle equazioni in (3.2.3) e sostituendo nella terza, procedendo cioè con l'*eliminazione dei parametri*.

Viceversa, si può passare dalla (3.2.1) alle (3.2.3) assumendo come parametri due delle incognite e calcolando la terza mediante la (3.2.1).

3.2.1 Mutue posizioni di due piani. Ortogonalità.

Siano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ due piani dello spazio. Volendo studiare la loro mutua posizione, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

Risulta:

$$\begin{array}{lclcl} \text{sistema incompatibile} & \iff & rg(A) \neq rg(\tilde{A}) & \iff & \alpha \cap \alpha' = \emptyset, \\ \text{sistema compatibile} & \iff & rg(A) = rg(\tilde{A}) & \iff & \alpha \cap \alpha' \neq \emptyset. \end{array}$$

Inoltre, se il sistema è compatibile:

$$\begin{array}{lclcl} rg(A) = rg(\tilde{A}) = 1 & \iff & \infty^2 \text{ soluzioni} & \iff & \alpha \equiv \alpha', \\ rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2 & \iff & \infty^1 \text{ soluzioni} & \iff & \alpha \cap \alpha' = r, \end{array}$$

dove r, come vedremo nella relativa sezione, è una retta. La discussione di tale sistema lineare giustifica le seguenti definizione e risultati.

Definizione 65 Due piani α, α' dello spazio si dicono

- *paralleli* (si scrive $\alpha \parallel \alpha'$) se $\alpha \cap \alpha' = \emptyset$ *oppure* $\alpha \equiv \alpha'$;
- *incidenti* se non sono paralleli.

Proposizione 66 *Il parallelismo di piani è una relazione di equivalenza nell'insieme* Π *di tutti i piani dello spazio euclideo.*

Dati i piani $\alpha : ax+by+cz+d=0$ e $\alpha' : a'x+b'y+c'z+d'=0$, siano $\vec{n}(a,b,c)$ ed $\vec{n'}(a',b',c')$ i vettori perpendicolari ad α e α' rispettivamente, con $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ e $(a',b',c')\neq(0,0,0)$. Allora:

$$\alpha \parallel \alpha' \quad\iff\quad \vec{n}\parallel\vec{n'} \quad\iff\quad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

Se poi

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$$

allora i due piani α e α' coincidono.

I piani α e α' si dicono *ortogonali* se i vettori $\vec{n}$ e $\vec{n'}$ sono tra loro ortogonali, da cui:

$$\alpha\perp\alpha' \quad\iff\quad \vec{n}\perp\vec{n'} \quad\iff\quad aa'+bb'+cc'=0.$$

3.3 Rappresentazione di una retta nello spazio

Due punti distinti P_1 e P_2 individuano una retta r:

$$P\in r \quad\iff\quad \vec{P_1P}, \vec{P_1P_2} \text{ sono linearmente dipendenti.}$$

La dipendenza lineare si può esprimere nei seguenti modi.

Equazioni cartesiane di una retta.

$$rg\begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{pmatrix}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

che si può porre nella forma

$$r\colon \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0. \end{cases}$$

Queste ultime sono dette *equazioni cartesiane della retta*. Quindi, ogni retta r si può scrivere come intersezione di due piani incidenti α ed α', di equazioni cartesiane

$$\alpha\colon ax+by+cz+d=0, \qquad \alpha'\colon a'x+b'y+c'z+d'=0,$$

e tali che

$$rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2.$$

Osservazione 67 Si osservi che la retta r *non determina univocamente i piani* α ed α': due altri piani *distinti* passanti per r (ce ne sono ∞^1) individuano la stessa retta.

Si chiamano *parametri direttori* di r le coordinate di un arbitrario vettore $\vec{r} \neq \vec{0}$ parallelo ad r. Ovviamente, se $P_1, P_2 \in r$ e $P_1 \neq P_2$, allora $\vec{r} = \vec{P_1P_2}$ è parallelo ad r, e quindi parametri direttori di r sono

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$$

Osservazione 68 I parametri direttori (l, m, n) di una retta sono individuati a meno di un fattore (non nullo) di proporzionalità.

Equazioni parametriche di una retta.

I punti $P \in r$ sono tutti e soli quelli per cui esiste $t \in \mathbb{R}$, tale che

$$\vec{P_1P} = t\vec{P_1P_2},$$

da cui,

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) = x_1 + lt \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) = y_1 + mt \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) = z_1 + nt \end{cases}$$

che sono dette *equazioni parametriche della retta.* Eliminando il parametro t si perviene alle equazioni cartesiane.

Equazioni di una retta sotto forma di rapporti uguali.

$$\vec{P_0P} \parallel \vec{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

dove $\vec{v}(l, m, n)$ è un vettore non nullo parallelo alla retta r, da cui si ottengono le *equazioni della retta sotto forma di rapporti uguali*:

$$r : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

con la convenzione che se uno dei denominatori è nullo allora deve essere posto uguale a zero il numeratore corrispondente.

Osserviamo che è possibile ottenere le equazioni cartesiane di una retta r a partire da quelle parametriche semplicemente eliminando il parametro t da quest'ultime.

Se invece si hanno le equazioni di r sotto forma di rapporti uguali allora si ottengono le equazioni cartesiane ponendo:

$$r : \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}, \\[2ex] \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}. \end{cases}$$

Osservazione 69 Consideriamo una retta r in forma cartesiana:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

Come sappiamo, i vettori $\vec{n}(a, b, c)$ ed $\vec{n'}(a', b', c')$ sono perpendicolari ad α e α' rispettivamente. Ma allora, un vettore $\vec{r}(l, m, n)$ parallelo ad r risulta perpendicolare sia ad $\vec{n}$ che a $\vec{n}'$, per cui:

$$\vec{r} \parallel \vec{n} \wedge \vec{n'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \vec{k}$$

e quindi,

$$\vec{r} \parallel \vec{n} \wedge \vec{n'} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (l, m, n) \sim \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right).$$

Noto il vettore $\vec{r}(l, m, n)$, è possibile scrivere le equazioni parametriche della retta r scegliendo un punto (x_0, y_0, z_0) su r.

3.3.1 Fasci di piani.

Definizione 70 *La totalità dei piani paralleli ad uno stesso piano si dice* fascio improprio di piani*. La totalità dei piani passanti per una retta r si dice* fascio proprio di piani *di asse r.*

Come visto in precedenza, due piani sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura, ossia, parametri di giacitura proporzionali. Ne segue che, dato un piano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ $((a, b, c) \neq (0, 0, 0))$, l'equazione

$$\mathcal{F}(\alpha) : \; ax + by + cz + k = 0, \quad k \in \mathbb{R},$$

rappresenta il fascio di piani paralleli ad α.

Consideriamo ora una retta

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con } rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

La totalità dei piani passanti per r è rappresentata dall'equazione

$$\mathcal{F}(r) : \lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0), \qquad (*)$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Infatti ogni punto di r ha coordinate che soddisfano la $(*)$. Inoltre, per ogni punto dello spazio che non appartenga ad r, passa uno ed un solo piano di equazione $(*)$.

Al variare di λ e μ si ottengono tutti i piani per r. In particolare, per $(\lambda, \mu) = (1,0)$ si ottiene il piano α, mentre per $(\lambda, \mu) = (0,1)$ si ottiene il piano α'.
La $(*)$ prende il nome di *equazione omogenea del fascio proprio di asse* r.
Si osservi che quando $\lambda \neq 0$, posto $k = \frac{\mu}{\lambda}$, dall'equazione omogenea otteniamo

$$\mathcal{F}(r) : ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0, \quad k \in \mathbb{R} \qquad (**).$$

La $(**)$ rappresenta ancora il fascio di piani passanti per r, con l'esclusione del piano α', che non si ottiene per nessun valore di reale di k (si ottiene per $k \to \infty$).

La $(**)$ prende il nome di *equazione non omogenea del fascio proprio di asse* r, e mostra che i piani passanti per r sono ∞^1.

Esempi ed esercizi. Trovare i parametri direttori della retta

$$r : \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

e l'equazione di $\mathcal{F}(r)$.

$$\vec{r} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-3, 1, 2).$$

$$\mathcal{F}(r) : \lambda(x - y + 2z - 1 = 0) + \mu(x + y + z + 3) = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

oppure in forma non omogenea,

$$\mathcal{F}(r) : x - y + 2z - 1 + k(x + y + z + 3) = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3.3.2 Mutue posizioni di due rette dello spazio.

Definizione 71 Due rette r ed s dello spazio si dicono *sghembe* se *non* sono contenute in uno stesso piano. Altrimenti, r ed s si dicono *complanari*.

Due rette che siano complanari possono essere *parallele* oppure *incidenti*, cioè con un punto in comune.

Pertanto, date due rette dello spazio r ed r', di parametri direttori $\vec{r} = (l, m, n)$ ed $\vec{r'} = (l', m', n')$ rispettivamente, r ed r' le loro mutue posizioni possono essere le seguenti:

$$\begin{cases} \text{complanari} : \begin{cases} r \parallel r' \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \vec{r'} \Leftrightarrow (l, m, n) \sim (l', m', n') \\ \\ r \text{ incidente } r' \Leftrightarrow r \cap r' = P_0 \end{cases} \\ \\ \text{sghembe} : \ \text{non complanari.} \end{cases}$$

Siano r ed s due rette distinte i cui vettori direttori siano, rispettivamente, $\vec{r}(l, m, n)$ ed $\vec{s}(l', m', n')$. Siano inoltre $R(x_0, y_0, z_0)$ e $S(x_1, y_1, z_1)$ due punti scelti arbitrariamente su r ed s rispettivamente. Allora,

$$r, s \text{ sono complanari} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{r}, \vec{s}, \vec{RS} \text{ sono complanari} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{RS} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{s}) = 0,$$

da cui,

$$r, s \text{ sono complanari} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

Naturalmente, se tale determinante è non nullo, allora r ed s sono sghembe.

Se r ed s sono due rette complanari allora esse sono:

1. parallele se $\dfrac{l}{l'} = \dfrac{m}{m'} = \dfrac{n}{n'}$;
2. incidenti altrimenti.

Caso particolare di incidenza: due rette r, r' sono *perpendicolari* se tali sono i loro parametri direttori:

$$r \perp r' \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{r} \perp \vec{r'} \quad \Longleftrightarrow \quad ll' + mm' + nn' = 0.$$

3.3.3 Posizioni retta-piano.

Una retta r si può trovare, rispetto ad un piano α, in una delle seguenti posizioni:

- r è incidente α in un punto P, ossia $r \cap \alpha = \{P\}$;
- r è parallela ad α, ossia $r \cap \alpha = r$ oppure $r \cap \alpha = \emptyset$.

Supponiamo sia

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con } rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

e sia $\alpha : a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ con $(a'', b'', c'') \neq (0, 0, 0)$.

Per studiare la posizione di r rispetto al piano α consideriamo il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

che in forma compatta diventa $AX = D$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} -d \\ -d' \\ -d'' \end{pmatrix}$$

Applicando il Teorema di Rouché-Capelli a tale sistema, concludiamo che:

◀ $rg(A) = 3 \iff$ il sistema ammette un'unica soluzione $\iff r \cap \alpha = \{P\}$;

◀ $rg(A) = 2 = rg(A \mid D) \iff$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni $\iff r \cap \alpha = r$;

◀ $rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A \mid D) = 3 \iff$ il sistema è incompatibile $\iff r \cap \alpha = \emptyset$.

Possiamo allora concludere che

$$r \parallel \alpha \quad \iff \quad rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2 \quad \iff \quad \vec{n} \perp \vec{r}.$$

Se invece la retta r è espressa con le equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

allora i possibili punti in comune tra $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ ed r si ottengono imponendo

$$a(x_0 + lt) + b(y_0 + mt) + c(z_0 + nt) + d = 0,$$

che è equivalente a

$$(al + bm + cn)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \qquad (**).$$

Si possono presentare i seguenti casi:

◀ $al + bm + cn \neq 0$ e quindi si ottiene una sola intersezione di r con α;

◀ $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$. Allora, la $(**)$ è incompatibile e quindi $r \cap \alpha = \emptyset$;

◀ $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Allora, la $(**)$ è una identità e quindi ogni punto di r appartiene ad α: $r \subset \alpha$.

La condizione di parallelismo retta-piano può quindi essere espressa nel seguente modo:

$$r \parallel \alpha \quad \iff \quad al + bm + cn = 0,$$

che esprime anche l'ortogonalità tra un vettore parallelo ad r ed un vettore ortogonale ad α.

3.4 Angoli tra rette e piani dello spazio.

3.4.1 Angoli di due rette.

Siano r ed s due rette incidenti e siano $\vec{r}(l,m,n)$ ed $\vec{s}(l',m',n')$ due vettori non nulli paralleli ad esse.

Si definiscono *angoli di r ed s* e si indicano con $\widehat{r,s}$ gli angoli formati dai vettori $\vec{r}$ ed $\vec{s}$, ossia

$$\widehat{r,s} = \widehat{\vec{r},\vec{s}} \quad \text{e} \quad \pi - \widehat{\vec{r},\vec{s}}.$$

Allora,

$$\cos\widehat{r,s} = \pm\cos\widehat{\vec{r},\vec{s}}$$

e quindi

$$\cos\widehat{r,s} = \pm\frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}.$$

In particolare:

$$r \perp s \qquad \Longleftrightarrow \qquad ll' + mm' + nn' = 0.$$

Supponiamo ora che la retta r sia orientata come il vettore $\vec{r}(l,m,n)$. I suoi coseni direttori sono i coseni degli angoli che r forma con gli assi coordinati e si ha:

$$\cos\widehat{x,r} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \ \cos\widehat{y,r} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \ \text{e} \ \cos\widehat{z,r} = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

con

$$\cos^2\widehat{x,r} + \cos^2\widehat{y,r} + \cos^2\widehat{z,r} = 1.$$

Si noti infatti che da

$$\cos\widehat{x,r} = \frac{l}{\|\vec{r}\|}, \ \cos\widehat{y,r} = \frac{m}{\|\vec{r}\|} \ \text{e} \ \cos\widehat{z,r} = \frac{n}{\|\vec{r}\|}$$

segue

$$\begin{aligned} \vec{r} &= l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} = \|\vec{r}\|\cos\widehat{xr}\vec{i} + \|\vec{r}\|\cos\widehat{yr}\vec{j} + \|\vec{r}\|\cos\widehat{zr}\vec{k} = \\ &= \|\vec{r}\|\left(\cos\widehat{x,r}\vec{i} + \cos\widehat{y,r}\vec{j} + \cos\widehat{z,r}\vec{k}\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \cos\widehat{x,r}\vec{i} + \cos\widehat{y,r}\vec{j} + \cos\widehat{z,r}\vec{k}$$

ossia

$$1 = \left\|\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\right\| = \cos^2\widehat{x,r} + \cos^2\widehat{y,r} + \cos^2\widehat{z,r}.$$

3.4.2 Angoli di due piani.

Siano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ due piani incidenti dello spazio. Come sappiamo, $\vec{n}_\alpha(a, b, c)$ e $\vec{n}_\beta(a', b', c')$ sono le direzioni ortogonali ai due piani.

Si definiscono allora *angoli di* α *e* β, l'angolo formato da $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$, ed il suo supplementare:

$$\widehat{\alpha, \beta} = \widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta} \quad \text{e} \quad \pi - \widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta},$$

per cui,

$$\cos \widehat{\alpha, \beta} = \pm \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

In particolare, la condizione di ortogonalità tra i due piani è quindi data da

$$\alpha \perp \beta \quad \Longleftrightarrow \quad aa' + bb' + cc' = 0.$$

3.4.3 Angolo tra una retta ed un piano.

Siano r una retta, di parametri direttori $\vec{r}(l, m, n)$, e α un piano, di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$.

La retta r è perpendicolare al piano α se e solo se r è parallela al vettore $\vec{n}_\alpha(a, b, c)$, ossia

$$r \perp \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{r} \parallel \vec{n}_\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}.$$

Supponiamo ora r non perpendicolare ad α, e sia α' il piano contenente r e perpendicolare ad α. La retta $r' = \alpha \cap \alpha'$, r' si dice *proiezione ortogonale di* r *su* α.

Si definisce come angolo tra r ed α, $\widehat{r, \alpha}$, il più piccolo degli angoli formati da r ed r'. Quindi, $\widehat{r, \alpha}$ è il complementare dell'angolo acuto φ formato da $\vec{r}$ ed $\vec{n}_\alpha$. Visto che $\vec{n}_\alpha$ ha parametri direttori (a, b, c) e che $\cos \varphi > 0$, si ha:

$$\sin \widehat{r, \alpha} = \cos \varphi = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

3.5 Distanze

3.5.1 Distanza di un punto da un piano.

Come nel caso del piano, si definisce *distanza* di due insiemi di punti $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_2$ dello spazio il numero, che si indica con $d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, dato da:

$$d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \inf \left\{ \overline{P_1 P_2} \,|\, P_1 \in \mathcal{F}_1 \text{ e } P_2 \in \mathcal{F}_2 \right\}.$$

Vedremo ora alcuni procedimenti che permettono di risolvere il problema delle distanze nei casi più semplici.

Consideriamo un piano π di equazione $ax+by+cz+d=0$ ed un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

Sia H il punto di intersezione di π con la retta n, passante per P_0 perpendicolare a π. Allora,

$$d(P_0,\pi)=\overline{P_0H}.$$

La retta n ha equazioni parametriche date da

$$\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases}$$

Troviamo $H=\pi\cap n$:

$$\begin{aligned} & a\,(at+x_0)+b\,(bt+y_0)+c(ct+z_0)+d=0 \\ \Rightarrow\quad & (a^2+b^2+c^2)t+ax_0+by_0+cz_0+d=0 \\ \Rightarrow\quad & t_H=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}, \end{aligned}$$

da cui segue che $H(\ at_H+x_0, bt_H+y_0, ct_H+z_0)$, e quindi

$$\begin{aligned} d(P_0,\pi) &= \overline{P_0H}=\sqrt{(x_H-x_0)^2+(y_H-y_0)^2+(z_H-z_0)^2}= \\ &= \sqrt{a^2t_H^2+b^2t_H^2+c^2t_H^2}=|t_H|\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \end{aligned}$$

Concludendo:

$$d(P_0,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Osserviamo che la precedente formula può essere utilizzata anche per determinare la *distanza da π di un piano α o di una retta r paralleli a π*: basta considerare un qualsiasi onto P_0 appartenente rispettivamente ad α o ad r.

