CdS in Medicina e Chirurgia

APPUNTI DI GEOMETRIA

Giovanni Calvaruso *

PROGRAMMA DEL CORSO:

1) Matrici, determinanti e sistemi lineari

2) Vettori geometrici

3) Geometria analitica del piano

4) Geometria analitica dello spazio

BIBLIOGRAFIA ED APPROFONDIMENTI:
G. CALVARUSO, sezione “Materiale Didattico” del sito web:

http://www.dmf.unisalento.it/∼calvaruso/Homepage/

*N.B.: Queste note sono realizzate ad esclusivo uso interno per il corso di Geometria del Corso di Studi in Medicina e Chirurgia dell'Universitá del Salento. Come tali, non hanno alcuna pretesa di completezza, e sono da intendersi come un puro supporto al corso stesso.

1 MATRICI, DETERMINANTI E SISTEMI LINEARI

1.1 Matrici

Si chiama *matrice reale di tipo* $m \times n$ una tabella di $m \cdot n$ numeri reali, disposti in modo da formare m righe ed n colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

L'elemento generico di A, cioè l'elemento che si trova sull'i-esima riga e j-esima colonna, si indica con a_{ij}. In breve si scrive

$$A = (a_{ij}), \qquad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Se $m \neq n$ la matrice si dice *rettangolare*, se $m = n$ si chiama *quadrata*. Se $m = 1$ la matrice si dice *matrice (o vettore) riga*, se $n = 1$ la matrice si chiama *matrice (o vettore) colonna*.

Indichiamo con $\mathbb{R}^{m,n}$ l'insieme di tutte le matrici reali ad m righe ed n colonne a coefficienti in $\mathbb{R}$. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, allora

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j\,.$$

Una *sottomatrice* $B \in \mathbb{R}^{p,q}$ di una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ è una matrice i cui elementi appartengono a p righe e a q colonne prefissate di A.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1, 3 \\ j = 2, 3 \end{matrix}.$$

Si chiama *trasposta* di $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ la matrice A^T o $A^T \in \mathbb{R}^{n,m}$ ottenuta da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne:

$$A = (a_{ij}) \quad \Rightarrow \quad A^T = (a_{ji})\,.$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & \pi \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Casi particolari di matrici quadrate sono

A *simmetrica*	se $a_{ij} = a_{ji}$
A *antisimmetrica*	se $a_{ij} = -a_{ji}$
A *diagonale*	se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$
A *unita'* o *identica*	se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$; $a_{ii} = 1$.

1.2 Operazioni su matrici

Prodotto di uno scalare per una matrice. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, la matrice λA, *moltiplicazione di A per lo scalare λ*, è la matrice

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \quad \forall i, j$$

Somma di due matrici. Due matrici A e B sono sommabili se entrambe appartengono a $\mathbb{R}^{m,n}$. La matrice *somma* $C = A + B$ è per definizione $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ con

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,.$$

La matrice O avente tutti gli elementi 0 è la matrice *nulla*, e soddisfa

$$A + O = A \qquad \forall A\,,$$

e l'*opposta* di A è la matrice $A' = -A$, dove $a'_{ij} = -a_{ij}$ $\forall i, j$.

Esercizio: Dimostrare che $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Prodotto righe per colonne. La matrice A è moltiplicabile (*righe per colonne*) per la matrice B se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,r}$. La matrice *prodotto* di A e B è la matrice $C = AB \in \mathbb{R}^{m,r}$, con $C = (c_{ik})$ dove

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

è il prodotto della riga i-esima di A per la colonna j-esima di B.

Si noti che in generale non ha senso anche la moltiplicazione BA. Tuttavia, anche nel caso quadrato può accadere

$$AB \neq BA\,.$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA\,.$$

Si osservi che (come nell'esempio) si può avere $AB = O$ senza che A o B siano matrici nulle. In tal caso A e B si dicono *divisori dello zero.*

Si vede facilmente che la matrice unità I è tale che

$$AI = A = IA \qquad \forall A\,.$$

La moltiplicazione tra matrici soddisfa alle regole

$$A(BC) = (AB)C\,,$$
$$(A + B)C = AC + BC\,, \qquad A(B + C) = AB + AC\,,$$

Esempi ed esercizi.

- Se $A = (1, 0, 3)$ allora

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ A \cdot A^T = (10)\,, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Provare che $(AB)^T = B^T A^T$.
- Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, provare che AA^T e $A^T A$ sono simmetriche.
- Si osservi che se A e B sono simmetriche, in generale AB non è simmetrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Se A è una matrice quadrata, allora

$$A^2 = AA, \dots, A^h = A^{h-1} A .$$

Se $AB = BA$, allora $(AB)^k = A^k B^k$. Questo non è vero, in generale, se $AB \neq BA$.