3.5.2 Distanza di un punto da una retta.

Siano r una retta di parametri direttori (l,m,n) e $P_0(x_0,y_0,z_0)$ un punto dello spazio. Sia α il piano per P_0 perpendicolare ad r. Questo ha equazione

$$\alpha : l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0.$$

Considerato $H=r\cap\alpha$, si ha

$$d(P_0,r)=\overline{P_0H}.$$

3.5.3 Distanza tra due rette.

Siano r, s due rette distinte di parametri direttori $\vec{r}(l, m, n)$ ed $\vec{s}(l', m', n')$. Si possono presentare i seguenti casi:

1. r ed s sono incidenti. Allora, $d(r, s) = 0$;
2. r ed s sono parallele. In questo caso, fissiamo un punto R su r ed avremo $d(r, s) = d(R, s)$;
3. r ed s sono sghembe. In questo caso, i vettori $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ non sono paralleli, ossia

   $$rg \begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 2.$$

   Sia $\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma)$ un generico vettore ortogonale contemporaneamente ad $\vec{r}$ e ad $\vec{s}$, ossia tale che $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$ e $\vec{v} \cdot \vec{s} = 0$.

Osserviamo che un siffatto vettore esiste sempre, in quanto il sistema omogeneo

$$\begin{cases} l\alpha + m\beta + n\gamma = 0 \\ l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0, \end{cases}$$

avendo la matrice dei coefficienti di rango 2, ammette ∞^1 soluzioni, tutte proporzionali tra lor, che corrispondono alla direzione individuata dal vettore $\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma)$.

In particolare, se consideriamo un generico punto R su r ed un generico punto S su s, possiamo determinare i punti R ed S in modo tale che il vettore $\vec{RS}$ sia ortogonale ad $\vec{r}$ e ad $\vec{s}$. Allora,

$$d(r, s) = \overline{RS}$$

è detta *minima distanza* tra r ed s, e la retta per i punti R ed S è detta *retta di minima distanza.*

Osservazione 72 Se ci interessa solo la distanza tra r ed s e non la retta di minima distanza, allora possiamo procedere anche nel seguente modo: determiniamo un piano $\alpha \in \mathcal{F}(s)$ parallelo ad r. Fissato un punto R_0 su r, avremo

$$d(r, s) = d(R_0, \alpha).$$

3.6 Sfere e circonferenze dello spazio

Definizione 73 La *sfera* Σ, di *centro* C e *raggio* $R > 0$, è l'insieme formato dalla totalità dei punti P dello spazio che hanno distanza costante R da un punto fisso C, ossia tali che $\|\vec{CP}\| = R$ (o, equivalentemente, $\overline{CP}^2 = R^2$).

Se $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e $P(x, y, z)$, da $\overline{CP}^2 = R^2$ si ha:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2,$$

che dà l'equazione cartesiana di una sfera generica. Equivalentemente:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0,$$

dove $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$. Viceversa, ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

rappresenta una sfera Σ di centro (α, β, γ), dove

$$\alpha = -a/2, \qquad \beta = -b/2, \qquad \gamma = -c/2$$

e di raggio

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}.$$

Precisamente, si ha:

$$\begin{array}{ll} \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d > 0 & \text{sfera ordinaria,} \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d = 0 & \text{sfera di raggio nullo,} \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d > 0 & \text{sfera immaginaria.} \end{array}$$

Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera che ha come punti diametralmente opposti $A(3, 0, 0)$ e $B(1, 1, 1)$.

Dati una sfera Σ ed un piano π dello spazio, tale piano rispetto a Σ è

- *esterno* se $d(C, \pi) > R$. In tal caso, $\Sigma \cap \pi = \emptyset$.
- *tangente* se $d(C, \pi) = R$. In tal caso, $\Sigma \cap \pi = \{P_0\}$.
- *secante* se $d(C, \pi) < R$. In tal caso, $\Sigma \cap \pi = \gamma$ è una *circonferenza*.

Precisamente, quando $d(C, \pi) < R$, la circonferenza $\gamma = \Sigma \cap \pi$:

- ha centro $C_\gamma = \pi \cap r$, dove r è la retta perpendicolare a π e passante per C;
- ha raggio R_γ dato (per il Teorema di Pitagora) da

$$R_\gamma = \sqrt{R^2 - \overline{CC_\gamma}^2} = \sqrt{R^2 - (d(C, \pi))^2},$$

Nello spazio, quindi, una circonferenza γ si può rappresentare con un sistema del tipo

$$\gamma : \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

ossia come intersezione di una sfera con un piano.

Osservazione 74 Data una circonferenza γ dello spazio, di centro C_γ e raggio R_γ:

- *Esiste un unico piano* π che la contiene (è una curva piana),
- *Esistono* ∞^1 *sfere* Σ per cui $\gamma = \pi \cap \Sigma$: tutte quelle di centro $C \in r$, dove r è la retta passante per C_γ e perpendicolare a π, e raggio $R = \sqrt{R_\gamma^2 + \overline{CC_\gamma}^2}$.

Inoltre, γ può anche essere rappresentata come *intersezione di due sfere* Σ_1 e Σ_2, di centri C_1, C_2 e raggi R_1, R_2, tali che

$$|R_1 - R_2| < \overline{C_1C_2} < R_1 + R_2.$$

Sia ora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto della sfera Σ di equazione

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0.$$

Supponiamo di voler determinare l'equazione del piano π, tangente Σ nel punto P_0. Tale piano è il piano passante per P_0 e perpendicolare al vettore $\vec{CP_0}$ con C centro della sfera Σ. Allora si ha

$$\vec{CP_0} = (x_0 - \alpha, y_0 - \beta, z_0 - \gamma)$$

da cui

$$\pi : (x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) + (z_0 - \gamma)(z - z_0) = 0.$$

3.7 Cambiamenti di riferimento.

Siano $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e $\mathcal{R}'(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ due riferimenti cartesiani ortonormali dello spazio, e supponiamo che $\mathcal{R}$ sia orientato positivamente.

Sia P un punto dello spazio avente coordinate (x, y, z) in $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e (x', y', z') in $\mathcal{R}'(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$. Nota la posizione di $\mathcal{R}'$ rispetto ad $\mathcal{R}$ vogliamo determinare la relazione esistente tra le coordinate (x, y, z) e (x', y', z').

La posizione di $\mathcal{R}'$ rispetto ad $\mathcal{R}$ è data dalle coordinate di O' in $\mathcal{R}$ e dalle componenti di $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ rispetto alla base $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

Supponiamo sia $O'(x_0, y_0, z_0)$ in $\mathcal{R}$ e

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{i'} = a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j} + a_{31}\vec{k} \\ \vec{j'} = a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j} + a_{32}\vec{k} \\ \vec{k'} = a_{13}\vec{i} + a_{23}\vec{j} + a_{33}\vec{k} \end{array}\right. \qquad (*).$$

Consideriamo il vettore $\vec{O'P}$ ed esprimiamolo rispetto le due basi:

$$\vec{O'P} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'} \qquad \text{in } \mathcal{R}'$$

$$\vec{O'P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} \qquad \text{in } \mathcal{R}.$$

Utilizzando le relazioni $(*)$, si ha

$$\begin{aligned} \vec{O'P} &= x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'} \\ &= x'\left(a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j} + a_{31}\vec{k}\right) + y'(a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j} + a_{32}\vec{k}) + z'(a_{13}\vec{i} + a_{23}\vec{j} + a_{33}\vec{k}) \\ &= (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\vec{i} + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\vec{j} + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\vec{k}. \end{aligned}$$

Poichè un vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di una base, da

$$\begin{aligned} \vec{O'P} &= (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} \\ &= (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\vec{i} + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\vec{j} + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\vec{k} \end{aligned}$$

segue

$$\left\{\begin{array}{l} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + y_0 \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + z_0. \end{array}\right.$$

Se indichiamo con A la matrice ortogonale del cambiamento di base da $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ a $\left\{\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right\}$, cioè

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

e poniamo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $X_{O'} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ allora le relazioni esistenti tra le coordinate (x, y, z) e (x', y', z') si possono rappresentare nella forma matriciale

$$X = AX' + X_{O'} \qquad (i).$$

Poichè le colonne di A sono le componenti dei vettori di una base ortonormale, si ha $AA^t = I$ ossia $A^t = A^{-1}$, cioè A è una matrice ortogonale del terzo ordine. Inoltre,

$$\det A = \vec{i'} \wedge \vec{j'} \cdot \vec{k'} = \pm 1,$$

a seconda che $\left\{\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right\}$ sia orientato positivamente o negativamente.

Consideriamo la relazione (i) per $X = X_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ossia

$$X_O = AX'_O + X_{O'}$$

da cui, moltiplicando a sinistra per la trasposta di A, otteniamo

$$A^t X_O = A^t A X'_O + A^t X_{O'} \quad \Longrightarrow \quad O = X'_O + A^t X_{O'},$$

essendo $A^t X_O = A^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O$ e $A^t A = I$. Allora,

$$X'_O = -A^t X_{O'}.$$

In generale, da

$$X = AX' + X_{O'}$$

segue

$$A^t X = A^t A X' + A^t X_{O'}.$$

Essendo $AA^t = I$ e $X'_O = -A^t X_{O'}$ si ha

$$X' = A^t X + X'_O \qquad (ii),$$

dove le (ii) sono le formule inverse di (i).

Osserviamo che se consideriamo un cambiamento da un sistema di riferimento affine ad un altro, le equazioni che lo esprimono sono sempre della forma

$$X = AX' + X_{O'},$$

solo che in questo caso la matrice A non è necessariamente ortogonale, ma è semplicemente una matrice invertibile, in quanto rappresenta il passaggio da una generica base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ ad un'altra $\left\{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \vec{e'_3}\right\}$. In questo, caso le formule inverse sono espresse da

$$X' = A^{-1} X + X'_O.$$

3.8 Coordinate cilindriche e coordinate polari.

Per rappresentare i punti dello spazio mediante terne ordinate di numeri reali, oltre alle coordinate cartesiane si possono utilizzare altri tipi di coordinate, che potrebbero adattarsi meglio al problema di volta in volta considerato:

3.8.1 Coordinate cilindriche.

Un *sistema di coordinate cilindriche* è definito quando si fissa:

- una retta orientata, detta *asse delle quote* o asse z;
- un *sistema di riferimento polare* su un piano α perpendicolare all'asse, ossia: un punto O detto *polo* ($O = \alpha \cap asse$), una semiretta p di α uscente da O ed un *verso* di rotazione su α, che risulti antiorario rispetto al semispazio individuato dal verso positivo dell'asse z;
- un'*unità di misura* per i segmenti.

Sia P un punto dello spazio. Indichiamo con P' la proiezione ortogonale di P su α. Al punto P sono associati univocamente i numeri reali (ρ, φ, z), detti *coordinate cilindriche* di P, dove (ρ, φ) sono le coordinate polari di P' (sul piano α) e z è la misura algebrica del segmento orientato $P'P$.

Ogni punto dello spazio ha quindi coordinate cilindriche (ρ, φ, z) che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\rho \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \text{ e } z \in \mathbb{R}.$$

La corrispondenza

$$P \quad \longleftrightarrow \quad (\rho, \varphi, z)$$

è biunivoca *ad eccezione dei punti dell'asse z, per i quali φ è indeterminato.*

Si osservi che:

- L'equazione $\rho = \rho_0 > 0$ rappresenta un cilindro rotondo, di asse l'asse z.
- L'equazione $\varphi = \varphi_0$ rappresenta un semipiano uscente dall'asse z.
- L'equazione $z = z_0$ rappresenta un piano ortogonale all'asse z.

Dato un riferimento cilindrico, consideriamo un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ in modo che gli assi z coincidano ed il semiasse positivo delle x coincida con l'asse polare del piano α. Tra i due tipi di coordinate sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \text{e, viceversa,} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan{(y/x)} \\ z = z. \end{cases}$$

Se poniamo $\rho = r$ costante otteniamo le equazioni (cartesiane) parametriche del cilindro rotondo

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Eliminando i parametri φ e z:

$$\begin{cases} x^2 = r^2\cos^2\varphi \\ y^2 = r^2\sin^2\varphi \end{cases} \implies x^2 + y^2 = r^2$$

si ottiene l'equazione cartesiana del cilindro rotondo di raggio r ed asse z.

3.8.2 Coordinate polari (o sferiche).

Un *sistema di riferimento polare* dello spazio è definito quando si fissa:

- un punto O detto *polo*;
- una retta r orientata, passante per O, detta *asse polare*;
- un semipiano α di origine r detto *semipiano polare*;
- un'*unità di misura* per i segmenti;
- un *verso positivo di rotazione* intorno all'asse polare.

Ad ogni punto P dello spazio *che non appartenga all'asse polare* sono associati univocamente i numeri reali (ρ, θ, φ) dove:

◀ $\rho = \overline{OP}$, detto *raggio vettore*;

◀ θ è la misura dell'angolo convesso tra la semiretta OP ed il semiasse polare positivo, detta *colatitudine*;

◀ φ è la misura della minima rotazione positiva che sovrappone il semipiano polare al semipiano di origine r contenente P, detta *anomalia* o *longitudine*.

Ogni punto dello spazio, che non appartenga all'asse polare, ha *coordinate polari* (ρ, θ, φ) che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\rho \geq 0, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{e} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Si osservi che:

- L'equazione $\rho = \rho_0$ rappresenta la sfera di centro O e raggio ρ_0.
- L'equazione $\theta = \theta_0$ rappresenta un semicono di vertice 0.
- L'equazione $\varphi = \varphi_0$ rappresenta un semipiano uscente dall'asse polare r.

Dato un riferimento polare dello spazio $\mathcal{R}(O', \rho, \theta, \varphi)$, consideriamo un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ scelto nel seguente modo:

- L'origine O coincide con il polo;
- l'asse z coincide con l'asse polare;
- il semiasse positivo delle x appartiene al semipiano polare;
- coincidono le unità di misura dei segmenti.

Tra i due tipi di coordinate sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases} \qquad \text{e, viceversa,} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctan\left(y/x\right) \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right). \end{cases}$$

In quanto, se P' è la proiezione ortogonale di P sul piano $[xy]$, risulta $\overline{OP}' = \rho \sin\theta$.

Se poniamo $\rho = R$ costante si hanno le equazioni (cartesiane) parametriche della sfera di centro O e raggio R :

$$\begin{cases} x = R \sin\theta \cos\varphi \\ y = R \sin\theta \sin\varphi \\ z = R \cos\theta \end{cases} \qquad \theta, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Parte II

Algebra lineare

Capitolo 4

Spazi Vettoriali

In questo capitolo intendiamo introdurre la nozione astratta di *spazio vettoriale*, di cui abbiamo già visto esempi:

- nel primo capitolo, quando abbiamo introdotto l'insieme delle matrici $\mathbb{K}^{m,n}$ e le operazioni di somma tra matrici e di prodotto di una matrice per uno scalare;

- nel secondo capitolo, dove abbiamo considerato lo spazio $\mathbb{V}_3$ dei vettori geometrici, munito delle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare

Sviluppare una teoria astratta degli spazi vettoriali ci consente di ottenere risultati che siano validi indipendentemente dal particolare contesto in cui sono stati inizialmente scoperti e che quindi siano applicabili, più in generale, ad ogni altra situazione in cui le operazioni rilevanti sono la somma ed il prodotto per uno scalare.

Definizione 75 Siano V un insieme non vuoto e $\mathbb{K}$ un campo (di caratteristica $\neq 2$). La terna $(V, +, \cdot)$ si definisce **spazio vettoriale** su $\mathbb{K}$ se le applicazioni

$$+ : V \times V \to V \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

soddisfano le seguenti proprietà:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ (*prop. commutativa*);

2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ (*prop. associativa*);

3. $\exists \vec{0} \in V$ t.c. $\quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in V$ (*esistenza dell'elemento neutro*);

4. $\forall \vec{u} \in V \quad \exists (-\vec{u}) \in V$ t.c. $\quad \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} = (-\vec{u}) + \vec{u}$ (*esistenza dell'opposto*)

5. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ (*prop. distributiva del prodotto rispetto alla somma di vettori*);

6. $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u} \quad \forall \vec{u} \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (*prop. distributiva del prodotto rispetto alla somma di scalari*);

7. $(\lambda\mu)\vec{u} = \lambda(\mu\vec{u}) \quad \forall \vec{u} \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (*prop. associativa del prodotto per uno scalare*);

8. $1\vec{u} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in V$.

Osserviamo che dalle proprietà 1...4 segue che $(V, +)$ è un gruppo abeliano.

Gli elementi di V sono detti *vettori* e quelli di $\mathbb{K}$ *scalari*. Il vettore $\vec{0}$ è detto *vettore nullo*.

Si noti che
$$\lambda\vec{v} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ oppure } \vec{v} = \vec{0}.$$
Infatti, si ha:
$$0+0=0 \quad \Rightarrow \quad (0+0)\vec{v} = 0\vec{v} \quad \Rightarrow \quad 0\vec{v}+0\vec{v} = 0\vec{v} \quad \Rightarrow \quad 0\vec{v} = \vec{0}$$
e
$$\vec{0}+\vec{0}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda(\vec{0}+\vec{0}) = \lambda\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda\vec{0}+\lambda\vec{0} = \lambda\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda\vec{0} = \vec{0}.$$
Viceversa, sia $\lambda\vec{v} = \vec{0}$. Se $\lambda = 0$ l'asserto è provato. Se $\lambda \neq 0$, si ha
$$\vec{v} = 1\vec{v} = \left(\lambda^{-1}\lambda\right)\vec{v} = \lambda^{-1}(\lambda\vec{v}) = \lambda^{-1}\vec{0} = \vec{0}.$$

Osserviamo inoltre che
$$-(\lambda\vec{v}) = (-\lambda)\vec{v} = \lambda(-\vec{v}).$$
Infatti,
$$\vec{0} = 0\vec{v} = (-\lambda+\lambda)\vec{v} = (-\lambda)\vec{v}+\lambda\vec{v},$$
$$\vec{0} = \lambda\vec{0} = \lambda(-\vec{v}+\vec{v}) = \lambda(-\vec{v})+\lambda(\vec{v})$$
e quindi, $-(\lambda\vec{v}) = (-\lambda)\vec{v}$ e $\lambda(-\vec{v}) = -(\lambda\vec{v})$.

Esempi di Spazi Vettoriali.

i) L'insieme $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{K},\ i = 1, ..., n\}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare così definite:
$$\begin{aligned} (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) &= (x_1+y_1, ..., x_n+y_n), \\ \lambda \cdot (x_1, ..., x_n) &= (\lambda x_1, ..., \lambda x_n). \end{aligned}$$

ii) Come casi particolari dell'esempio precedente: $\mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$; $\mathbb{R}^n$, (in particolare, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$) sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

iii) L'insieme $\mathbb{K}^{m,n}$ delle matrici di tipo m, n a coefficienti in $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale rispetto le operazioni di somma tra matrici e di prodotto di una matrice per uno scalare.

iv) L'insieme $\mathbb{K}[t] = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n + ... \mid a_i \in \mathbb{K}\}$, dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$, è uno spazio vettoriale rispetto le operazioni di somma tra polinomi e di prodotto di un polinomio per uno scalare.

v) Siano X un insieme non vuoto e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Consideriamo l'insieme
$$\mathcal{M}(X,V) := \{f : X \to V\},$$
su cui siano definite le seguenti operazioni
$$\begin{array}{lll} \forall f, g \in \mathcal{M}(X,V) & (f+g)(x) = f(x) + g(x) & \forall x \in X \\ \forall f \in \mathcal{M}(X,V) \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{K} & (\lambda f)(x) = \lambda f(x) & \forall x \in X. \end{array}$$
Si verifica facilmente che $(\mathcal{M}(X,V), +, \cdot)$ è uno Spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

vi) Un esempio notevole di spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ è dato, per quanto visto nel Capitolo 1, dall'insieme dei vettori geometrici $\mathbb{V}_3$. In modo analogo si possono definire lo spazio vettoriale $\mathbb{V}_2$ dei vettori liberi del piano euclideo S_2, e lo spazio vettoriale $\mathbb{V}_1$ dei vettori liberi da retta euclidea S_1.

Gli esempi di spazi vettoriali appena descritti ne generano molti altri con un semplice procedimento: dato uno spazio vettoriale V, si cercano quei sottoinsiemi W di V che, rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite in V, sono essi stessi degli spazi vettoriali. Vale infatti la seguente definizione

Definizione 76 *Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme $W \subset V$ si dice* ***sottospazio vettoriale*** *di V se $(W, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di V ristrette a W.*

Si prova che

Proposizione 77 *Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale e $W \subset V$.*
$$\begin{array}{ll} & W \text{ è un sottospazio vettoriale di } V \\ \Longleftrightarrow & W \neq \emptyset \text{ e } \forall \vec{u}, \vec{v} \in W \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{K} : \quad \vec{u} + \vec{v} \in W \text{ e } \lambda \vec{v} \in W. \end{array}$$

Osserviamo che se W è un sottospazio vettoriale di V allora da $\vec{v} \in W$ segue che $-\vec{v} \in W$ e di conseguenza $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \in W$.

Dato un qualunque spazio vettoriale V, il sottoinsieme $\left\{\vec{0}\right\}$ di V costituito dal solo vettore nullo è un sottospazio, detto *sottospazio nullo*. L'intero spazio V è anch'esso un sottospazio. Questi due sottospazi sono detti *sottospazi banali* di V. Gli altri sottospazi, se esistono, sono detti *sottospazi propri* e sono quelli più interessanti.

Esempi di Sottospazi Vettoriali.

i) Consideriamo nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^{n,n}$ delle matrici quadrate di ordine n il sottoinsieme delle matrici simmetriche S.

Siano $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in S$ due matrici simmetriche, ossia, $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ tali che $A = A^t$ e $B = B^t$. Sia inoltre $\lambda \in \mathbb{K}$. Si ha:

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B \qquad \text{per cui } A + B \in S$$
$$(\lambda A)^t = \lambda(A^t) = \lambda A \qquad \text{per cui } \lambda A \in S.$$

Abbiamo così verificato che la somma di due matrici simmetriche è ancora una matrice simmetrica e che il prodotto per uno scalare di una matrice simmetrica da come risultato ancora una matrice simmetrica. Possiamo allora concludere che l'insieme delle matrici simmetriche di ordine n è un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{K}^{n,n}$.

Esercizio. Provare che l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici *antisimmetriche* di ordine n è un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{K}^{n,n}$.

ii) Consideriamo nello spazio $\mathbb{V}_3$ il sottoinsieme dei vettori liberi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$... aventi un rappresentante giacente su un fissato piano di S_3. Tale sottoinsieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}_3$.

iii) Consideriamo un sistema lineare $AX = B$ dove $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ è la matrice dei coefficienti, $X \in \mathbb{K}^n \equiv \mathbb{K}^{n,1}$ è la colonna delle incognite e $B \in \mathbb{K}^m \equiv \mathbb{K}^{m,1}$ quella dei termini noti. Indichiamo con Δ l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = O$ associato al sistema dato. Se consideriamo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $X_0, \widetilde{X}_0 \in \Delta$ si ha $AX_0 = O$ e $A\widetilde{X}_0 = O$ da cui segue

$$A(X_0 + \widetilde{X}_0) = AX_0 + A\widetilde{X}_0 = O + O = O \text{ ossia } X_0 + \widetilde{X}_0 \in \Delta$$

analogamente

$$A(\lambda X_0) = \lambda(AX_0) = \lambda O = O \text{ ossia } \lambda X_0 \in \Delta$$

Possiamo allora concludere che Δ è un esempio di sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{K}^n \equiv \mathbb{K}^{n,1}$.

4.1 Intersezione e somma di sottospazi. Somma diretta.

In questo paragrafo denotiamo con H e K due sottospazi di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$. Possiamo considerare l'intersezione e l'unione di H e K. L'intersezione $H \cap K$ consiste di quei vettori di V che appartengono sia ad H sia a K, mentre l'unione $H \cup K$ consiste di quei vettori di V che appartengono ad almeno uno dei due sottospazi.

Proposizione 78 *L'intersezione $H \cap K$ di due sottospazi vettoriali K, H è un sottospazio vettoriale.*

DIM. siano $\vec{u}, \vec{v} \in H \cap K$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Poichè H e K sono sottospazi vettoriali si ha

$$\begin{aligned} \vec{u}, \vec{v} \in H \text{ e } \lambda \in \mathbb{K} \ &\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in H \text{ e } \lambda\vec{u} \in H \\ \vec{u}, \vec{v} \in K \text{ e } \lambda \in \mathbb{K} \ &\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in K \text{ e } \lambda\vec{u} \in K \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{array}{l} \vec{u} + \vec{v} \in H \text{ e } \lambda\vec{u} \in H \\ \vec{u} + \vec{v} \in K \text{ e } \lambda\vec{u} \in K \end{array} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in H \cap K \text{ e } \lambda\vec{u} \in H \cap K.$$

Quindi, per la Proposizione 77, $H \cap K$ è un sottospazio vettoriale $\square$

Esempio. Consideriamo nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^{n,n}$ delle matrici quadrate di ordine n il sottospazio delle matrici simmetriche S ed il sottospazio delle matrici triangolari superiori T (verificare per esercizio che T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n,n}$). L'insieme delle matrici diagonali $D = S \cap T$ è dunque un ulteriore esempio di sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n,n}$.

Osservazione. Un analogo argomento dimostra che *l'intersezione di un numero arbitrario (anche infinito) di sottospazi vettoriali è ancora un sottospazio vettoriale.* La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Invece, in generale, l'unione di due sottospazi vettoriali non è un sottospazio vettoriale.

Controesempio. Consideriamo in $V = \mathbb{R}^2$ i due sottospazi vettoriali H e K così definiti:

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\} \qquad K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\}$$

e consideriamo i vettori $\vec{v}(0, -3) \in H$ e $\vec{u}(5, 0) \in K$. Questi vettori appartengono ad $H \cup K$ e $\vec{v} + \vec{u} = (5, -3)$, ma

$$\vec{v} + \vec{u} \notin H \text{ e } \vec{v} + \vec{u} \notin K \ \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \notin H \cup K.$$

Introduciamo a questo punto il concetto di *sottospazio somma.*

Definizione 79 Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale e siano H e K due suoi sottospazi. Si definisce **sottospazio somma** $H + K$ l'insieme costituito dai vettori di V che si possono scrivere come somma di un vettore di H e di un vettore di K.

$$H + K = \left\{ \vec{v} \in V \,\middle|\, \exists \vec{h} \in H,\, \exists \vec{k} \in K \text{ tali che } \vec{v} = \vec{h} + \vec{k} \right\}.$$

Proposizione 80 *La somma $H+K$ di due sottospazi vettoriali K, H è un sottospazio vettoriale.*

DIM. Siano $\vec{u}, \vec{v} \in H+K$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Per definizione si ha

$$\begin{array}{ll} \exists \vec{h} \in H,\, \exists \vec{k} \in K & \text{tali che } \vec{u} = \vec{h} + \vec{k} \\ \exists \vec{h'} \in H,\, \exists \vec{k'} \in K & \text{tali che } \vec{v} = \vec{h'} + \vec{k'} \end{array}$$

e quindi

$\vec{u} + \vec{v} = \left(\vec{h} + \vec{k}\right) + \left(\vec{h'} + \vec{k'}\right) = \left(\vec{h} + \vec{h'}\right) + \left(\vec{k} + \vec{k'}\right)$ con $\vec{h} + \vec{h'} \in H$ e $\vec{k} + \vec{k'} \in K$

$\lambda \vec{u} = \lambda \left(\vec{h} + \vec{k}\right) = (\lambda \vec{h}) + (\lambda \vec{k})$ con $\lambda \vec{h} \in H$ e $\lambda \vec{k} \in K$.

Pertanto,

$$\vec{u} + \vec{v} \in H + K \text{ e } \lambda \vec{u} \in H + K \qquad \square$$

Definizione 81 Posto $S = H + K$, se in S la decomposizione di ogni vettore come somma di un vettore di H e di un vettore di K è univocamente determinata, allora S si dice *somma diretta* di H e K, e si scrive $S = H \oplus K$.

Nel caso in cui $H \oplus K = V$ allora i due sottospazi H e K si dicono *supplementari.*

Ad esempio se consideriamo $V = \mathbb{R}^2$ ed i sottospazi

$$X = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}, \qquad Y = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\},$$

risulta

$$\mathbb{R}^2 = X \oplus Y.$$

Proposizione 82 *Siano $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, H e K due suoi sottospazi, e $S = H + K$. Allora:*

$$S = H \oplus K \quad \Longleftrightarrow \quad H \cap K = \left\{\vec{0}\right\}.$$

DIM. Se $S = H \oplus K$, consideriamo un vettore $\vec{x} \in H \cap K$. Si ha $\vec{x} \in H$ e $\vec{x} \in K$, per cui

$$\vec{x} = \vec{0} + \vec{x} \in H \oplus K \quad \text{e} \quad \vec{x} = \vec{x} + \vec{0} \in H \oplus K.$$

Ma la somma tra H e K è diretta, quindi le due precedenti decomposizioni del vettore $\vec{x}$ come somma di un vettore di H e di un vettore K devono coincidere. Pertanto, $\vec{x} = \vec{0}$.

Viceversa, supponiamo che $H \cap K = \left\{\vec{0}\right\}$, e siano $\vec{h}, \vec{h'} \in H$ e $\vec{k}, \vec{k'} \in K$, tali che si abbia

$$\vec{x} = \vec{h} + \vec{k} = \vec{h'} + \vec{k'}.$$

Ora,

$$\vec{h}+\vec{k}=\vec{h'}+\vec{k'} \quad \Rightarrow \quad \vec{h}-\vec{h'}=\vec{k'}-\vec{k}\in H\cap K,$$

da cui $\vec{h}-\vec{h'}=\vec{k'}-\vec{k}=\vec{0}$ e quindi $\vec{h}=\vec{h'}$ e $\vec{k'}=\vec{k}$. Pertanto, la decomposizione è unica $\square$

I concetti di somma e di somma diretta si estendono al caso di più sottospazi nel seguente modo:

$$\begin{aligned} H_1+...+H_r &:= \left\{\vec{x}\in V \,\middle|\, \exists \vec{h_i}\in H_i \text{ tale che } \vec{x}=\vec{h_1}+...+\vec{h_r}\right\}, \\ H_1\oplus...\oplus H_r &:= \left\{\vec{x}\in V \,\middle|\, \exists ! \vec{h_i}\in H_i \text{ tale che } \vec{x}=\vec{h_1}+...+\vec{h_r}\right\}. \end{aligned}$$

Osserviamo che da $S=H_1\oplus...\oplus H_r$ segue $H_i\cap H_j=\left\{\vec{0}\right\}$ per ogni $i\neq j$, ma non vale il viceversa. (vedremo in seguito un controesempio).

4.2 Lineare dipendenza e indipendenza di vettori.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Definizione 83 *Si dice che un vettore $\vec{v}\in V$ è **combinazione lineare** dei vettori $\vec{v}_1,...,\vec{v}_r\in V$ se esistono $\lambda_1,...,\lambda_r\in\mathbb{K}$ tali che*

$$\vec{v}=\lambda_1\vec{v}_1+...+\lambda_r\vec{v}_r$$

*Gli scalari $\lambda_1,...,\lambda_r$ si dicono **coefficienti della combinazione lineare**.*

Si osservi che la combinazione lineare si ottiene combinando le due operazioni fondamentali dello spazio vettoriale: la somma e il prodotto per uno scalare.

Esempi.

i) In $\mathbb{R}^3$, il vettore $\vec{v}=(-5,2,3)$ è combinazione lineare dei vettori (linearmente indipendenti) $\vec{v_1}=(-1,1,0)$ e $\vec{v_2}=(-1,0,1)$. Infatti:

$$(-5,2,3)=2\,(-1,1,0)+3\,(-1,0,1)\,.$$

ii) In $\mathbb{K}_2\,[t]$, spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti in $\mathbb{K}$, il polinomio $(-1+2t)^2$ è combinazione lineare dei polinomi $1=t^0$, t e t^2. Infatti:

$$(-1+2t)^2=1\cdot 1-4\cdot t+4\cdot t^2.$$

iii) Una matrice simmetrica di ordine 2 ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi ogni matrice simmetrica di ordine 2 è combinazione lineare delle 3 matrici simmetriche

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposizione 84 *La totalità delle combinazioni lineari degli r vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ di V è un sottospazio vettoriale di V che si dice **sottospazio generato** da $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ (essendo il più piccolo sottospazio vettoriale di V, contenente tali vettori) e si indica con $\mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r)$.*

DIM. Siano $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r)$ e sia $\alpha \in \mathbb{K}$. Per definizione di sottospazio generato si ha

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_r \vec{v}_r \\ \vec{v} &= \mu_1 \vec{v}_1 + ... + \mu_r \vec{v}_r \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_r \vec{v}_r) + (\mu_1 \vec{v}_1 + ... + \mu_r \vec{v}_r) = \\ &= (\lambda_1 + \mu_1)\, \vec{v}_1 + ... + (\lambda_r + \mu_r)\, \vec{v}_r \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r) \\ \alpha \vec{u} &= \alpha\, (\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_r \vec{v}_r) = (\alpha_1 \lambda) \vec{v}_1 + ... + (\alpha_r \lambda) \vec{v}_r \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r) \qquad \square \end{aligned}$$

Definizione 85 *Si dice che $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ generano H, o che sono un **insieme di generatori** di H, se H è il sottospazio di V generato da $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$.*

$$H = \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r)$$

In altre parole, $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ generano H se appartengono ad H ed ogni vettore di H è combinazione lineare di $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$.

Esempio.
Le 3 matrici simmetriche

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

generano il sottospazio delle matrici simmetriche di ordine 2.

Corollario 86 *$\vec{u}$ è combinazione lineare di $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ se e solo se $\mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r) = \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r, \vec{u})$.*

DIM. Sia $\vec{u}$ combinazione lineare di $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$, ossia

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_r\vec{v}_r$$

vogliamo provare che $\mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r) = \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r, \vec{u})$.

$$\begin{aligned} \vec{x} &\in \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r) \Rightarrow \vec{x} = \mu_1\vec{v}_1 + ... + \mu_r\vec{v}_r = \mu_1\vec{v}_1 + ... + \mu_r\vec{v}_r + 0\vec{u} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{x} \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r, \vec{u}) \end{aligned}$$

viceversa

$$\begin{aligned} \vec{x} &\in \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r, \vec{u}) \Rightarrow \vec{x} = \mu_1\vec{v}_1 + ... + \mu_r\vec{v}_r + \mu\vec{u} = \\ &= (\mu_1\vec{v}_1 + ... + \mu_r\vec{v}_r) + \mu\,(\lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_r\vec{v}_r) = \\ &= (\mu_1\vec{v}_1 + ... + \mu_r\vec{v}_r) + (\mu\lambda_1\vec{v}_1 + ... + \mu\lambda_r\vec{v}_r) = \\ &= (\mu_1 + \mu\lambda_1)\vec{v}_1 + ... + (\mu_r + \mu\lambda_r)\vec{v}_r \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r) \end{aligned}$$

Sia ora $\mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r) = \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r, \vec{u})$, vogliamo provare che $\vec{u}$ è combinazione lineare di $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$. Sia $\vec{u} \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r, \vec{u})$ e quindi $\vec{u} \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r)$. Dalla definizione di $\mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r)$ segue che $\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_r\vec{v}_r$ per opportuni $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$. $\square$

Supponiamo di conoscere un insieme di generatori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ di un sottospazio H di V. Possiamo allora esprimere ogni vettore di H come combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$. Può accadere però che uno stesso vettore $\vec{v}$ si esprima come combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ in due modi distinti.