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è detta *ortogonale* se

$$A^T A = I = AA^T .$$

Esercizi.

- Trovare tutte le potenze della matrice $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- Provare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

  è ortogonale.
- Siano $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Vedere se

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 .$$

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è detta *invertibile* se esiste una matrice $A' \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che

$$AA' = I = A'A .$$

Si scrive in tal caso $A' = A^{-1}$. Quindi, se A è ortogonale, $A^{-1} = A^T$. Vedremo in seguito un criterio che ci permette di decidere quando una matrice è invertibile.

Esercizio: Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

stabilire se sono invertibili e in tal caso trovare l'inversa.

Nota. Le matrici sono molto utili in matematica: permettono di semplificare complicate espressioni considerando tutta la tabella come un unico ente. Le matrici intervengono nella schematizzazione di molti fenomeni, dipendenti da un numero finito di parametri.
Come vedremo più avanti, se vogliamo risolvere un sistema di equazioni lineari, una matrice ci dà tutte le informazioni necessarie per risolverlo.

1.3 Determinante di una matrice quadrata

Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, chiamiamo

$$\det A = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}\,,$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le $n!$ permutazioni dei numeri $1, 2, \dots, n$.

In termini piú semplici, *il determinante* di una matrice reale **quadrata** è un numero, che si associa alla matrice stessa, e ne evidenzia alcune importanti proprietá. Si puó descrivere come calcolare tale numero *in maniera ricorsiva*, ossia, per matrici quadrate via via piú grandi:

Se $n = 1$, allora $\det A = a_{11}$.

Se $n = 2$, allora

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,,$$

se $n = 3$, allora

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Illustriamo la *Regola di Laplace* per il calcolo del determinante:

Fissato un elemento a_{ij} di A, si chiama *minore complementare* di a_{ij} la sottomatrice di A di ordine $n-1$, ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna. Si chiama *complemento algebrico* di a_{ij} o *cofattore* di a_{ij}, il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\text{minore complementare di } a_{ij})\,.$$

Teorema: Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora

$$\det A = a_{r1}A_{r1} + \dots + a_{rn}A_{rn}\,,$$

dove r è una fissata riga (scelta arbitrariamente), oppure

$$\det A = a_{1c}A_{1c} + \dots + a_{nc}A_{nc}\,,$$

dove c è una fissata colonna (scelta arbitrariamente).

Questa regola può essere assunta anche come definizione ricorsiva di determinante:

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1 \\ \sum_i a_{ij}A_{ij} = \sum_j a_{ij}A_{ij} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Quindi det è un'applicazione da $\mathbb{R}^{n,n}$ in $\mathbb{R}$.

Dal teorema di Laplace segue immediatamente che

1. $\det A = \det A^T$;
2. se la matrice B si ottiene da A moltiplicando una linea di A per un numero reale k, lasciando invariate le altre linee, allora $\det B = k \det A$.

Esempi ed esercizi.

- Se $I \in \mathbb{R}^{n,n}$, allora $\det I = 1$, $\det(-I) = (-1)^n$.
- Provare con un esempio che, in generale, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

- Provare che per $k \in \mathbb{R}$ si ha $\det(kA) = k^n \det A$.

Proprietá:

1. se le matrici A e B differiscono soltanto per lo scambio di due linee parallele, allora $\det B = -\det A$;
2. se A ha due linee uguali, allora $\det A = 0$;
3. se A ha due linee proporzionali, allora $\det A = 0$;
4. se B si ottiene da A aggiungendo ad una certa linea di A un'altra linea di A moltiplicata per un fattore di proporzionalità, allora $\det B = \det A$;
5. la somma degli elementi di una linea per i complementi algebrici di un'altra linea è zero.

Teorema di Binet: Se A e B sono due matrici quadrate di ordine n, si ha

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)\,.$$

Quindi, in generale, $AB \neq BA$, tuttavia $\det(AB) = \det(BA)$.

Esercizi.
1) Si calcoli $detA$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad (detA = -5).$$

2) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si calcoli $detA$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & -k & k+2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.4 Matrici invertibili

Proposizione: Se A è invertibile, allora

1. $\det A \neq 0$;
2. $detA^{-1} = 1/\det A$.

Se $\det A \neq 0$, allora A è invertibile, e si prova che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A)\,,$$

dove $Adj(A)$, detta *aggiunta classica di* A, è la matrice che ha al posto (i,j) il cofattore A_{ji} di a_{ij}.

Esempi ed esercizi.

1) Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha $detA = -8 \neq 0$,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -1/2 \\ -12 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e $A^{-1} = -\frac{1}{8} Adj(A)$.

1.5 Rango di una matrice

Combinazioni lineari: Date $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $X = (x_j) \in \mathbb{R}^{n,1}$ e $Y = (y_i) \in \mathbb{R}^{m,1}$,

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases}$$

cioè,

$$Y = AX \Leftrightarrow Y = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n,$$

dove $C_1, \ldots, C_n$ sono le colonne di A. Si dice in tal caso che Y è *combinazione lineare* delle colonne di A, con coefficienti $x_1, \ldots, x_n$.

Analogamente, date $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $X' = (x'_j) \in \mathbb{R}^{1,m}$ e $Y' = (y'_i) \in \mathbb{R}^{1,n}$,

$$Y' = X'A \Leftrightarrow Y' = x_1 R_1 + \cdots + x_n R_m,$$

dove $R_1, \ldots, R_n$ sono le righe di A. Si dice in tal caso che Y' è *combinazione lineare* delle righe di A, con coefficienti $x'_1, \ldots, x'_n$.

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,m}$. Da A possiamo estrarre sottomatrici quadrate di ordine r, $1 \leq r \leq \min(n,m)$. Di queste sottomatrici quadrate, dette *minori*, si può fare il determinante e vedere se non è nullo.

Definizione: Il *rango* $rg(A)$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ è dato dal massimo ordine dei suoi minori con determinante non nullo.

Quindi, $rg(A) = p > 0$ vuol dire

1. <u>esiste</u> almeno <u>un</u> minore di ordine p con determinante diverso da 0;

2. <u>tutti</u> gli eventuali minori di ordine $p+1$ hanno determinante nullo.

Naturalmente, $rg(A) = 0$ vuol dire che la matrice è nulla.
Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (quadrata), allora

$$rg(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ invertibile}$$

Esempi ed esercizi.

- La matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$
ha rango 2, poiché $\det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, e tutti i minori di ordine 3 hanno determinante nullo.

- Determinare il rango delle seguenti matrici, al variare di λ,
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \lambda \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 4 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Si vede che $rg(A) = 2$ $\forall\lambda$; $rg(B) = 3$ per $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -2$, mentre $rg(B) = 2$ per $\lambda = -2$ e $rg(B) = 1$ per $\lambda = 1$.

- Calcolare il rango della seguente matrice B al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Poiché $detB = 0$, si ha che $rg(B) \leq 3$. Inoltre,
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$
Dunque, $\mathrm{rg}(B) = 3$ per ogni λ.

1.6 Sistemi lineari

Un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite $x_1, \dots, x_n$ è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

o, in forma più compatta,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,, \qquad i = 1, 2, \dots, m\,,$$

dove i numeri reali a_{ij} sono detti *coefficienti* e $b_i \in \mathbb{R}$ *termini noti.* Se $b_i = 0$ il sistema si dice *omogeneo.*

In forma matriciale:

$$AX = B \tag{1.1}$$

dove $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ è la matrice dei coefficienti, X è la colonna delle incognite e B quella dei termini noti, cioè

$$X^T = (x_1, \dots, x_n)\,, \qquad B^T = (b_1, \dots, b_n)\,.$$

I problemi fondamentali che si presentano sono:

1. esistenza delle soluzioni o compatibilità del sistema (aspetto **qualitativo**);
2. determinazione del numero delle soluzioni (aspetto **quantitativo**);
3. calcolo esplicito di tutte le eventuali soluzioni (aspetto **computazionale**).

Innanzitutto, una **soluzione** del sistema (1.1) è una n-pla $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ che soddisfa simultaneamente tutte le equazioni di (1.1).

Problema 1 (qualitativo). Esso è risolto completamente dal *criterio di Rouche'-Capelli*:

$$\text{il sistema è compatibile} \Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A})\,, \tag{1.2}$$

dove $\tilde{A} = (A, B)$ è la *matrice completa* del sistema.

Esempio. Il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è chiaramente incompatibile. Infatti $1 = rg(A) \neq rg(\tilde{A}) = 2$.

Problema 2 (quantitativo). Sia $rg(A) = rg(\tilde{A}) = p$. Si hanno i seguenti casi.

$$\begin{array}{ll} p = n & \text{una sola soluzione,} \\ p < n & \infty^{n-p} \text{ soluzioni,} \end{array}$$

Con '∞^{n-p} soluzioni' si intende infinite soluzioni dipendenti da $n - p$ parametri.

Ne segue che se $p = m < n$ (*sistema normale*) il sistema è sempre compatibile.