Ad esempio sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia $H = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ con $\vec{v}_1 = (-1, 3)$ e $\vec{v}_2 = (3, -9)$. Se $\vec{v} = (-5, 15)$ allora

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

ma anche

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Questo problema si pone perchè $\vec{v}_2 = -3\vec{v}_1$, ossia tra i due vettori intercorre la relazione lineare

$$\vec{v}_2 + 3\vec{v}_1 = \vec{0}$$

Poniamo allora la seguente definizione:

Definizione 87 *I vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ si dicono* ***linearmente dipendenti*** *se esistono $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_r\vec{v}_r = \vec{0}$. I vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ si dicono* ***linearmente indipendenti*** *se non sono linearmente dipendenti.*

Si osservi che $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ sono linearmente indipendenti se e solo se

$$\lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_r\vec{v}_r = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$$

Questo significa che tra i vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ non c'è alcuna relazione lineare, tranne quella banale con $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$.

I vettori $\vec{v}_1 = (-1, 3)$, $\vec{v}_2 = (3, -9)$ dell'esempio precedente, ad esempio, sono linearmente dipendenti perchè tra i due vettori intercorre la relazione lineare non banale

$$\vec{v}_2 + 3\vec{v}_1 = \vec{0}$$

I concetti introdotti in questo paragrafo possono essere generalizzati ad un insieme infinito di vettori nel seguente modo:

Sia I un insieme non vuoto, anche infinito, di indici, e $\{\vec{v}_i\}_{i \in I}$ un sottoinsieme di vettori di V.

Si dice che $\vec{v} \in V$ è combinazione lineare di $\{\vec{v}_i\}$ se esiste un sottoinsieme finito $J \subset I$ ed un insieme $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ di scalari di $\mathbb{K}$ tali che

$$\vec{v} = \sum_{j \in J} \lambda_j \vec{v}_j$$

Definizione 88 *Sia I un insieme non vuoto, anche infinito, e $\{\vec{v}_i\}_{i \in I}$ un sottoinsieme di vettori di V. L'insieme $\{\vec{v}_i\}_{i \in I}$ si dice* ***indipendente*** *se per ogni sottoinsieme finito J di I vale*

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \vec{v}_j = \vec{0} \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j \in J$$

4.3 Basi e dimensione.

In questo paragrafo introduciamo il concetto fondamentale di *base* di uno spazio vettoriale: una base di uno spazio vettoriale svolge il ruolo del sistema di riferimento visto, ad esempio, nel piano euclideo. Fissata una base, infatti, è possibile identificare gli elementi di uno spazio vettoriale astratto mediante delle coordinate.

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$.

Definizione 89 *V si dice* ***finitamente generato*** *se esiste un numero finito r di vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ tali che $V = \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r)$.*

Definizione 90 *Si dice che una n-pla ordinata di vettori $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ di V costituisce una* ***base*** *di V se i vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ verificano le seguenti condizioni:*

1. *generano V, ossia $V = \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$;*

2. *sono linearmente indipendenti.*

Si ha quindi che, per stabilire se un insieme di n vettori costituisce una base di V, occorre verificare che siano soddisfatte la 1. e la 2.

Proposizione 91 *$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ è una base di V se e solo se ogni vettore $\vec{x}$ di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_i$ di $\mathcal{B}$.*

DIM. Siano $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ una base di V e $\vec{x}$ un vettore di V. Supponendo che

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_1\vec{v}_1 + ... + x_n\vec{v}_n \\ \vec{x} &= x_1'\vec{v}_1 + ... + x_n'\vec{v}_n \end{aligned}$$

per sottrazione si ottiene

$$\vec{0} = (x_1 - x_1')\,\vec{v}_1 + ... + (x_n - x_n')\,\vec{v}_n.$$

I vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$, costituiscono una base di V e quindi sono linearmente indipendenti. Da ciò segue che

$$\vec{0} = (x_1 - x_1')\,\vec{v}_1 + ... + (x_n - x_n')\,\vec{v}_n \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_1' = ... = x_n - x_n' = 0$$

e quindi $x_1 = x_1', ..., x_n = x_n'$.

Viceversa supponiamo che ogni vettore $\vec{x} \in V$ si scriva in modo unico come combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_i \in \mathcal{B}$. Allora chiaramente si ha $\mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = V$ inoltre $\lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$ implica $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ perchè altrimenti il vettore nullo sarebbe scritto in due modi diversi come combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_i \in \mathcal{B}$ $\square$

Gli scalari $x_1, ..., x_n$ che esprimono il generico vettore $\vec{x}$ di V come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$, si dicono le *componenti* di $\vec{x}$ rispetto la base $\mathcal{B}$. Pertanto, fissata una base $\mathcal{B}$ di V, ad ogni elemento $\vec{x}$ di V resta associata una, ed una sola, n-pla ordinata di elementi appartenenti a $\mathbb{K}$, cioè un elemento $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ e viceversa ad ogni n-pla $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ resta associato uno, ed un solo, vettore $\vec{v}$ di V dato da $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_n\vec{v}_n$.

Inoltre, siano $\vec{x}, \vec{y} \in V$ con $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + ... + x_n\vec{v}_n$ e $\vec{y} = y_1\vec{v}_1 + ... + y_n\vec{v}_n$

se consideriamo il vettore somma $\vec{x} + \vec{y}$ ad esso resta associata in $\mathbb{K}^n$ l'n-pla $(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$ infatti:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1\vec{v}_1 + ... + x_n\vec{v}_n) + (y_1\vec{v}_1 + ... + y_n\vec{v}_n) = (x_1 + y_1)\vec{v}_1 + ... + (x_n + y_n)\vec{v}_n$$

In modo analogo al vettore $\lambda\vec{x}$ resta associata l'n-pla $(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$ di $\mathbb{K}^n$.

Fissata quindi una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ di V si può "identificare" V con $\mathbb{K}^n$.

$$\begin{aligned} V &\to \mathbb{K}^n \\ \vec{x} &\mapsto (x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

con $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + ... + x_n\vec{v}_n$.

Nel caso di uno spazio vettoriale che non sia finitamente generato la definizione di base si generalizza nel seguente modo:

Un sottoinsieme $\mathcal{B} = \{\vec{v}_i\}_{i\in I}$ di V, che sia infinito, si dice base di V se è un insieme di generatori indipendente.

Se $\mathcal{B} = \{\vec{v}_i\}_{i\in I}$ è base di V ed $\vec{x}$ è un generico vettore di V, allora esiste un sottoinsieme finito $J \subset I$ ed un insieme $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ di scalari di $\mathbb{K}$ tali che

$$\vec{x} = \sum_{j\in J} \lambda_j \vec{v}_j$$

in modo unico.

Esempi.

i) In $\mathbb{K}^n$ i vettori

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, ...\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base di $\mathbb{K}^n$ detta *base canonica*. Il vettore $\vec{e}_i$ ha tutte le componenti nulle tranne la i-sima che è 1.

ii) Analogamente al caso di $\mathbb{K}^n$, anche lo spazio delle matrici $\mathbb{K}^{m,n}$ ha una base canonica, rispetto la quale le componenti di una matrice $A = (a_{ij})$ sono gli scalari a_{ij}. La base canonica di $\mathbb{K}^{m,n}$ è costituita dalle matrici E_{ij} che hanno l'elemento di posto (i, j) uguale ad uno e tutti gli altri elementi uguali a zero; in questo caso $\mathcal{B} = \{E_{ij}\}_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ è composta da $m \times n$ matrici. Per esempio, la base canonica di $\mathbb{K}^{2,2}$ consiste delle 4 matrici

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[t]$ dei polinomi nella variabile t a coefficienti in $\mathbb{K}$. L'insieme infinito $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, ..., t^n, ...\}$ è una base di $\mathbb{K}[t]$, infatti:

sia $p(t) = a_{r_1}t^{r_1} + a_{r_2}t^{r_2} + ... + a_{r_s}t^{r_s}$ un generico polinomio di $\mathbb{K}[t]$. Allora esiste un sottoinsieme finito F di $\mathcal{B}$ con $F = \{t^{r_1}, t^{r_2}, ..., t^{r_s}\}$ tale che

$$p(t) = a_{r_1}t^{r_1} + a_{r_2}t^{r_2} + ... + a_{r_s}t^{r_s}$$

ossia $\mathcal{B}$ genera $\mathbb{K}[t]$. Per provare che $\mathcal{B}$ è indipendente consideriamo

$$a_{r_1}t^{r_1} + a_{r_2}t^{r_2} + ... + a_{r_s}t^{r_s} = 0 = 0t^{r_1} + 0t^{r_2} + ... + 0t^{r_s}$$

Per il principio di identità dei polinomi si ha

$$a_{r_1} = a_{r_2} = ... = a_{r_s} = 0$$

e quindi la tesi. La base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, ..., t^n, ...\}$ di $\mathbb{K}[t]$ è detta base canonica di $\mathbb{K}[t]$.

iv) L'insieme $\{A_1, A_2, A_3\}$ con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una base per il sottospazio delle matrici simmetrice di ordine 2 in quanto ogni matrice simmetrica S di ordine 2 si puo' scrivere in modo unico come combinazione lineare delle matrici A_i.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato.

Teorema 92 *Se i vettori $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$ sono linearmente indipendenti ed appartengono al sottospazio $\mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r)$ allora $p \leq r$*

DIM. Poichè $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ generano $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r)$, ogni vettore di $\mathcal{L}$ si scrive come combinazione di $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$. In particolare si potrà scrivere

$$\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_r \vec{v}_r$$

Almeno uno dei coefficienti $\lambda_1, ..., \lambda_r$ deve essere diverso da zero, altrimenti si avrebbe $\vec{u}_1 = \vec{0}$ (e di conseguenza $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$ sarebbero dipendenti). Siccome in un insieme di generatori l'ordine non conta, non è restrittivo supporre che sia $\lambda_1 \neq 0$. Allora segue che $\vec{v}_1$ è combinazione lineare di $\vec{u}_1$ e dei restanti $\vec{v}_2, ..., \vec{v}_r$. In questo modo, per il corollario 32, abbiamo costruito un nuovo sistema di r generatori per $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_r)$$

Ripetiamo il procedimento per $\vec{u}_2$. Poichè $\vec{u}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_r$ generano $\mathcal{L}$, si potrà scrivere

$$\vec{u}_2 = \mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \mu_3 \vec{v}_3 ... + \mu_r \vec{v}_r$$

Almeno uno dei coefficienti $\mu_2, ..., \mu_r$ deve essere diverso da zero, altrimenti si avrebbe $\vec{u}_2 = \mu_1 \vec{u}_1$ contro l'ipotesi di lineare indipendenza di $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$. Al solito non è restrittivo supporre $\mu_2 \neq 0$. Si ha allora che $\vec{v}_2$ è combinazione lineare di $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_r$ e quindi abbiamo costruito un nuovo sistema di generatori di $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_r)$$

Supponiamo ora, per assurdo, che sia $p > r$. Se seguiamo il procedimento descritto r volte, eliminiamo uno dopo l'altro tutti i $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ e troviamo alla fine un sistema di generatori per $\mathcal{L}$ costituito da $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_r$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_r)$$

Ma allora il vettore $\vec{u}_{r+1}$ è combinazione lineare di $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_r$ contro l'ipotesi di indipendenza lineare dei vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p$ $\square$

Teorema 93 *Tutte le basi di uno spazio vettoriale (finitamente generato) V sono composte dallo stesso numero di vettori.*

DIM. Siano

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\} \text{ e } \mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\}$$

due basi di V. Poichè $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m$ sono m vettori linearmente indipendenti appartenenti a $V = \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$, per il teorema precedente, si ha $m \leq n$. Analogamente, $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ sono n vettori linearmente indipendenti appartenenti a $V = \mathcal{L}(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m)$ da cui $n \leq m$ e quindi $n = m$ $\square$

Definizione 94 Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato, si definisce **dimensione** di V il numero n dei vettori che ne costituiscono una qualsiasi base.

Si scrive $\dim V = n$ e si utilizza anche la notazione V_n per indicare uno spazio di dimensione n.

Si pone $\dim \left\{\vec{0}\right\} = 0$. Se lo spazio V non è finitamente generato si dice che V ha dimensione infinita.

Dal Teorema 92 segue che se $\dim V = n$, allora:

- n è il **massimo** numero di vettori linearmente indipendenti in V.

- n è il **minimo** numero di generatori di V.

Sia H un sottospazio vettoriale di V, allora

$$\dim H \leq \dim V \text{ (Segue dal Teorema 38)}$$

Nel seguito considereremo per lo più spazi vettoriali di dimensione finita.

Teorema 95 ***(del completamento della base, o della base incompleta)***. *Se $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$ con $p < n$ sono vettori linearmente indipendenti di V_n, è possibile determinare altri $(n-p)$ vettori $\vec{v}_{p+1}, ..., \vec{v}_n$ di V_n (che possono essere scelti in una qualsiasi base di V_n) tali che $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, ..., \vec{v}_n\}$ sia una base di V_n.*

DIM. Sia $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ una base di V_n. Da $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p \in V = \mathcal{L}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ segue che $V = \mathcal{L}(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$. Applichiamo ora un metodo, detto degli *scarti successivi,* per scegliere gli $n-p$ vettori tra $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ da aggiungere a $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p$. Consideriamo l'insieme $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_1\}$.

- se $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_1\}$ è lin. dipendente allora scartiamo $\vec{v}_1$

e ripartiamo da $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$.

- se $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_1\}$ è lin. indipendente allora accettiamo $\vec{v}_1$

e ripartiamo da $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ esaminando la dipendenza lineare di $\vec{v}_2$ rispetto a $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_1\}$. Dopo $(n-p)$ passaggi, otteniamo

$$\mathcal{L}(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = \mathcal{L}\left(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_{i_1}, ..., \vec{v}_{i_{n-p}}\right)$$

con $1 \leq i_1, ..., i_{n-p} \leq n$. Siccome n è il minimo numero di vettori che generano V_n, concludiamo che $\left\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_{i_1}, ..., \vec{v}_{i_{n-p}}\right\}$ sono una base di V_n. Pertanto, i vettori $\vec{v}_{i_1}, ..., \vec{v}_{i_{n-p}}$ sono gli $(n-p)$ vettori cercati $\Box$

Proposizione 96 ***Relazione di Grassmann***. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano H e K due suoi sottospazi. Allora*

$$\dim(H+K) = \dim H + \dim K - \dim H \cap K$$

DIM. Poiché $H \cap K$, H e K sono sottospazi vettoriali di uno spazio finitamente generato, essi avranno dimensione finita. Poniamo $\dim H \cap K = p$, $\dim H = h$ e $\dim K = k$. Sia $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p\}$ una base di $H \cap K$ e quindi un insieme di vettori linearmente indipendenti sia di H che di K, a partire da questa base costruiamo, applicando il teorema della base incompleta, una base $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, ..., \vec{v}_h\}$ di H ed una base $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{w}_{p+1}, ..., \vec{w}_k\}$ di K.
Se proviamo che $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, ..., \vec{v}_h, \vec{w}_{p+1}, ..., \vec{w}_k\}$ è una base di $H+K$ avremo come conseguenza che

$$\dim(H+K) = p + (h-p) + (k-p) = h + k - p = \dim H + \dim K - \dim H \cap K$$

e quindi la tesi.

Ora $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, ..., \vec{v}_h, \vec{w}_{p+1}, ..., \vec{w}_k\}$ è una base di $H+K$ se e solo se

1) $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, ..., \vec{v}_h, \vec{w}_{p+1}, ..., \vec{w}_k\}$ generano $H+K$

2) $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, ..., \vec{v}_h, \vec{w}_{p+1}, ..., \vec{w}_k\}$ sono linearmente indipendenti.

Proviamo la 1). Sia $\vec{x} \in H+K$, allora esistono $\vec{v} \in H$ e $\vec{w} \in K$ tali che $\vec{x} = \vec{v} + \vec{w}$. Se $\vec{v} \in H$ allora $\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_p\vec{u}_p + \alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + ... + \alpha_h\vec{v}_h$ e analogamente da $\vec{w} \in K$ segue $\vec{w} = \beta_1\vec{u}_1 + ... + \beta_p\vec{u}_p + \beta_{p+1}\vec{w}_{p+1} + ... + \beta_k\vec{w}_k$ e

$$\vec{x} = \vec{v} + \vec{w} = (\alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_p\vec{u}_p + \alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + ... + \alpha_h\vec{v}_h) +$$

$$+ (\beta_1\vec{u}_1 + ... + \beta_p\vec{u}_p + \beta_{p+1}\vec{w}_{p+1} + ... + \beta_k\vec{w}_k) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)\vec{u}_1 + ... + (\alpha_p + \beta_p)\vec{u}_p + \alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + ... + \alpha_h\vec{v}_h + \beta_{p+1}\vec{w}_{p+1} + ... + \beta_k\vec{w}_k$$

ossia $\vec{x} \in \mathcal{L}(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, ..., \vec{v}_h, \vec{w}_{p+1}, ..., \vec{w}_k)$

Proviamo la 2). Consideriamo

$$\alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_p\vec{u}_p + \alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + ... + \alpha_h\vec{v}_h + \beta_{p+1}\vec{w}_{p+1} + ... + \beta_k\vec{w}_k = \vec{0}$$

Vogliamo provare che tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli.

$$\alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_p\vec{u}_p + \alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + ... + \alpha_h\vec{v}_h + \beta_{p+1}\vec{w}_{p+1} + ... + \beta_k\vec{w}_k = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_p\vec{u}_p + \alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + ... + \alpha_h\vec{v}_h = -\beta_{p+1}\vec{w}_{p+1} - ... - \beta_k\vec{w}_k$$

Posto $-\beta_{p+1}\vec{w}_{p+1} - ... - \beta_k\vec{w}_k = \vec{w}$ si ottiene che $\vec{w}$ appartiene a K ed essendo uguale ad un vettore di H, appartiene anche ad H, allora $\vec{w} \in H \cap K$ da cui

$$\vec{w} = \beta_1\vec{u}_1 + ... + \beta_p\vec{u}_p$$

e quindi

$$-\beta_{p+1}\vec{w}_{p+1} - ... - \beta_k\vec{w}_k = \beta_1\vec{u}_1 + ... + \beta_p\vec{u}_p$$

ossia

$$\beta_1\vec{u}_1 + ... + \beta_p\vec{u}_p + \beta_{p+1}\vec{w}_{p+1} + ... + \beta_k\vec{w}_k = \vec{0}$$

Poichè i vettori $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{w}_{p+1}, ..., \vec{w}_k$ costituiscono una base di K, essi sono linearmente indipendenti e quindi se una loro combinazione lineare è nulla segue che $\beta_1 = ... = \beta_k = 0$. Tornando alla combinazione lineare di partenza

$$\alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_p\vec{u}_p + \alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + ... + \alpha_h\vec{v}_h + \beta_{p+1}\vec{w}_{p+1} + ... + \beta_k\vec{w}_k = \vec{0}$$

si ha

$$\alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_p\vec{u}_p + \alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + ... + \alpha_h\vec{v}_h = \vec{0}$$

Analogamente i vettori $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, ..., \vec{v}_h$ costituiscono una base di H e quindi sono linearmente indipendenti. Segue allora $\alpha_1 = ... = \alpha_h = 0$ e quindi la tesi $\Box$

4.3.1 Significato geometrico del rango di una matrice.

Siano $\vec{r}_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})\,, \vec{r}_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})\,, ..., \vec{r}_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})$ m vettori di $\mathbb{K}^n \equiv \mathbb{K}^{1,n}$; essi individuano una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ di cui costituiscono le righe, ossia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

le cui colonne $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., \vec{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ sono, a loro volta, n vettori di $\mathbb{K}^m \equiv \mathbb{K}^{m,1}$.

Osservazione 97 Ricordiamo che nel primo Capitolo abbiamo definito il rango di una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ come il massimo ordine dei suoi minori aventi determinante diverso da 0. Osserviamo come da tale definizione e dalle proprietà dei determinanti segue facilmente che:

(i) rg$A$=rgA^t per ogni matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.
Infatti, segue immediatamente dal fatto che $\det B = \det B^t$ per ogni matrice quadrata B;

(ii) se le righe o le colonne di una matrice quadrata B sono linearmente dipendenti, allora $\det B = 0$.
Infatti, se $B \in \mathbb{K}^{1,1}$ e la sua unica riga (o colonna) è linearmente dipendente, allora $B = (0)$, per cui ovviamente $\det B = 0$. Se, per $n \geq 2$, $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ e le sue righe (o colonne) sono linearmente dipendenti, allora (almeno) una tra tali righe (o colonne) è combinazione lineare delle rimanenti, e dalle proprietà del determinante ne segue subito che $\det B = 0$.

Procediamo ora a dimostrare il seguente

Teorema 98 (significato geometrico del rango di una matrice) *Il rango di una matrice coincide con il* <u>*massimo*</u> *numero di vettori riga (equivalentemente, colonna) linearmente indipendenti.*

DIM. Osserviamo anzitutto che è sufficiente dimostrare che il rango di una matrice è uguale al massimo numero di vettori colonna linearmente indipendenti; il corrispondente risultato per righe ne segue dal punto (i) della precedente Osservazione, in quanto rg$A$=rgA^t e le colonne di A^t sono esattamente le righe di A.

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una qualsiasi matrice. Denotiamo con p il suo rango, e con q il massimo numero di vettori colonna linearmente indipendenti di A. Dobbiamo allora dimostrare che $p = q$.

1) $p \leq q$. Essendo rg$A = p$, esiste un minore $B \in \mathbb{K}^{p,p}$ di A tale che $\det B \neq 0$. Siano $C_{i_1}, \dots, C_{i_p}$ le colonne di A che concorrono a formare il minore B. Allora, $C_{i_1}, \dots, C_{i_p}$ sono linearmente indipendenti. Infatti, supponiamo per assurdo che $C_{i_1}, \dots, C_{i_p}$ siano linearmente dipendenti, ossia,

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0): \qquad \lambda_1 C_{i_1} + \cdots + \lambda_p C_{i_p} = 0.$$

Ma allora, in particolare,

$$\lambda_1 C'_{i_1} + \cdots + \lambda_p C'_{i_p} = 0,$$

dove $C'_{i_1}, \dots, C'_{i_p}$ sono le colonne di B. Quindi, dal punto (ii) della precedente Osservazione, otteniamo la contraddizione $\det B = 0$.

Pertanto, A ammette almeno p colonne linearmente indipendenti, e quindi $p \leq q$.

2) $q \leq p$. Siano $C_{i_1}, \dots, C_{i_q}$ colonne linearmente indipendenti di A (esistono, in virtù della definizione di q). Consideriamo la matrice $A' = (C_{i_1} \cdots C_{i_q}) \in \mathbb{K}^{m,q}$. Essendo $C_{i_1}, \dots, C_{i_q}$ linearmente indipendenti, il sistema lineare omogeneo di m equazioni in q incognite

$$A'X = 0$$

ammette solo la soluzione banale $X = 0$ (in effetti, tale affermazione è equivalente alla lineare indipendenza di $C_{i_1}, \ldots, C_{i_q}$). Ma allora, per il Teorema di Rouché-Capelli, $\mathrm{rg}A' = q$. Pertanto, esiste un minore B di A' (e quindi, di A) di ordine q, avente determinante $\neq 0$, e quindi, $q \leq p$ $\Box$

In virtù del Teorema appena provato, risulta:

$$rg(A) = \dim \mathcal{L}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_m\right) = \dim \mathcal{L}\left(\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_n\right).$$

Capitolo 5

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali.

In questo capitolo andiamo a considerare un particolare tipo di funzioni tra due spazi vettoriali, le *Applicazioni Lineari*, ossia applicazioni che conservano le operazioni di somma e prodotto e dunque conservano la struttura di spazio vettoriale.

Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to W$ un'applicazione.

Se U è un sottoinsieme di V chiamiamo *immagine di U tramite f* l'insieme

$$f(U) := \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in U\} = \{\vec{y} \in W \mid \exists \vec{x} \in U : f(\vec{x}) = \vec{y}\} \subseteq W.$$

Se Z è un sottoinsieme di W chiamiamo *immagine inversa* (o *antiimmagine*) di Z *tramite f* l'insieme

$$f^{-1}(Z) := \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) \in Z\} \subseteq U.$$

In particolare se $Z = \{\vec{y}\}$ allora $f^{-1}(\vec{y}) := \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{y}\}$ e l'immagine inversa di $\vec{y}$ non si riduce all'insieme vuoto se e solo se $\vec{y} \in f(V)$.

Definizione 99 *Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to W$ un'applicazione. Si dice che f è **lineare** o un **omomorfismo** se*

$$f(\vec{x} + \vec{x'}) = f(\vec{x}) + f(\vec{x'}) \qquad \forall \vec{x}, \vec{x'} \in V$$
$$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in V \ e \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

o equivalentemente

$$f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{x'}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{x'}) \qquad \forall \vec{x}, \vec{x'} \in V \quad e \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Dalla definizione segue che $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$. Infatti:

$$\vec{0}_V = \vec{x} - \vec{x} \Rightarrow f(\vec{0}_V) = f(\vec{x} - \vec{x})$$

per la linearità di f si ha $f(\vec{x}-\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x})$ e quindi

$$f(\vec{0}_V) = f(\vec{x}-\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}_W$$

Se $V = W$ allora l'applicazione lineare $f : V \to V$ è detta *endomorfismo*. Un endomorfismo notevole è l'applicazione identità o identica.

$$I : V \to V$$

$$\vec{x} \mapsto I(\vec{x}) = \vec{x}$$

Osservazione.
L'insieme delle applicazioni lineari

$$Lin(V,W) = \{f : V \to W \,|\, f \ \text{ lineare}\}$$

è uno spazio vettoriale rispetto le seguenti operazioni

$$\begin{array}{ccc} \forall f, g \in Lin(V,W) & (f+g)(\vec{x}) := f(\vec{x}) + g(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in V \\ \forall f \in Lin(V,W) \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{K} & (\lambda f)(\vec{x}) := \lambda f(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in V \end{array}$$

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 100 *Siano V e W spazi vettoriali con V finitamente generato. Sia $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ una base di V e siano $\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n \in W$. Allora esiste un'unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ per $i = 1, ..., n$.*

DIM. Sia $\vec{x} \in V$ allora $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + ... + x_n\vec{v}_n$. Poniamo

$$f(\vec{x}) := x_1\vec{w}_1 + ... + x_n\vec{w}_n$$

e quindi $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ per $i = 1, ..., n$.
- f è lineare, infatti:

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{x'}) &= f((x_1 + x'_1)\vec{v}_1 + ... + (x_n + x'_n)\vec{v}_n) \\ &= (x_1 + x'_1)\vec{w}_1 + ... + (x_n + x'_n)\vec{w}_n \\ &= (x_1\vec{w}_1 + ... + x_n\vec{w}_n) + (x'_1\vec{w}_1 + ... + x'_n\vec{w}_n) \\ &= f(\vec{x}) + f(\vec{x'}) \end{aligned}$$

analogamente si verifica la linearità rispetto al prodotto per uno scalare.
- f è unica, infatti:
supponiamo che esista

$$g : V \to W \text{ tale che } g(\vec{v}_i) = \vec{w}_i \text{ per } i = 1, ..., n$$

allora per ogni $\vec{x} \in V$ si ha

$$f(\vec{x}) - g(\vec{x}) = x_1 f(\vec{v}_1) + ... + x_n f(\vec{v}_n) - (x_1 g(\vec{v}_1) + ... + x_n g(\vec{v}_n)) =$$

$$= x_1 \vec{w}_1 + ... + x_n \vec{w}_n - x_1 \vec{w}_1 - ... - x_n \vec{w}_n = \vec{0}$$

ossia $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ per ogni $\vec{x} \in V$ da cui $f = g$ $\square$

Osservazione.

In generale per conoscere un'applicazione $f : V \to W$ è necessario conoscere $f(\vec{x})$ per ogni $\vec{x} \in V$, se invece l'applicazione f è lineare allora è sufficiente conoscere l'immagine di un numero finito di vettori, infatti:

sia $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ una base di V e sia $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + ... + x_n\vec{v}_n$ un generico vettore di V, allora

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{v}_1 + ... + x_n\vec{v}_n) = x_1 f(\vec{v}_1) + ... + x_n f(\vec{v}_n)$$

per la linearità di f. Quindi dalla conoscenza dell'immagine degli n vettori della base $\mathcal{B}$ si ricava l'immagine di un qualsiasi vettore $\vec{x}$ dello spazio V.

Un'altra notevole proprietà delle applicazioni lineari è data dalla seguente

Proposizione 101 *Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ ed $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora*

$$\begin{aligned} S \textit{ sottospazio di } V \quad &\Rightarrow \quad f(S) \textit{ sottospazio di } W \\ T \textit{ sottospazio di } W \quad &\Rightarrow \quad f^{-1}(T) \textit{ sottospazio di } V \end{aligned}$$

DIM. Sia S sottospazio di V e siano $\vec{y}, \vec{y'} \in f(S)$ tali che $f(\vec{x}) = \vec{y}$ e $f(\vec{x'}) = \vec{y'}$ con $\vec{x}, \vec{x'} \in S$

$$\vec{y} + \vec{y'} = f(\vec{x}) + f(\vec{x'}) = f(\vec{x} + \vec{x'}) \in f(S)$$

essendo $\vec{x} + \vec{x'}$ un vettore di S. Analogamente si ha

$$\lambda\vec{y} = \lambda f(\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) \in f(S)$$

essendo $\lambda\vec{x}$ un vettore di S.

Sia T sottospazio di W e siano $\vec{x}, \vec{x'} \in f^{-1}(T)$, allora

$$f(\vec{x} + \vec{x'}) = f(\vec{x}) + f(\vec{x'}) \in T$$

essendo $f(\vec{x})$, $f(\vec{x'}) \in T$ per definizione di immagine inversa. Da ciò segue $\vec{x} + \vec{x'} \in f^{-1}(T)$.

Analogamente sia $\vec{x} \in f^{-1}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha

$$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \in T$$

essendo $f(\vec{x}) \in T$. Da ciò segue $\lambda\vec{x} \in f^{-1}(T)$ $\square$

Tra tutti i sottospazi di V e W ne esistono due particolarmente significativi.

Definizione 102 *Si chiama **nucleo** di f, e si indica con $\ker f$, il sottoinsieme dei vettori $\vec{x}$ di V tali che*

$$f(\vec{x}) = \vec{0}_W$$

Ossia

$$\ker f = f^{-1}(\vec{0}_W)$$

Segue che $\ker f$ non è vuoto in quanto contiene almeno il vettore nullo di V ed inoltre è un sottospazio vettoriale di V.

Definizione 103 *Se il nucleo dell'applicazione lineare f ha dimensione finita, tale dimensione si dice **nullità** di f e si indica con $nl(f)$.*

Definizione 104 *Si chiama **immagine** di f, e si indica con $\mathrm{Im} f$, il sottoinsieme*

$$\mathrm{Im} f = \{\vec{y} \in W \mid \exists \vec{x} \in V : f(\vec{x}) = \vec{y}\} = f(V)$$

Segue che $\mathrm{Im} f$ è un sottospazio vettoriale di W.

Proposizione 105 *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e siano $\vec{x}, \vec{x'} \in V$. Allora*

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x'}) \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{x'} \in \ker f$$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x'}) \Leftrightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{x'}) = \vec{0} \Leftrightarrow f(\vec{x} - \vec{x'}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{x'} \in \ker f$$

Corollario 106 *Una applicazione lineare f è iniettiva se e solo se $\ker f = \left\{\vec{0}\right\}$.*

DIM. Supponiamo che f sia iniettiva, e sia $\vec{x} \in \ker f$. Allora,

$$\vec{x} \in \ker f \quad \Rightarrow \quad f(\vec{x}) = \vec{0}_W = f(\vec{0}_V) \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}_V.$$

Viceversa, sia $\ker f = \left\{\vec{0}\right\}$ e sia $f(\vec{x}) = f(\vec{x'})$. Dalla proposizione precedente abbiamo $\vec{x} - \vec{x'} \in \ker f$, ed ora $\ker f = \left\{\vec{0}\right\}$. Quindi, $\vec{x} - \vec{x'} = \vec{0}$, ossia, $\vec{x} = \vec{x'}$, per cui f è iniettiva $\square$

Osserviamo che se $f : V \to W$ è un'applicazione (lineare o meno), allora

$$f \text{ è suriettiva} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Im} f = W.$$

Lemma 107 *Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ ed $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora*

$$U = \mathcal{L}(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_h) \quad \Longrightarrow \quad f(U) = \mathcal{L}(f(\vec{u}_1), ..., f(\vec{u}_h)).$$

La dimostrazione del Lemma è lasciata per esercizio. Da tale Lemma si ottiene la seguente

Proposizione 108 *Se $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ è una base di V allora*

$$f(V) = \mathrm{Im} f = \mathcal{L}(f(\vec{v}_1), ..., f(\vec{v}_n)).$$

In particolare, $\dim \mathrm{Im} f \leq \dim V$*, e*

$$\dim \mathrm{Im} f = \dim V \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è iniettiva.}$$

DIM. Se f è iniettiva, allora

$$\lambda_1 f(\vec{v}_1) + ... + \lambda_n f(\vec{v}_n) = \vec{0} \Rightarrow f(\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n) = f(\vec{0}) \Rightarrow \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}.$$

Poichè $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ è una base di V, si ha $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ da cui segue che $f(\vec{v}_1), ..., f(\vec{v}_n)$ sono linearmente indipendenti, ossia $\dim \mathrm{Im} f = n = \dim V$.

Viceversa, sia $\dim \mathrm{Im} f = n$ e sia $\vec{x} \in \ker f$ con $\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n$. Allora

$$f(\vec{x}) = f(\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + ... + \lambda_n f(\vec{v}_n) = \vec{0}$$

ma

$$\lambda_1 f(\vec{v}_1) + ... + \lambda_n f(\vec{v}_n) = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

per la lineare indipendenza dei vettori $f(\vec{v}_1), ..., f(\vec{v}_n)$ e quindi $\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$. Per l'arbitrarietà della scelta di $\vec{x}$ si ha che $\ker f = \left\{\vec{0}\right\}$, ossia, f è iniettiva $\square$

Teorema 109 ***(Teorema Fondamentale dell'Algebra Lineare)*** *Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ con V finitamente generato. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora,*

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim V.$$

DIM. Sia $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ una base di V. La tesi è immediata nel caso in cui $\ker f = \left\{\vec{0}\right\}$ perchè abbiamo provato nella precedente Proposizione che questo equivale a dire che $\dim \mathrm{Im} f = \dim V$. La tesi è altrettanto immediata nel caso in cui $\ker f = V$, perchè in questo caso f è l'applicazione nulla e quindi $\mathrm{Im} f = \left\{\vec{0}\right\}$.

Consideriamo quindi gli altri casi. Sia $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p\}$ una base di $\ker f$ con $0 < p < n$. Abbiamo già osservato che $\dim \mathrm{Im} f \leq \dim V$, sia quindi $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_q\}$ una base di $\mathrm{Im} f$ con $0 < q < n$. Inoltre per ogni $i = 1, ..., q$ esiste $\vec{v}_i \in V$ tale che $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$. Se proviamo che $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_q\}$ è una base di V, abbiamo che

$$\dim V = p + q = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$$

ossia la tesi.