N. B. *La risoluzione di un sistema compatibile di rango p si riconduce sempre a quella di un sistema di p equazioni in p incognite (con matrice dei coefficienti non singolare). Basta* *considerare come parametri le $n-p$ incognite, i cui coefficienti non concorrano a formare il minore di rango uguale a p.*

Problema 3 (computazionale). Si tratta dunque di risolvere un sistema con $n=m$ e $\det A \neq 0$:

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Il teorema di Cramer ci dà l'espressione esplicita delle soluzioni:

$$x_k = \frac{det(A^{(k)})}{det(A)},$$

dove $A^{(k)}$ è la matrice ottenuta da A sostituendo alla k-esima colonna di A la colonna dei termini noti.

Nota: sistemi omogenei. I sistemi *omogenei*, ossia sistemi del tipo

$$AX = O, \tag{1.3}$$

ammettono *sempre* la soluzione nulla $X=O$. Siamo perciò interessati alle soluzioni non nulle, dette anche *autosoluzioni* o *soluzioni proprie.* Se X' è una soluzione di (1.3), allora $\lambda X'$ è una soluzione $\forall\lambda$; se X' e $X"$ sono soluzioni di (1.3), allora anche $X'+X"$ è una soluzione. Chiaramente $rg(A) = rg(\tilde{A})$, e se $p = rg(A)$ allora le soluzioni sono ∞^{n-p}.

Ad ogni sistema lineare non omogeneo (1.1) si può associare il sistema lineare omogeneo (1.3).

Si osservi che se X_0 è una soluzione particolare di (1.1) e $\tilde{X}$ una soluzione generica di (1.3), allora $\tilde{X}+X_0$ è una soluzione generica di (1.1); infatti

$$A(\tilde{X}+\tilde{X}_0) = A\tilde{X} + A\tilde{X}_0 = O + B = B.$$

Esempi.

1) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+z=0 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ A & 0 \\ & 2 \end{array}\right).$$

Poiché $det(A) = -4 \neq 0$, il sistema è di Cramer, e quindi ammette un'unica soluzione. Applicando il metodo risolutivo dei sistemi di tipo Cramer:

$$x = \frac{det(A^1)}{det(A)} = 0, \quad y = \frac{det(A^2)}{det(A)} = 1, \quad z = \frac{det(A^3)}{det(A)} = 0,$$

per cui, $(x,y,z) = (0,1,0)$ è l'unica soluzione del sistema.

2) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y-z=0 \\ 2x+3z=6 \end{cases} \tag{1.4}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{matrix} \right).$$

Poiché $p = rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2$ il sistema è compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni ($n - p = 3 - 2 = 1$). Esso corrisponde al sistema di tipo Cramer

$$\begin{cases} 2y = z \\ 2x = 6 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t + 3 \\ (y = t) \\ z = 2t \end{cases}$$

Applicando il metodo risolutivo dei sistemi di Cramer, il II sistema ha l'unica soluzione $(x, z) = (-3t + 3, 2t)$ (dipendente dal parametro t), e quindi, il sistema dato ha per soluzioni $(x, y, z) = (-3t + 3, t, 2t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Altro metodo: Il sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $(x, y, z) = (h, -1/3\,h, -1/3\,h)$. Una soluzione particolare di (1.4), che si ottiene ad esempio ponendo $z = 0$, è $(3, 0, 0)$. Quindi, *tutte* le soluzioni di (1.4) sono date da

$$(x, y, z) = (h + 3, -1/3\,h, -1/3\,h), \qquad h \in \mathbb{R}.$$

Ponendo $t = -1/3\,h$, ci si rende conto immediatamente che gli insiemi

$$\{(-3t + 3, t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \left\{\left(h + 3, -\frac{1}{3}h, -\frac{2}{3}h\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

coincidono.

3) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 7 \end{cases} \tag{1.5}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix} \right).$$

Poiché $p = rg(A) = 1 \neq 2 = rg(\tilde{A})$, il sistema NON è compatibile

1.7 Esempi ed Esercizi

- Verificare che la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  è ortogonale, per ogni valore reale di θ. Ripetere per

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Trovare A^{-1} e B^{-1}, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Trovare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, il rango delle seguenti matrici A e B. Determinare in particolare i valori reali di k per cui le matrici A e B sono invertibili:

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 3 & 1+k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-k & 3 & -1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & -k & 2 \end{pmatrix}.$$

- Discutere il seguente sistema, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, e risolverlo nei casi in cui è compatibile

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ 2x - \lambda z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- Determinare il polinomio