1) $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_q$ generano V.
Sia $\vec{x} \in V$. Allora, $f(\vec{x}) \in \mathrm{Im} f$.

$$\Rightarrow \ f(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{w}_1 + ... + \lambda_q \vec{w}_q = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + ... + \lambda_q f(\vec{v}_q) = f(\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_q \vec{v}_q),$$

da cui segue

$$\vec{x} - (\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_q \vec{v}_q) \in \ker f$$

e quindi

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_q \vec{v}_q + \mu_1 \vec{u}_1 + ... + \mu_p \vec{u}_p.$$

2) $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_q$ sono linearmente indipendenti.
Consideriamo una loro combinazione lineare nulla

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + ... + \alpha_p \vec{u}_p + \beta_1 \vec{v}_1 + ... + \beta_q \vec{v}_q = \vec{0}$$

da cui

$$f(\alpha_1 \vec{u}_1 + ... + \alpha_p \vec{u}_p + \beta_1 \vec{v}_1 + ... + \beta_q \vec{v}_q) = f(\vec{0})$$

ossia

$$\alpha_1 f(\vec{u}_1) + ... + \alpha_p f(\vec{u}_p) + \beta_1 f(\vec{v}_1) + ... + \beta_q f(\vec{v}_q) = \vec{0}$$

con $f(\vec{u}_j) = \vec{0}$ per ogni $j = 1, ..., p$, essendo $\vec{u}_j \in \ker f$, ed $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ per ogni $i = 1, ..., q$. Ne segue

$$\beta_1 f(\vec{v}_1) + ... + \beta_q f(\vec{v}_q) = \beta_1 \vec{w}_1 + ... + \beta_q \vec{w}_q = \vec{0}$$

da cui segue $\beta_i = 0$ per ogni $i = 1, ..., q$ per la lineare indipendenza dei vettori $\vec{w}_i$. Quindi

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + ... + \alpha_p \vec{u}_p + \beta_1 \vec{v}_1 + ... + \beta_q \vec{v}_q = \alpha_1 \vec{u}_1 + ... + \alpha_p \vec{u}_p = \vec{0}$$

da cui segue $\alpha_j = 0$ per ogni $j = 1, ..., p$ per la lineare indipendenza dei vettori $\vec{u}_j$. La lineare indipendenza dei vettori $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_q$ è provata □

Definizione 110 *Si dice* ***rango*** *di un insieme di vettori X il* <u>*massimo*</u> *numero di vettori linearmente indipendenti dell'insieme. Si noti che*

$$\mathrm{rg} X = \dim \mathcal{L}(X).$$

Si dice ***rango*** *di un'applicazione lineare f di uno spazio vettoriale di dimensione finita V in uno spazio vettoriale W, che si indica con $rg(f)$, la dimensione (ossia, il rango) di* $\mathrm{Im} f$.

Il Teorema che abbiamo appena dimostrato mette in relazione il rango di f con la sua nullità, per questo motivo è noto anche con il nome di *Teorema del Rango.*

5.0.1 Isomorfismi.

Definizione 111 *Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare e biunivoca allora f si dice **isomorfismo**.*

Se f è un'applicazione biettiva tra spazi vettoriali distinti V e W, l'applicazione inversa f^{-1} è l'unica applicazione di W in V tale che

$$f^{-1} \circ f = Id_V \qquad f \circ f^{-1} = Id_W$$

dove Id_V e Id_W indicano l'applicazione identica nei relativi spazi.

Proposizione 112 *Se f è un isomorfismo da V in W allora anche f^{-1} è un isomorfismo da W in V.*

DIM. Ovviamente f^{-1} è invertibile e la sua applicazione inversa è f . Dobbiamo allora provare che f^{-1} è lineare, ossia che $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$

$$f^{-1}(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f^{-1}(\vec{x}) + \mu f^{-1}(\vec{y}).$$

Poichè f è iniettiva, i due membri dell'uguaglianza precedente sono uguali se lo sono le loro immagini mediante f. Ora banalmente

$$f\left(f^{-1}(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})\right) = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$$

e per la linearità di f

$$f(\lambda f^{-1}(\vec{x}) + \mu f^{-1}(\vec{y})) = \lambda f(f^{-1}(\vec{x})) + \mu f(f^{-1}(\vec{y})) = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$$

da cui la tesi $\square$

Definizione 113 *Due spazi vettoriali V e W si dicono **isomorfi**, in simboli $V \cong W$, se esiste un isomorfismo $f : V \to W$.*

Teorema 114 *Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita. Allora*

$$V \cong W \iff \dim V = \dim W.$$

DIM. Supponiamo sia $V \cong W$, allora esiste un isomorfismo $f : V \to W$. Dall'iniettività di f segue $\ker f = \left\{\vec{0}\right\}$ e dalla suriettività segue $\mathrm{Im} f = W$. Utilizzando il Teorema fondamentale si ha:

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W.$$

Viceversa, supponiamo sia $\dim V = \dim W = n$ e siano $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ una base di V e $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$ una base di W. Consideriamo un'applicazione lineare $f : V \to W$

tale che $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ per $i = 1, ..., n$. Per la Proposizione 100 sappiamo che la funzione f è univocamente determinata, ci resta da provare che è biunivoca.

1) f è iniettiva.

Siano $\vec{x}, \vec{x'} \in V$ con $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + ... + x_n\vec{v}_n$ e $\vec{x'} = x'_1\vec{v}_1 + ... + x'_n\vec{v}_n$. Se $\vec{x} \neq \vec{x'}$ allora esistono x_i, x'_i con $x_i \neq x'_i$ per almeno un $1 \leq i \leq n$. Per la definizione di f si ha

$$f(\vec{x}) = x_1\vec{w}_1 + ... + x_n\vec{w}_n \quad \text{e} \quad f(\vec{x'}) = x'_1\vec{w}_1 + ... + x'_n\vec{w}_n$$

$$x_i \neq x'_i \Rightarrow x_1\vec{w}_1 + ... + x_n\vec{w}_n \neq x'_1\vec{w}_1 + ... + x'_n\vec{w}_n \Rightarrow f(\vec{x}) \neq f(\vec{x'})$$

e quindi la tesi.

2) f è suriettiva.

Sia $\vec{y} \in W$ con $\vec{y} = y_1\vec{w}_1 + ... + y_n\vec{w}_n$. Posto $\vec{x} = y_1\vec{v}_1 + ... + y_n\vec{v}_n$ si ha

$$f(\vec{x}) = y_1\vec{w}_1 + ... + y_n\vec{w}_n = \vec{y}$$

e quindi la tesi $\square$

Esempi.

i) *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita n su $\mathbb{K}$, allora $V \cong \mathbb{K}^n$.*

Infatti, sia $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ una base di V. Allora, l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} C_{\mathcal{B}} : V & \to & \mathbb{K}^n \\ \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i\vec{v}_i & \mapsto & (x_1, ..., x_n), \end{array}$$

che al generico vettore $\vec{x} \in V$ associa le sue coordinate $(x_1, ..., x_n)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, è un isomorfismo tra V e $\mathbb{K}^n$.

ii) Lo spazio dei polinomi $\mathbb{K}_n[t] = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_nt^n \mid a_i \in \mathbb{K}\}$ è isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbb{K}^{n+1}$ tramite l'isomorfismo $p(t) \mapsto (a_0, ..., a_n)$.

Definizione 115 Se $V = W$ ed $f : V \to W$ è un'applicazione lineare e biunivoca allora f si dice **automorfismo**.

La totalità degli automorfismi di V, rispetto alla composizione tra applicazioni è un gruppo (in generale non commutativo) detto Gruppo Lineare di V, ed indicato con $GL(V)$.

5.1 Matrici ed Applicazioni Lineari.

Abbiamo fin qui affrontato lo studio delle *applicazioni lineari* tra spazi vettoriali. Nel caso in cui gli spazi vettoriali abbiano dimensione finita, vedremo come tali applicazioni possono essere rappresentate da matrici e le diverse operazioni tra applicazioni lineari sono tradotte nelle operazioni tra matrici studiate nel I capitolo.

Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ e $\dim W = m$ e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ in V e una base $\mathcal{B}' = \left\{\vec{e'}_1, ..., \vec{e'}_m\right\}$ in W. Sia $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$ un qualunque vettore di V, per la linearità di f, abbiamo già visto che

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + ... + x_n f(\vec{e}_n)$$

e quindi conoscendo $f(\vec{e}_i)$ per ogni $i = 1, ..., n$ siamo in grado di calcolare l'immagine di un qualsiasi vettore di V. Ora $f(\vec{e}_1) \in W$ e quindi

$$f(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e'}_1 + a_{21}\vec{e'}_2 ... + a_{m1}\vec{e'}_m$$

analogamente $f(\vec{e}_2) \in W$ con

$$f(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{e'}_1 + a_{22}\vec{e'}_2 ... + a_{m2}\vec{e'}_m$$

in generale $f(\vec{e}_i) \in W$ con

$$f(\vec{e}_i) = a_{1i}\vec{e'}_1 + a_{2i}\vec{e'}_2 ... + a_{mi}\vec{e'}_m$$

Ossia $f(\vec{e}_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\vec{e'}_j$, possiamo allora introdurre una matrice $A = (a_{ji})$ con $a_{ji} \in \mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

in cui gli elementi della i-sima colonna $(i = 1, ..., n)$ sono le componenti di $f(\vec{e}_i)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. La matrice A è detta *matrice associata* ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e si indica con $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ o semplicemente con $A = M(f)$ ove le basi siano date.

Dato un qualunque vettore $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$ di V, sia $\vec{y} = y_1\vec{e'}_1 + ... + y_m\vec{e'}_m$ la sua immagine tramite f, ossia $\vec{y} = f(\vec{x})$. Si ha

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\textstyle\sum_i x_i\vec{e}_i) = \sum_i x_i f(\vec{e}_i) = \sum_i x_i \big(\sum_j a_{ji}\vec{e'}_j\big) \\ &= \textstyle\sum_j (\sum_i a_{ji}x_i)\vec{e'}_j \end{aligned}$$

Usando la notazione matriciale si ha $Y = AX$ con

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix},$$

matrici colonna che rappresentano rispettivamente le componenti del vettore $\vec{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e le componenti del vettore $\vec{y} = f(\vec{x})$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Esplicitando si ha

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ossia, in modo improprio ma facile da ricordare:

$$\text{“}f(\vec{x}) = AX.\text{”}$$

Si osservi che l'applicazione lineare f è rappresentata univocamente da una matrice solo se sono fissate le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ degli spazi vettoriali V e W. Se si cambia una o entrambe le basi, cambia in generale anche la matrice associata ad f.

Viceversa, data una matrice $A \in \mathcal{M}^{m,n}(\mathbb{K})$ e fissate due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ rispettivamente di V e W, l'applicazione

$$f : V \to W$$

$$X \mapsto AX$$

è l'applicazione lineare che fa corrispondere al vettore con componenti X rispetto alla base $\mathcal{B}$, il vettore con componenti AX rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

Se $V = \mathbb{K}^n$ e $W = \mathbb{K}^m$ scrivendo f_A si usa assumere tacitamente che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ siano le basi canoniche rispettivamente di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$.

Esempio.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ rappresenta un'applicazione lineare f_A

$$f_A : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - 2y + 3z, 4x + 5y - 7z)$$

essendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ 4x + 5y - 7z \end{pmatrix}$$

Siano V, W, U spazi vettoriali con $\dim V = n$, $\dim W = m$ e $\dim U = p$ e siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ basi rispettivamente di V, W e U. Se

$$f : V \to W \quad \text{e} \quad g : W \to U$$

sono applicazioni lineari, allora

$$h := g \circ f : V \to U$$

è lineare e per le matrici associate vale

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}(h) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$$

ove il prodotto tra matrici è righe per colonne.

Ponendo

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}(h) = C \in \mathbb{K}^{p,n}, \quad M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(g) = B \in \mathbb{K}^{p,m}, \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = A \in \mathbb{K}^{m,n}$$

si ha

$$C = BA$$

infatti:

$$f : V \to W \quad \text{e} \quad g : W \to U$$

$$X \mapsto Y = AX \qquad Y \mapsto Z = BY$$

posto $Z = CX$ si ha

$$Z = BY = B(AX) = (BA)X \Rightarrow C = BA$$

utilizzando il seguente lemma

Lemma 116 *Siano F e G due matrici. Se per ogni matrice X per cui sia possibile effettuare i prodotti si ha $FX = GX$ allora $F = G$.*

DIM.

$$\forall X \quad FX = GX \Rightarrow \forall X \quad (F-G)X = O \Rightarrow rg(F-G) = 0 \Rightarrow F - G = 0 \Rightarrow F = G\square$$

Alla luce di quanto detto possiamo dare un ulteriore esempio di spazi vettoriali isomorfi.

Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ con basi rispettivamente $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \left\{\vec{e'}_1, ..., \vec{e'}_m\right\}$.

Consideriamo lo spazio vettoriale

$$Lin(V, W) = \{f : V \to W \,|\, f \ \text{ lineare}\}.$$

Si dimostra che

$$Lin(V, W) \cong \mathbb{K}^{m,n}.$$

Infatti, l'applicazione

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} : Lin(V, W) \to \mathbb{K}^{m,n}$$

è un'isomorfismo.

In particolare per $W = V$ fissata una base $\mathcal{B}$ di V e posto $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ possiamo identificare un automorfismo con una matrice quadrata invertibile ad elementi in $\mathbb{K}$, ossia

$$GL(V) \cong GL(n, \mathbb{K})$$

L'applicazione identica Id di V è rappresentata dalla matrice identità di ordine n.

Si noti che se f è un automorfismo di V, poichè

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$$

segue

$$M(f \circ f^{-1}) = M(f) \cdot M(f^{-1}) = M(Id) = I_n$$

da cui

$$M(f^{-1}) = M(f)^{-1}$$

Teorema 117 *Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ e $\dim W = m$ e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Il rango di f coincide con il rango della matrice $M(f)$.*

DIM. Sia $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ una base di V, sappiamo che $rg(f) = \dim \mathrm{Im} f$ e $\mathrm{Im} f = \mathcal{L}(f(\vec{e}_1), ..., f(\vec{e}_n))$. D'altra parte $f(\vec{e}_1), ..., f(\vec{e}_n)$ sono le colonne di A quindi $rg(A) = \dim \mathcal{L}(f(\vec{e}_1), ..., f(\vec{e}_n))$ da cui la tesi $\square$

Se consideriamo il sottospazio vettoriale $\ker f$, la sua dimensione è legata al rango di A dalla seguente relazione

$$\dim \ker f = \dim V - rgA$$

che discende dal Teorema fondamentale.

5.1.1 Cambiamenti di base.

Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, $\mathcal{B}' = \left\{\vec{e'}_1, ..., \vec{e'}_n\right\}$ due basi di V.

Ogni elemento di $\mathcal{B}$, in quanto vettore di V, si potrà scrivere come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}'$ e viceversa ogni elemento di $\mathcal{B}'$ si potrà scrivere come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$. In forma compatta,

$$\vec{e}_k = \sum_{j=1}^{n} p_{jk} \vec{e'}_j \quad \text{e} \quad \vec{e'}_j = \sum_{r=1}^{n} p'_{rj} \vec{e}_r$$

La matrice $P = (p_{jk})$, le cui colonne sono le componenti dei vettori della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, è una matrice invertibile (essendo le sue colonne linearmente indipendenti), e si può osservare che $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id)$. Analogamente, $P' = (p'_{rj}) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id)$. Ne segue che

$$P' \cdot P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Id \circ Id) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Id) = I_n,$$

ossia, $P' = P^{-1}$. Sia $\vec{x} \in V$, e denotiamo con X ed X' rispettivamente le matrici colonna delle sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Allora:

$$\sum_{j=1}^{n} x'_j \vec{e'}_j = \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{j=1}^{n} p_{jk} \vec{e'}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} p_{jk} x_k \right) \vec{e'}_j,$$

per cui, $x'_j = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{jk} x_k$, vale a dire che $X' = PX$. Per questo motivo, P si chiama *matrice di passaggio* dalla base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Di conseguenza, ovviamente abbiamo anche $X = P^{-1}X' = P'X'$).

Siano ora V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Vediamo in che modo si trasforma la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : V \to W$ per effetto di un cambiamento di base in V e/o in W.

Siano $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ e $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ due basi di V e W. Supponiamo che in V si operi un cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e in W un cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$, e denotiamo rispettivamente con P e Q le matrici di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$. Siano inoltre $A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$ e $A' = M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f)$. Allora, per ogni $\vec{x} \in V$, posto $\vec{y} = f(\vec{x})$, con ovvio significato dei simboli si ha:

$$Y' = QY = QAX \qquad \text{e} \qquad Y' = A'X' = A'PX.$$

Pertanto, $QAX = A'PX$, ossia,

$$(QA - A'P)X = 0, \quad \forall X.$$

Pertanto, per il Lemma 116, $QA - A'P = 0$, ossia, $QA = A'P$, e quindi,

$$A' = QAP^{-1}. \tag{5.1.1}$$

La formula (5.1.1) indica come cambia la matrice associata ad un'applicazione lineare quando si cambiano le basi.

Nel caso particolare di un endomorfismo $f : V \to V$, siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V (di dimensione finita), $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ e $A' = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$. Sia P la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Allora, dalla (5.1.1) abbiamo subito

$$A' = PAP^{-1}. \tag{5.1.2}$$

Definizione 118 *Due matrici quadrate $A, A' \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dicono* ***simili*** *se esiste una matrice invertibile P tale che $A' = PAP^{-1}$.*

Vale quindi il seguente

Teorema 119 *Matrici associate ad uno stesso endomorfismo rispetto a basi diverse sono simili.*

Proposizione 120 *La similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza.*

DIM. *Riflessività:* Per provare che A è simile a se stessa, basta porre $P = I_n$.

Simmetria: Se A' è simile ad A, esiste P invertibile per cui $A' = PAP^{-1}$. Pertanto, $A = P^{-1}A'P = QAQ^{-1}$, con $Q = P^{-1}$ invertibile, ossia, A' è simile ad A.