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

di grado ≤ 3 tale che

$$P(0) = 1, \quad P(1) = -2, \quad P(-1) = -6, \quad P(2) = 3.$$

1.8 Esercizi di riepilogo

1. Date le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0,$$
calcolare $2A - 3B$, A^2, B^T, AB, BA.

2. Date le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
calcolarne tutti i possibili prodotti a due a due.

3. Risolvere il sistema lineare $AX = B$, dove
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Dire se le seguenti matrici sono invertibili. In caso affermativo, trovarne l'inversa.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinare il rango della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -\mu \\ \mu - 1 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

6. Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinare il rango della matrice
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\mu \\ 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

7. Risolvere il sistema lineare
$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 0, \\ x - 2z - t = -1. \end{cases}$$

8. Verificare che i seguenti sistemi lineari sono equivalenti (hanno le stesse soluzioni):
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + y - 4z = 5, \\ x + 3y - 7z = 0, \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} x - z = 3, \\ y - 2z = -1. \end{cases}$$

9. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare e risolvere il sistema lineare
$$\begin{cases} x + kz = k, \\ 2y + z = 0, \\ kx + z = k. \end{cases}$$

2 Vettori dello spazio ordinario

2.1 Lo spazio $\mathbf{V}_3$

Sia S_3 lo spazio ordinario della geometria euclidea. Ogni segmento di estremi A e B individua due segmenti orientati AB e BA aventi orientazioni opposte; ciò è espresso scrivendo che

$$AB = -BA \quad \text{oppure} \quad \vec{AB} = -\vec{BA}.$$

Nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio introduciamo la seguente relazione di equivalenza, detta di *equipollenza*

$$AB \sim CD \Leftrightarrow AB \text{ è parallelo a } CD,\ \|AB\| = \|CD\|, \text{ e } AB, CD \text{ sono equiversi.}$$

Le classi di equivalenza si chiamano *vettori* (liberi). Il vettore $\vec{u}$ individuato da $\vec{AB}$ e da tutti quelli ad esso equipollenti (come $\vec{CD}$) soddisfa l'uguaglianza $\vec{u} = [\vec{AB}] = [\vec{CD}]$. Il rappresentante $\vec{AB}$ di un vettore $\vec{u}$ si dice *vettore $\vec{u}$ applicato in A* e si indica $(\vec{u}, A)$. Si usa anche la notazione $\vec{u} = B - A$.

I segmenti AA, BB, $\dots$, individuano il vettore nullo $\vec{0}$.

Un vettore non nullo è individuato dalla direzione, dal verso e dal modulo. Indichiamo con $\mathbf{V}_3$ l'insieme dei vettori liberi dello spazio e con $\mathbf{S}_3$ i punti dello spazio. Fissato un punto $O \in \mathbf{S}_3$, ad ogni punto $P \in \mathbf{S}_3$ si può associare un unico vettore $\vec{u} \in \mathbf{V}_3$, ponendo $\vec{u} = \vec{OP}$, e viceversa.

2.2 Somma di vettori

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori, che vogliamo sommare. Se si considerano i rappresentanti indicati $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - B$, poniamo

$$\vec{u} + \vec{v} = C - A$$

(che non dipende dai rappresentanti scelti).

Proprietá:

1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + (\vec{v}) + \vec{w}$ (associativa)

2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativa)

3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (elemento neutro)

4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (inverso rispetto alla somma)

Si osservi che se consideriamo rappresentanti opportuni $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AD}$, allora $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$ è la diagonale del parallelogramma di lati AB e AD, in accordo con quanto si studia in Fisica.

Differenza di vettori: Per definizione, poniamo $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Se $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - A$, allora $\vec{u} - \vec{v} = B - C$.

2.3 Prodotto di un numero reale per un vettore

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbf{V_3}$. Vogliamo definire $\lambda\vec{u}$.

1. Se $\lambda = 0$, oppure $\vec{u} = \vec{0}$, poniamo $\lambda\vec{u} = \vec{0}$.
2. Se $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, il vettore $\lambda\vec{u}$ ha direzione coincidente con $\vec{u}$, verso concorde con quello di $\vec{u}$ se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$, e inoltre

$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|.$$

Il numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è detto *scalare*.

Proprietà:

1) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$,

2) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$,

3) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$,

4) $1\vec{u} = \vec{u}$

2.4 Dipendenza lineare

I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente dipendenti* se e solo se esiste una n-pla $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tale che

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}.$$

Se ad esempio $\lambda_n \neq \vec{0}$, allora

$$\vec{v}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\vec{v}_1 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\vec{v}_{n-1},$$

cioè, $\vec{v}_n$ 'dipende' da $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$. Più precisamente, $\vec{v}_n$ è <u>combinazione lineare</u> di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$. In generale, si dice che un vettore $\vec{v}$ è *combinazione lineare* di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ con coefficienti $\lambda_1, \dots \lambda_n$ se

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n \,. \tag{2.1}$$

Indipendenza lineare: I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente indipendenti* se e solo se *non* sono linearmente dipendenti, cioè

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Chiaramente vale sempre (sia nel caso dell'indipendenza, sia nel caso della dipendenza)

$$\lambda_i = 0 \text{ per ogni } i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}\,.$$

Significato geometrico: Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbf{V}_3$. Allora

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \text{ dipendente} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 = \vec{0} \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ dipendenti} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ dipendenti} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ complanari.} \end{aligned}$$

$n \geq 4$ **vettori di $\mathbf{V}_3$ sono sempre dipendenti**. Quindi, in $\mathbf{V}_3$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 3.

Sia $\mathbf{V}_2$ l'insieme dei vettori del piano; in $\mathbf{V}_2$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 2.

Sia $\mathbf{V}_1$ l'insieme dei vettori della retta; in $\mathbf{V}_1$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 1.

Si dice anche che la **dimensione** della retta è 1 ed una sua base è data da un vettore non nullo $\{\vec{v}_1\}$; la dimensione del piano è 2 ed una sua base è data da 2 vettori indipendenti $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$; la dimensione dello spazio è 3 ed una sua base è data da 3 vettori indipendenti $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base di $\mathbf{V}_3$. Allora, $\{\vec{v}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sono dipendenti ($\forall \vec{v}$) e

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3.$$

La terna di numeri $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ è univocamente individuata, e λ_1, λ_2, λ_3 sono dette le *coordinate* di $\vec{v}$ nella base $\mathcal{B}$. Naturalmente, nella base $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 & \text{ha coordinate} & (1,0,0), \\ \vec{e}_2 & \text{ha coordinate} & (0,1,0), \\ \vec{e}_3 & \text{ha coordinate} & (0,0,1). \end{array}$$

Vediamo ora come condizioni vettoriali si traducano in problemi scalari tramite le coordinate. Siano

$$\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \qquad \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \qquad \vec{w}(w_1, w_2, w_3).$$

Allora:

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} au_1 + bv_1 + cw_1 = 0 \\ au_2 + bv_2 + cw_2 = 0 \\ au_3 + bv_3 + cw_3 = 0. \end{cases}$$

Si consideri

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Se $rg(A) = p$, allora p è il massimo numero di vettori indipendenti in $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Naturalmente, $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$, e $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

Se consideriamo il riferimento cartesiano affine $\mathcal{R}(Oxyz)$ associato a $\mathcal{B}$ tale che $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ siano i vettori unità sugli assi si ha, con l'usuale simbolismo,

$$\vec{e}_1 = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{j}, \quad \vec{e}_3 = \vec{k},$$
$$u_1 = u_x, \quad u_2 = u_y, \quad u_3 = u_z.$$

Se $P_i(x_i, y_i, z_i)$ per $i = 1, 2$, allora

$$\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Esercizi.

- Siano dati i vettori $\vec{v}(1,2,3)$, $\vec{w}(1,1,1)$ e $\vec{v}_1(1,-1,0)$, $\vec{v}_2(0,1,1)$, $\vec{v}_3(2,2,4)$.
  1. Si possono scrivere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$? Se sì, trovare i coefficienti della combinazione lineare.
  2. $\vec{v}_2$ è combinazione lineare di $\vec{w}, \vec{v}_1, \vec{v}_3$?
- Si consideri $\mathbf{V}_2$ ed una sua base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, i vettori

  $$\vec{v}_1 = (1-t)\vec{e}_1 + t\vec{e}_2, \qquad \vec{v}_2 = t\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

  costituiscono una base di $\mathbf{V}_2$?
- Siano dati i seguenti vettori di $\mathbf{V}_3$ riferiti alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

  $$\vec{v}_1 = (2-h, 4-2h, 2-h), \qquad \vec{v}_2(h, 3h, 2h), \qquad \vec{v}_3(1-h, 1-2h, h).$$

  1. determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\vec{w}(1-2h, 1-h, -5h)$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.
  2. Esaminare il caso $h = 0$.

2.5 Orientazione

In generale, *orientare* uno spazio significa *fissare* una base ordinata di suoi vettori, e assumerla come positiva.

Una retta r si dice *orientata* se é assegnato un vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$, parallelo ad r. Tale vettore determina un verso di percorrenza su r, che **si sceglie** come positivo.

Un piano π si dice *orientato* se é assegnata una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *ordinata* di vettori paralleli a π. Tale base determina un verso di rotazione su π, quello della minima rotazione che porta $\vec{e}_1$ su $\vec{e}_2$, che **si sceglie** come positivo. Per convenzione, si sceglie il verso *antiorario* come positivo.