Transitività: Se A è simile ad A' ed A' è simile ad A'', allora esistono matrici invertibili P, Q, tali che $A' = PAP^{-1}$ e $A'' = QA'Q^{-1}$. Pertanto,

$$A'' = QA'Q^{-1} = Q(PAP^{-1})Q^{-1} = (QP)A(P^{-1}Q^{-1}) = (QP)A(QP)^{-1},$$

e QP è ancora invertibile (Teorema di Binet). Quindi, A'' è simile ad A $\square$

Proposizione 121 *Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$. Allora,*

$$A \text{ simile a } B \quad \Rightarrow \quad rgA = rgB \text{ e } \det A = \det B.$$

DIM. Vogliamo quindi dimostrare che il rango di una matrice ed il suo determinante sono *invarianti per similitudine*. Siano allora A ed $A' = PAP^{-1}$ due matrici simili. Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^n$, sia f l'endomorfismo associato ad A rispetto a $\mathcal{B}$. Allora, A' è la matrice associata ad f rispetto alla nuova base $\mathcal{B}'$ determinata dalla matrice di passaggio P, e

$$rgA = \dim \mathrm{Im} f = rgB.$$

Inoltre, utilizzando la regola di Binet si ha

$$\det A' = \det\left(PAP^{-1}\right) = \det P \det A \det P^{-1} = \det P \det A \frac{1}{\det P} = \det A \quad \square$$

Osservazione. $rgA = rgB$ e $\det A = \det B \quad \not\Rightarrow \quad A$ e B simili.
Infatti, consideriamo

$$A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Allora, $\det A = 1 = \det B$ e $rgA = 2 = rgB$.
Tuttavia, se per assurdo A e B fossero simili, avremmo $B = P^{-1}AP = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2$, che è falso.

5.2 Sistemi ed Applicazioni Lineari.

Lo studio dei sistemi lineari a coefficienti e termini noti in un campo $\mathbb{K}$ è fortemente connesso con la teoria delle applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita V_n, W_m sul campo $\mathbb{K}$. Questo legame è evidente nel Teorema di Rouchè-Capelli che ora dimostriamo con strumenti di Algebra Lineare.

Teorema 122 ***(di Rouchè-Capelli)***. *Sia $AX = B$ un sistema lineare con $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ matrice dei coefficienti, $X \in \mathbb{K}^n$ colonna delle incognite e $B \in \mathbb{K}^m$ colonna dei termini noti.*

$$\textit{Il sistema } AX = B \textit{ è compatibile} \quad \Longleftrightarrow \quad rg(A) = rg(A|B)$$

dove $A|B$ è la matrice completa ottenuta aggiungendo ad A la colonna B dei termini noti. Inoltre,

$$\textit{se } rg(A) = rg(A|B) = p \textit{ si hanno i seguenti casi:} \quad \begin{cases} p = n & \textit{una sola soluzione} \\ p < n & \infty^{n-p} \textit{ soluzioni} \end{cases}$$

dove con "∞^{n-p} soluzioni" si intende infinite soluzioni dipendenti da $(n-p)$ parametri indipendenti.

DIM. Consideriamo l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rcl} f_A : \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ X & \mapsto & f_A(X) = AX \end{array}$$

ossia, $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(f_A)$, con $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ basi canoniche di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ rispettivamente. Si ha che

$$\text{il sistema } AX = B \text{ è compatibile} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists X_0 \in \mathbb{K}^n \text{ tale che } f_A(X_0) = AX_0 = B.$$

Ma questo equivale a dire che $\vec{b} \in \mathrm{Im} f_A$, essendo B la matrice colonna delle componenti di $\vec{b}$.

Sia $p = \mathrm{rg}A = \dim \mathrm{Im} f$, e siano $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, ..., \vec{a}_{i_p}$ p colonne linearmente indipendenti di A che generano $\mathrm{Im} f_A$. Allora,

$$\vec{b} \in \mathrm{Im} f_A = \mathcal{L}\left(\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, ..., \vec{a}_{i_p}\right) = \mathcal{L}\left(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\right) \quad \Longleftrightarrow \quad rg(A) = rg(A|B),$$

in quanto, essendo $\vec{b}$ combinazione lineare di $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$, ogni minore di $A|B$ che coinvolga la colonna B ha determinante nullo, per cui $rg(A|B) \leq rg(A)$ (mentre $rg(A) \leq rg(A|B)$ vale sempre).

Per dimostrare la seconda parte del teorema supponiamo che $rg(A) = rg(A|B) = p$. Per la compatibilità del sistema esiste almeno una soluzione $\vec{x}_0 \in \mathbb{K}^n$ tale che $f_A(\vec{x}_0) = \vec{b}$.

Detto S l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = B$, proviamo che

$$S = \vec{x}_0 + \ker f_A.$$

Sia $\vec{z} \in S$, allora $f_A(\vec{z}) = \vec{b}$, da cui

$$f_A(\vec{z} - \vec{x}_0) = f_A(\vec{z}) - f_A(\vec{x}_0) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0},$$

ossia, $\vec{z}-\vec{x}_0 \in \ker f_A$. Ora da $\vec{z}=\vec{x}_0+(\vec{z}-\vec{x}_0)$ con $\vec{z}-\vec{x}_0 \in \ker f_A$ segue $\vec{z} \in \vec{x}_0+\ker f_A$.

Viceversa sia $\vec{z} \in \vec{x}_0 + \ker f_A$, ossia $\vec{z} = \vec{x}_0 + \vec{x}$ con $\vec{x} \in \ker f_A$

$$f_A(\vec{z}) = f_A(\vec{x}_0 + \vec{x}) = f_A(\vec{x}_0) + f_A(\vec{x}) = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

ossia $\vec{z} \in S$.

Osserviamo che $\vec{x} \in \ker f_A$ se e solo se $f_A(\vec{x}) = \vec{0}$ ossia, in termini di matrici, se e solo se $AX = O$ con X matrice colonna delle componenti di $\vec{x}$.

Tutte le soluzioni del sistema $AX = B$ si ottengono quindi aggiugendo ad una soluzione particolare di $AX = B$ le soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = O$.

Abbiamo già provato che l'insieme Δ delle soluzioni di un sistema omogeneo è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. Dal teorema del rango otteniamo

$$\dim \Delta = n - rgA = n - p,$$

ossia, il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da $(n-p)$ parametri indipendenti.

Si noti che nel caso particolare di $n = p$, ci si riconduce ad un sistema quadrato di n equazioni in n incognite con matrice dei coefficienti di rango massimo. In tal caso $\ker f_A = \left\{\vec{0}\right\}$, e il sistema ha un'unica soluzione che si può determinare usando il teorema di Cramer $\square$

5.2.1 Sottospazi affini.

Definizione 123 *Sia V uno spazio vettoriale e $\vec{v}$ un fissato vettore di V. Si chiama* ***traslazione*** *definita dal vettore $\vec{v}$, l'aplicazione*

$$t_{\vec{v}} : V \to V$$
$$\vec{x} \mapsto t_{\vec{v}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v}$$

Si osservi che se $\vec{v} \neq \vec{0}$, $t_{\vec{v}}$ non è lineare, infatti $t_{\vec{v}}(\vec{0}) = \vec{v} \neq \vec{0}$.

Indichiamo con $T(V)$ l'insieme di tutte le traslazioni di V. Si ha:

i) $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} = t_{\vec{v}+\vec{w}} = t_{\vec{w}+\vec{v}} = t_{\vec{w}} \circ t_{\vec{v}}$ ($\circ$ è commutativa)

ii) $(t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}}) \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}+\vec{w}} \circ t_{\vec{u}} = t_{(\vec{v}+\vec{w})+\vec{u}} = t_{\vec{v}+(\vec{w}+\vec{u})} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}+\vec{u}} = t_{\vec{v}} \circ (t_{\vec{w}} \circ t_{\vec{u}})$ ($\circ$ è associativa)

iii) se $\vec{v} = \vec{0}$ $t_{\vec{0}}(\vec{x}) = \vec{x} = Id(\vec{x})$ e si ha $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{0}} = t_{\vec{v}} = t_{\vec{0}} \circ t_{\vec{v}}$ (Id è elemento neutro rispetto a $\circ$)

iv) se consideriamo la traslazione $t_{\vec{v}}$ allora esiste la traslazione $t_{-\vec{v}}$ tale che

$$t_{\vec{v}} \circ t_{-\vec{v}} = t_{\vec{0}} = t_{-\vec{v}} \circ t_{\vec{v}}$$

ossia esiste l'elemento simmetrico.

Abbiamo così provato che $(T(V), \circ)$ è un gruppo abeliano.

Definizione 124 *Si chiama applicazione affine di uno spazio vettoriale V in sè ogni applicazione φ tale che*

$$\varphi = t_{\vec{v}} \circ f$$

con $f : V \to V$ applicazione lineare.

Esempio.
Sia

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-x + 2y - 1, 5x - y + 7)$$

φ è un'applicazione affine, cioè $\varphi = t_{\vec{v}} \circ f$ con $\vec{v} = (-1, 7)$ ed

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-x + 2y, 5x - y)$$

La matrice A associata ad f è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Da $\det A \neq 0$ segue $rgA = 2 = \dim \mathrm{Im} f$ e quindi $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$ ossia f è suriettiva.

D'altra parte $\dim \ker f = 2 - \dim \mathrm{Im} f = 0$ e quindi $\ker f = \left\{\vec{0}\right\}$ ossia f è iniettiva.

Dunque f è un isomorfismo e si può provare che anche $\varphi = t_{\vec{v}} \circ f$ è in questo caso invertibile.

Se U è un sottospazio vettoriale di V ed $\vec{v}$ un vettore non nullo fissato di V, il sottoinsieme

$$S = t_{\vec{v}}(U) = \vec{v} + U = \{\vec{x} \in V \,|\vec{x} = \vec{v} + \vec{u} \text{ con } \vec{u} \in U\}$$

è detto *varietà lineare* o *sottospazio affine* di V. Se $\vec{v} \notin U$, $t_{\vec{v}}(U)$ non è un sottospazio vettoriale. Si può però definire la "dimensione di U", in breve $\dim U$, ponendo

$$\dim S = \dim U$$

Ad esempio lo spazio $S = \vec{x}_0 + \ker f_A$ delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo ha dimensione pari alla dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato, in quanto è un suo traslato.

Sia ora $S = \vec{v} + U$ un sottospazio affine di V, $f : V \to V$ un endomorfismo e φ è un'applicazione affine. Valgono le seguenti proprietà:

1) $f(S) = f(\vec{v}) + f(U)$. Infatti:

$$\begin{aligned} \vec{y} &\in f(S) \Leftrightarrow \vec{y} = f(\vec{x}) \text{ con } \vec{x} \in S, \vec{x} = \vec{v} + \vec{u} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{y} = f(\vec{x}) = f(\vec{v} + \vec{u}) = f(\vec{v}) + f(\vec{u}) \text{ con } f(\vec{u}) \in f(U) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{y} \in f(\vec{v}) + f(U) \end{aligned}$$

2) $\varphi(S)$ è un sottospazio affine di V. Infatti:
da $S = \vec{w} + U$ e $\varphi = t_{\vec{v}} \circ f$ segue

$$\begin{aligned} \varphi(S) &= (t_{\vec{v}} \circ f)(S) = t_{\vec{v}}(f(S)) = t_{\vec{v}}(f(\vec{w} + U)) = \\ &= t_{\vec{v}}(f(\vec{w}) + f(U)) = \vec{v} + f(\vec{w}) + f(U) = \vec{z} + f(U) \end{aligned}$$

con $\vec{z} = \vec{v} + f(\vec{w}) \in V$.

3) Sia $g : V \to W$ un'applicazione lineare, sia $\vec{w}_0 \in W$ un vettore fissato tale che $g^{-1}(\vec{w}_0) \neq \emptyset$. Sia $\vec{v}_0 \in V$ tale che $g(\vec{v}_0) = \vec{w}_0$. Allora $g^{-1}(\vec{w}_0)$ è un sottospazio affine di V. Infatti:

$$\begin{aligned} \vec{x} &\in g^{-1}(\vec{w}_0) \Leftrightarrow g(\vec{x}) = \vec{w}_0 = g(\vec{v}_0) \Leftrightarrow g(\vec{x}) - g(\vec{v}_0) = \vec{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(\vec{x} - \vec{v}_0) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{v}_0 \in \ker g \Leftrightarrow \vec{x} \in \vec{v}_0 + \ker g \end{aligned}$$

ossia $g^{-1}(\vec{w}_0) = \vec{v}_0 + \ker g$.

5.2.2 Endomorfismi notevoli.

Vogliamo ora analizzare degli endomorfismi di particolare importanza in Geometria, partendo da alcuni esempi.

Esempio n.1

Sia V uno spazio vettoriale, U e W suoi sottospazi supplementari, cioè tali che $V = U \oplus W$. Allora per ogni $\vec{x} \in V$

$$\exists \mid \vec{x}_u \in V \text{ e } \exists \mid \vec{x}_w \in W \text{ tale che } \vec{x} = \vec{x}_u + \vec{x}_w$$

Consideriamo

$$f : V \to V$$

$$\vec{x} = \vec{x}_u + \vec{x}_w \mapsto f(\ \vec{x}) = \vec{x}_u$$

f è detta *proiezione* su U fatta parallelamente a W ed è un'applicazione lineare.

Ad esempio possiamo considerare $V = \mathbb{R}^3$ $U = \pi_{xy}$ e $W = assez$ ed

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$$

che rappresenta la proiezione sul piano xy eseguita parallelamente all'asse$z$. In questo caso

$$\vec{x} = (x, y, z) = \vec{x}_u + \vec{x}_w \text{ con } \vec{x}_u = (x, y, 0) \text{ e } \vec{x}_w = (0, 0, z)$$

Esempio n.2
Sia $V = U \oplus W$ e

$$s : V \to V$$

$$\vec{x} = \vec{x}_u + \vec{x}_w \mapsto s(\ \vec{x}) = \vec{x}_u - \vec{x}_w$$

s è un endomorfismo detto *simmetria* rispetto ad U eseguita parallelamente a W.
Ad esempio possiamo considerare $V = \mathbb{R}^3$ $U = \pi_{xy}$ e $W = assez$ ed

$$s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$$

che rappresenta la simmetria rispetto al piano xy.

Definizione 125 *Un endomorfismo $p : V \to V$ si dice **proiezione** se $p^2 = p$ (cioè se $p \circ p = p$).*

L'applicazione definita nell'Esempio n.1, la funzione nulla e l'identità sono esempi di proiezioni.

Teorema 126 *Se $p : V \to V$ è una proiezione allora*

$$\begin{aligned} a)\ V &= \mathrm{Im}p \oplus \ker p. \text{ In particolare } p \text{ è del tipo definito nell'Es. n.1} \\ &\quad b) \text{ L'unica proiezione invertibile è l'identità} \end{aligned}$$

DIM. a) Dobbiamo provare che $V = \mathrm{Im}p \oplus \ker p$ ossia che

$$V = \mathrm{Im}p + \ker p \text{ e } \mathrm{Im}p \cap \ker p = \left\{\vec{0}\right\}$$

Sia $\vec{x} \in V$, poniamo $\vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x})$. Si ha banalmente $p(\vec{x}) \in \mathrm{Im}p$ ed inoltre

$$p(\vec{x} - p(\vec{x})) = p(\vec{x}) - p(p(\vec{x}))$$

ed essendo p una proiezione

$$p(\vec{x}) - p(p(\vec{x})) = p(\vec{x}) - p(\vec{x}) = \vec{0}$$

da cui $\vec{x} - p(\vec{x}) \in \ker p$.

Per provare che $\mathrm{Im}p \cap \ker p = \left\{\vec{0}\right\}$ consideriamo un generico vettore $\vec{y} \in \mathrm{Im}p \cap \ker p$. Allora esiste $\vec{x} \in V$ tale che $\vec{y} = p(\vec{x})$ ed inoltre $p(\vec{y}) = \vec{0}$ da cui

$$\vec{0} = p(\vec{y}) = p(p(\vec{x})) = p(\vec{x}) = \vec{y}$$

Inoltre p è del tipo dell'Es. n.1 se si pone $U = \mathrm{Im}p$ e $W = \ker p$ infatti.

$$\vec{x} = \vec{x}_u + \vec{x}_w \text{ con } \vec{x}_u = p(\vec{x}) \text{ e } \vec{x}_w = \vec{x} - p(\vec{x})$$

e

$$f(\vec{x}) = \vec{x}_u = p(\vec{x})$$

b) Per ipotesi p è invertibile e $p^2 = p$.

$$p \text{ invertibile } \Rightarrow \exists p^{-1} \text{ t.c. } p^{-1} \circ p = Id$$

quindi

$$p^2 = p \Rightarrow Id = p^{-1} \circ p = p^{-1} \circ p^2 = \left(p^{-1} \circ p\right) \circ p = p$$

da cui la tesi. $\square$

Osservazione.

Se p è una proiezione allora anche $p_1 = Id - p$ è una proiezione, infatti:

$$p_1^2 = (Id - p) \circ (Id - p) = Id - 2p + p^2 = Id - 2p + p = Id - p = p_1$$

Inoltre $\ker p_1 = \mathrm{Im}p$ infatti:

$$\begin{aligned} \vec{x} &\in \ker p_1 \Leftrightarrow p_1(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow (Id - p)(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{x} - p(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = p(\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathrm{Im}p \end{aligned}$$

Analogamente $\mathrm{Im}p_1 = \ker p$, infatti:

$$\vec{y} \in \ker p \Leftrightarrow p(\vec{y}) = \vec{0}$$

da $p_1 = Id - p$ segue $p = Id - p_1$ e quindi

$$\vec{0} = p(\vec{y}) = (Id - p_1)(\vec{y}) = \vec{y} - p_1(\vec{y})$$

ossia $\vec{y} = p_1(\vec{y}) \in \mathrm{Im}p_1$.

Abbiamo così verificato che se p è la proiezione di U rispetto a W allora p_1 è la proiezione di W rispetto ad U.

Definizione 127 *Un endomorfismo $\phi : V \to V$ si dice **involuzione** se $\phi^2 = Id$.*

Teorema 128 *Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Allora*

a) se ϕ è un involuzione allora $-\phi$ è un involuzione

b) se ϕ è un involuzione allora ϕ è un automorfismo e $\phi^{-1} = \phi$

c) ϕ è un involuzione se e solo se ϕ è una simmetria

DIM. a) Per ipotesi
$$\phi \text{ involuzione} \Rightarrow \phi^2 = Id$$
da cui
$$(-\phi)^2 = \phi^2 = Id$$
ossia $-\phi$ è un involuzione.

b) Sia ϕ un endomorfismo involutorio.
$$\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{y}) \Rightarrow \phi^2(\vec{x}) = \phi^2(\vec{y}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$$
ossia ϕ è iniettiva.