Lo spazio S_3 é *orientato* se é assegnata una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *ordinata* di vettori paralleli a π. Tale base determina una orientazione, che **si sceglie** come positiva, legata al fatto che un osservatore, posto nel semispazio determinato dal piano di $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ in cui c'é $\vec{e}_3$, vede la minima rotazione che porta $\vec{e}_1$ su $\vec{e}_2$ in senso *antiorario*.

2.6 Prodotto scalare

Il *prodotto scalare* tra due vettori è l'applicazione

$$g\colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbb{R}, \quad g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ o } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, <u>commutatività</u>
2. $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, <u>omogeneità</u>
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, <u>distributività</u>.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una <u>base ortonormale</u> di $\mathbf{V}_3$ (cioè i tre vettori sono mutuamente ortogonali ed hanno modulo unitario); allora:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1, & \vec{j} \cdot \vec{j} &= 1, & \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= 0, & \vec{j} \cdot \vec{k} &= 0, & \vec{i} \cdot \vec{k} &= 0. \end{aligned}$$

Se $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, allora si ha

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{2.2}$$

Si osservi che se $\mathcal{B}$ non fosse ortonormale, l'espressione precedente non sarebbe così semplice. Si vede facilmente che

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \qquad \cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}. \tag{2.3}$$

Dunque, *conoscendo il prodotto scalare*, si può determinare la lunghezza di un vettore e l'angolo tra due vettori. Tutta la geometria euclidea si può dedurre dalla nozione di prodotto scalare (2.2), assumendo le (2.3) come *definizioni* di *modulo* e di *angolo* tra due vettori (vedi esercizi).

La *componente ortogonale* di $\vec{v}$ rispetto ad un vettore non nullo $\vec{u}$ è il <u>numero reale</u>

$$v_{\vec{u}} = \|\vec{v}\| \cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \vec{v} \cdot \hat{u} \in \mathbb{R}.$$

La *proiezione ortogonale* di $\vec{v}$ su $\vec{u}$ è il <u>vettore</u>

$$\vec{v}_{\vec{u}} = v_{\vec{u}}\,\hat{u}.$$

2.7 Prodotto vettoriale

Il *prodotto vettoriale* tra vettori è l'applicazione

$$h\colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3, \quad h(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \text{se } \vec{u} \parallel \vec{v} \\ \vec{w} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\vec{w}$ ha direzione perpendicolare a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, verso tale che la terna $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sia equiversa a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, e modulo $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin \widehat{\vec{u}\vec{v}}$.

Proprietà:

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$, <u>anticommutatività</u>,
2. $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, <u>omogeneità</u>
3. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, <u>distributività</u>.

Se $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ è una base ortonormale, allora

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

2.8 Prodotto misto

Il *prodotto misto* di 3 vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_3$ è dato dal numero reale $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$. Considerata una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, si ha

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Esercizi.

- Provare che $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \mathcal{A}$, area del parallelogramma costruito sui vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- Provare che $|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \mathcal{V}$, volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

2.9 Esercizi di riepilogo

1. Rispetto ad una fissata base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, si considerino i vettori $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{w} = 3\vec{j} + \vec{k}$. Provare che $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ formano una base, e trovare le componenti di $\vec{x} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ rispetto a tale base.
2. Rispetto ad una fissata base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, si considerino i vettori $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = -3\vec{j}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Calcolare $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$, l'area del triangolo di lati $\vec{u}$ e $\vec{v}$, il volume del parallelepipedo di lati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
3. trovare la proiezione ortogonale del vettore $\vec{v} = (0, -3, 0)$ sul vettore $\vec{u} = (1, -2, 3)$.
4. Dati i vettori $\vec{a} = (1, -2, 0)$ e $\vec{b} = (3, -1, -1)$,

(a) Verificare che i vettori

$$\vec{u_1} = (2, 1, 0)\,, \qquad \vec{u_2} = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -2\right)\,,$$

sono perpendicolari ad $\vec{a}$.

(b) Si trovino i vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ perpendicolari a $\vec{b}$ le cui componenti ortogonali ad $\vec{a}$ siano rispettivamente $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$.

5. Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, i vettori $\vec{u} = (h, h-1, 2)$ e $\vec{v} = (5, h, 0)$ sono perpendicolari, e per quali valori sono paralleli.

6. Siano dati i vettori

$$\vec{u} = (2, 1, 3)\,, \quad \vec{v_1} = (0, -1, -1)\,, \quad \vec{v_2} = (1, 0, 2)\,, \quad \vec{w} = (1, 1, 1)\,.$$

Trovare la giacitura $\vec{a}$ individuata da $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ (cioè un vettore perpendicolare al piano individuato da $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$).