Sia ora $\vec{y} \in V$, consideriamo $\vec{x} = \phi(\vec{y})$, si ha
$$\phi(\vec{x}) = \phi(\phi(\vec{y})) = \phi^2(\vec{y}) = \vec{y}$$
ossia ϕ è suriettiva e quindi ϕ è un automorfismo.

Inoltre
$$\begin{aligned} \phi^2 &= Id \Rightarrow \phi^{-1} \circ \phi^2 = \phi^{-1} \circ Id \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\phi^{-1} \circ \phi\right) \circ \phi = \phi^{-1} \Rightarrow \phi = \phi^{-1} \end{aligned}$$

c) Sia ϕ una simmetria, allora da $\phi(\vec{x}_u + \vec{x}_w) = \vec{x}_u - \vec{x}_w$ con $V = U \oplus W$ segue
$$\phi^2(\vec{x}_u + \vec{x}_w) = \phi(\phi(\vec{x}_u + \vec{x}_w)) = \phi(\vec{x}_u - \vec{x}_w) = \vec{x}_u + \vec{x}_w$$
ossia ϕ è un involuzione.

Viceversa supponiamo che ϕ sia un involuzione e poniamo
$$U = \left\{ \vec{y} \in V \,\middle|\, \vec{y} = \frac{\vec{x} + \phi(\vec{x})}{2} \; \vec{x} \in V \right\}$$
$$W = \left\{ \vec{y} \in V \,\middle|\, \vec{y} = \frac{\vec{x} - \phi(\vec{x})}{2} \; \vec{x} \in V \right\}$$
U e W sono sottospazi vettoriali di V ed inoltre $V = U \oplus W$ infatti $\forall \vec{x} \in V$
$$\vec{x} = \frac{\vec{x} + \phi(\vec{x})}{2} + \frac{\vec{x} - \phi(\vec{x})}{2}$$

inoltre sia $\vec{y} \in U \cap W$, allora $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ t.c. $\vec{y} = \frac{\vec{x}_1+\phi(\vec{x}_1)}{2} = \frac{\vec{x}_2-\phi(\vec{x}_2)}{2}$ da cui

$$\vec{x}_1 + \phi(\vec{x}_1) = 2\vec{y} = \vec{x}_2 - \phi(\vec{x}_2)$$

e quindi

$$\phi(\vec{x}_1) + \phi(\vec{x}_2) = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$$

da cui, applicando ϕ ad ambo i membri, si ottiene

$$\phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$

da

$$\begin{cases} \phi(\vec{x}_1) + \phi(\vec{x}_2) = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \\ \phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \end{cases}$$

segue $2\phi(\vec{x}_2) = 2\vec{x}_2$ e quindi

$$\vec{y} = \frac{\vec{x}_2 - \phi(\vec{x}_2)}{2} \Rightarrow \vec{y} = \vec{0}$$

come volevasi dimostrare.

Infine $\phi = s$ dove s è la simmetria definita nell'Es. n.2. Infatti:

$$s(\vec{x}) = \vec{x}_u - \vec{x}_w = \frac{\vec{x} + \phi(\vec{x})}{2} - \frac{\vec{x} - \phi(\vec{x})}{2} = \phi(\vec{x})$$

□

Definizione 129 *Un endomorfismo $\phi : V \to V$ si dice* ***nilpotente*** *se $\exists h \in N$ t.c. $\phi^h = 0$ (applicazione nulla). Il minimo h tale che $\phi^h = 0$ si dice* ***ordine*** *dell'operatore nilpotente.*

Capitolo 6

Autovalori ed autovettori

L'argomento che andiamo ora ad introdurre è tra i più utilizzati nelle applicazioni dell'algebra lineare e ci permette di approfondire il seguente

Problema: *Dato un endomorfismo f dello spazio vettoriale V, trovare una base $\mathcal{B}$ di V che semplifichi il più possibile la matrice associata ad f.*

Nel seguito consideriamo V spazio vettoriale di dimensione finita n su $\mathbb{K}$ ed $f : V \to V$ un endomorfismo.

Definizione 130 Un vettore $\vec{x} \neq \vec{0}$ di V si dice **autovettore** di f relativo all'**autovalore** $\lambda \in \mathbb{K}$ se si ha

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}.$$

Osservazione. Qualunque sia $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha

$$f(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda\vec{0}$$

per la linearità di f. Per questo motivo nella definizione di autovettore si suppone esplicitamente $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Può invece esistere l'autovalore $\lambda = 0$. Infatti, se $\ker f \neq \left\{\vec{0}\right\}$, allora tutti i vettori non nulli di $\ker f$ risultano essere autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 0$.

Se ponessimo l'attenzione sull'autovalore piuttosto che sull'autovettore, potremmo dare la seguente definizione, del tutto analoga alla precedente.

Definizione 131 *Un elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto* autovalore *di f se esiste un vettore non nullo $\vec{x}$ tale che*

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}.$$

Siano ora λ un autovalore di f e $\vec{x}$ un autovettore relativo all'autovalore λ, allora

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

da cui
$$f(\vec{x}) - \lambda Id(\vec{x}) = \vec{0}$$
ossia,
$$\vec{x} \in \ker(f - \lambda Id).$$
Se indichiamo con $V(\lambda)$ l'insieme costituito dal vettore nullo e dagli autovettori di f relativi all'autovalore λ si ha:
$$V(\lambda) = \ker(f - \lambda Id)$$
ossia, $V(\lambda)$ è un sottospazio vettoriale di V di dimensione ≥ 1. Esso è detto *autospazio* di f relativo all'autovalore λ.

Il numero naturale $\dim V(\lambda)$ è detto *molteplicità geometrica* di λ. Nel seguito indicheremo con g_λ la molteplicità geometrica di λ.

Teorema 132 *Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

DIM. Procediamo per induzione sul numero p di autovettori relativi ad autovalori distinti.

Per $p = 1$ essendo l'autovettore non nullo per definizione, esso è linearmente indipendente.

Supponiamo vera la tesi per $p - 1$ autovettori relativi ad autovalori distinti e dimostriamo che è vera per p autovettori.

Siano allora $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_p$ autovettori relativi agli autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ e siano $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{p-1}$ linearmente indipendenti. Se per assurdo i p vettori fossero linearmente dipendenti allora si avrebbe
$$\vec{x}_p = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_{p-1}\vec{x}_{p-1} \qquad (*)$$
da cui
$$f(\vec{x}_p) = f(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_{p-1}\vec{x}_{p-1}) = \alpha_1 f(\vec{x}_1) + \alpha_2 f(\vec{x}_2) + ... + \alpha_{p-1} f(\vec{x}_{p-1})$$
ossia
$$\lambda_p\vec{x}_p = \alpha_1\lambda_1\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_{p-1}\lambda_{p-1}\vec{x}_{p-1} \qquad (1)$$
d'altra parte per $(*)$ si ha
$$\lambda_p\vec{x}_p = \alpha_1\lambda_p\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_p\vec{x}_2 + ... + \alpha_{p-1}\lambda_p\vec{x}_{p-1} \qquad (2)$$
e quindi sottraendo membro a membro la (2) dalla (1) si ha
$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_p)\vec{x}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_p)\vec{x}_2 + ... + \alpha_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p)\vec{x}_{p-1} = \vec{0}$$

Ora $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{p-1}$ sono linearmente indipendenti e gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sono tutti distinti, quindi la relazione precedente è soddisfatta solo per

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{p-1} = 0$$

ma questo implica $\vec{x}_p = \vec{0}$ contro l'ipotesi che $\vec{x}_p$ sia un autovettore. $\square$

Dal precedente Teorema scaturisce il seguente risultato.

Corollario 133 *La somma di autospazi relativi ad autovalori distinti è diretta.*

DIM. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ autovettori, a due a due distinti, di un endomorfismo $f : V \to V$. Consideriamo $\vec{x} \in V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_p)$, e, per ogni $i = 1, \ldots, p$, siano $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in V(\lambda_i)$, tali che

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_p = \vec{y}_1 + \cdots + \vec{y}_p.$$

Ma allora $\vec{x}_i - \vec{y}_i \in V(\lambda_i)$ per ogni i (essendo $V(\lambda_i)$ un sottospazio), e

$$(\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + \cdots + (\vec{x}_p - \vec{y}_p) = \vec{0}.$$

Se i vettori non $\vec{x}_i - \vec{y}_i$ fossero nulli, sarebbero autovalori, relativi ad autovettori distinti. Quindi, per il Teorema precedente, sarebbero linearmente indipendenti, contraddicendo la precedente equazione. Pertanto, $\vec{x}_i - \vec{y}_i = \vec{0}$ ossia, $\vec{x}_i = \vec{y}_i$, per ogni i, e quindi la somma di $V(\lambda_1) \ldots V(\lambda_p)$ è diretta. $\square$

Siano ora $f : V \to V$ un endomorfismo ed $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$ la matrice associata ad f rispetto ad una fissata base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$.

Un vettore $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$ è un autovettore di f relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$, se $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, ossia se le sue componenti, non tutte nulle, soddisfano le relazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Il sistema precedente può essere riscritto anche nella forma

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

che in forma matriciale diventa

$$(A - \lambda I)X = O$$

Affinchè tale sistema omogeneo di n equazioni nelle n incognite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ abbia soluzioni non nulle, deve essere

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Abbiamo così dimostrato che *gli autovalori di f sono le soluzioni, appartenenti al campo $\mathbb{K}$, dell'equazione* $\det(A - \lambda I) = 0$, detta *equazione caratteristica* di f.

Chiamiamo invece *polinomio caratteristico* di f il polinomio nella variabile λ

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

che, sviluppando il determinante, diventa

$$p_A(\lambda) = C_n(A)\lambda^n + C_{n-1}(A)\lambda^{n-1} + ... + C_1(A)\lambda + C_0(A)$$

dove $C_i(A)$ sono funzioni degli elementi della matrice A. In particolare,

$$\begin{cases} C_n(A) = (-1)^n, \\ C_{n-1}(A) = (-1)^{n-1} tr(A), \\ ..... \\ C_0(A) = \det A. \end{cases}$$

Osserviamo che essendo $C_n(A) \neq 0$, il polinomio $p_A(\lambda)$ è un polinomio nella variabile λ di grado n.

Se $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è uno zero di $p_A(\lambda)$ di molteplicità k, ossia

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda) \qquad \text{con } Q(\lambda_0) \neq 0$$

allora si dice che λ_0 è un autovalore di *molteplicità algebrica k*. Nel seguito indicheremo con a_{λ_0} la molteplicità algebrica di λ_0.

Osservazioni.

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora l'equazione $\det(A - \lambda I) = O$ ha n radici in $\mathbb{C}$, pertanto f ha n autovalori, ciascuno contato con la sua molteplicità.

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora gli autovalori di f sono le soluzioni reali dell'equazione $\det(A - \lambda I) = O$. In particolare se n è dispari allora f ammette almeno una soluzione reale e quindi un autovalore.

Teorema 134 *Se A ed A' sono due matrici simili, allora*

$$p_A(\lambda) = p_{A'}(\lambda)$$

DIM. Se A ed A' sono due matrici simili allora esiste una matrice invertibile B tale che $A' = B^{-1}AB$. Ora

$$\begin{aligned} p_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda I) = \det\left[\left(B^{-1}AB\right) - \lambda\left(B^{-1}IB\right)\right] = \\ &= \det\left[B^{-1}(A - \lambda I)B\right] = \det B^{-1} \det(A - \lambda I) \det B = \\ &= \frac{1}{\det B} \det(A - \lambda I) \det B = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

□

Non è vero però il viceversa, possono esistere cioè matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico pur non essendo simili.

Ricordando che matrici simili rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse, possiamo allora parlare di polinomio caratteristico di un endomorfismo f, che indichiamo con $p_f(\lambda)$, come del polinomio caratteristico di una qualsiasi matrice associata all'endomorfismo stesso.

6.1 Endomorfismi semplici

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su $\mathbb{K}$ ed $f : V \to V$ un endomorfismo.

Supponiamo che esista una base $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ di V costituita da autovettori di f relativi agli autovalori, non necessariamente tutti distinti, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Ciò significa che

$$f(\vec{u}_1) = \lambda_1\vec{u}_1 \quad f(\vec{u}_2) = \lambda_2\vec{u}_2....f(\vec{u}_n) = \lambda_n\vec{u}_n$$

Rispetto alla base di autovettori, l'endomorfismo f è quindi rappresentato dalla seguente matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Viceversa, se f è rappresentato, in una certa base, da una matrice diagonale, tale base è una base di autovettori.

Definizione 135 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su $\mathbb{K}$. Un endomorfismo f di V si dice* ***semplice*** *se esiste una base di V costituita da autovettori per f.*

In termini di matrici la precedente definizione diventa:

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dice **diagonalizzabile** se esiste una matrice D diagonale simile ad A. In altre parole se, considerato l'endomorfismo f di V associato ad A, esiste una base di V costituita da autovettori per f.

Osservazione.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ una sua base ed

$$f : V \to V$$

un'applicazione lineare rappresentata dalla matrice A.

Se A è diagonalizzabile allora esiste in V una base costituita da autovettori di f che indichiamo con $\mathcal{A}$. Essendo $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ si ha che

$$D = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(Id) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(Id)$$

è la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{A}$ e quindi è diagonale. Posto $P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(Id)$ si ha che $D = P^{-1}AP$. La matrice P ha per colonne le componenti degli n autovettori indipendenti di f relative alla base $\mathcal{B}$ ed è solitamente detta matrice *diagonalizzante.*

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili così come non tutti gli endomorfismi sono semplici.

Vediamo ora alcuni risultati che ci permetteranno di introdurre un criterio per stabilire se un endomorfismo f è semplice oppure no.

Proposizione 136 *Se f è un endomorfismo di V_n con n autovalori distinti, esso è semplice.*

DIM. Supponiamo che f abbia n autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ e siano $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ gli autovettori relativi. Essendo n autovettori relativi ad autovalori distinti, essi sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di autovettori per f. $\square$

Proposizione 137 *Sia λ un autovalore per f, endomorfismo di V_n e siano g_λ e a_λ, rispettivamente, la molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di λ. Allora*

$$1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$$

DIM. Si ha $g_\lambda \geq 1$ poichè in $V(\lambda)$ esiste almeno un autovettore non nullo per definizione.

Sia ora μ un autovalore di f e $g_\mu = \dim V(\mu)$. Siano $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_q$ una base di $V(\mu)$ avendo posto $q = g_\mu$. Per il teorema della base incompleta, V ha una base del tipo $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_q, \vec{e}_{q+1}, ..., \vec{e}_n\}$ e la matrice associata ad f rispetto questa base è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} \mu & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & B \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \mu & \\ & & O & & & C \end{pmatrix}$$

con C matrice del tipo $(n-q)\times(n-q)$ e

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} \mu-\lambda & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & B \\ & & & \cdot & \\ & & & \mu-\lambda & \\ & & O & & C-\lambda I \end{pmatrix}$$

Operando successivi sviluppi rispetto alle prime q colonne si ha

$$\det(A-\lambda I)=(\mu-\lambda)^q\det(C-\lambda I)$$

Se ne deduce che a_μ è almeno q da cui $g_\mu\le a_\mu$. $\square$

Teorema 138 *(Criterio di Semplicità) Sia V_n uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ed f un endomorfismo di V_n. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*
1) f è semplice,
2) a) tutti gli zeri $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r$ di $p_f(\lambda)$ appartengono a $\mathbb{K}$
b) $g_{\lambda_i}=a_{\lambda_i}$ $\forall i=1,...,r\le n$
3) $V_n=V(\lambda_1)\oplus V(\lambda_2)\oplus...\oplus V(\lambda_r)$ con $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r$ autovalori distinti di f.

DIM. 1) $\Rightarrow$2)

a) Se f è semplice allora esiste una base $\mathcal{B}=\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$ di autovettori per f. Siano $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r$ gli autovalori distinti di f e sia b_{λ_i} il numero degli autovettori di $\mathcal{B}$ relativi all'autovalore λ_i. Si ha

$$b_{\lambda_1}+b_{\lambda_2}+...+b_{\lambda_r}=n$$

ed essendo $a_{\lambda_i}\ge g_{\lambda_r}\ge b_{\lambda_i}$ $\forall i$ ne segue

$$p_f(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{b_{\lambda_1}}(\lambda_2-\lambda)^{b_{\lambda_2}}...(\lambda_r-\lambda)^{b_{\lambda_r}}$$

Poichè $\deg p_f(\lambda)=n$ e quindi $p_f(\lambda)$ ha al più n radici, è necessariamente

$$a_{\lambda_i}=g_{\lambda_r}=b_{\lambda_i}$$

perciò

$$p_f(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{a_{\lambda_1}}(\lambda_2-\lambda)^{a_{\lambda_2}}...(\lambda_r-\lambda)^{a_{\lambda_r}}$$

Pertanto tutti gli zeri $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r$ di $p_f(\lambda)$ appartengono a $\mathbb{K}$.

2) $\Rightarrow$3)

Siano $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r$ gli autovalori distinti di f . Per quanto dimostrato precedentemente, se consideriamo la somma $V(\lambda_1)+V(\lambda_2)+...+V(\lambda_r)$, questa è diretta. Sia ora

$$S=V(\lambda_1)\oplus V(\lambda_2)\oplus...\oplus V(\lambda_r)$$

si ha

$$\begin{aligned}\dim S &= \dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) + ... + \dim V(\lambda_r) = g_{\lambda_1} + g_{\lambda_2} + ... + g_{\lambda_r} = \\ &= a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} + ... + a_{\lambda_r} = n\end{aligned}$$

e quindi $S = V_n$

3) $\Rightarrow$1)

Per ipotesi $V_n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus ... \oplus V(\lambda_r)$. Consideriamo $\mathcal{B}_i$ base di $V(\lambda_i)$, si ha

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_r$$

è una base di V_n costituita da autovettori, ossia f è semplice. $\square$