7. Si considerino i seguenti vettori

$$\vec{u} = \lambda\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\,, \quad \vec{v} = \vec{i} - \lambda\vec{j} + \vec{k}\,, \quad \vec{w} = -2\vec{i} + \mu\vec{k}\,,$$

dove $\lambda\,, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) Trovare per quali valori di $\lambda\,, \mu$ esistono vettori $\vec{x}$ tali che

$$\vec{u} \wedge \vec{x} + \vec{x} \wedge \vec{v} = \vec{w}\,.$$

(b) Determinare, quando possibile, le componenti di $\vec{x}$ per $\lambda = 1$.

8. trovare i vettori di modulo 3, perpendicolari ai vettori $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

3 Geometria analitica del piano

La Geometria Analitica, nata con Cartesio (intorno al 1637), ha lo scopo di tradurre un problema geometrico in uno analitico, cioè mediante l'uso delle coordinate tradurre un problema riguardante figure geometriche in un problema riguardante numeri ed equazioni. Ma è ancora più interessante l'inverso: interpretare geometricamente equazioni e loro sistemi. In tal modo la geometria e l'analisi si illuminano a vicenda ed è possibile passare dallo spazio dell'intuizione a spazi astratti.

3.1 Coordinate cartesiane nel piano

Un **riferimento ortonormale cartesiano** del piano è individuato da una base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ dei vettori del piano, e da un punto O scelto come origine del riferimento. Il riferimento si indica con $RC(O, x, y)$.

Sia P un punto del piano.

$$P(x, y) \Leftrightarrow \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Fissare un riferimento $RC(O, x, y)$ permette quindi di stabilire *corrispondenze biunivoche* tra i punti del piano, i vettori del piano e le coppie di $\mathbb{R}^2$.

Assi coordinati:

asse x: retta per O e parallela a $\vec{i}$. Ha equazione $y = 0$.

asse y: retta per O e parallela a $\vec{j}$. Ha equazione $x = 0$.

Dati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ del piano,

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

è il vettore posizione di P_2 rispetto a P_1. La *distanza* tra P_1 e P_2 è quindi data da:

$$d(P_1, P_2) = \|\vec{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Il *punto medio* del segmento $\overline{P_1P_2}$ è il punto M di coordinate

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2},\right).$$

3.2 Retta

Due punti P_1, P_2 non coincidenti individuano una retta r del piano:

$$P \in r \Leftrightarrow \vec{P_1P} \parallel \vec{P_1P_2}.$$

Posto $P_i(x_i, y_i)$, $P(x, y)$, il parallelismo si può esprimere in due modi:

Equazione cartesiana di una retta del piano.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante, si ha l'*equazione cartesiana della retta:*

$$r : ax + by + c = 0, \qquad (a, b) \neq (0, 0).$$

I parametri (a, b) rappresentano le coordinate di un vettore (non nullo) perpendicolare alla retta r. Di conseguenza, i parametri $(b, -a)$ rappresentano le coordinate di un vettore parallelo a r.

Equazioni parametriche di una retta del piano.

$$\vec{P_1P} = t\,\vec{P_1P_2}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1) = x_1 + lt \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) = y_1 + mt \end{cases}$$

che sono dette *equazioni parametriche della retta*. I parametri (l, m) sono le coordinate di un vettore parallelo ad r, e si dicono *parametri direttori* della retta. Eliminando il parametro t si perviene all'equazione cartesiana.

Esempio. Dati i punti $P_1(1, 0)$, $P_2(1, 1)$, troviamo le equazioni parametriche e cartesiana della retta. Si ha $\vec{P_1P_2} = (0, 1)$, dunque

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases},$$

da cui l'equazione cartesiana $x = 1$.

Mutue posizioni di due rette.

Siano r ed s due rette del piano. Volendo studiare la loro mutua posizione, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Risulta

$$\text{sistema incompatibile} \Leftrightarrow rg(A) \neq rg(\tilde{A}) \qquad \Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset,$$

$$\text{sistema compatibile} \Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A}) \qquad \Leftrightarrow r \cap r' \neq \emptyset.$$

Inoltre

$$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow 1 \text{ soluzione} \qquad \Leftrightarrow r \cap r' = \{P_0\},$$

$$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni} \qquad \Leftrightarrow r \equiv r'.$$

Ponendo

$$r \parallel r' \Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset \quad \text{oppure} \quad r \equiv r'$$

possiamo dire che

$$r \parallel r' \Leftrightarrow (b, -a) \sim (b', -a') \Leftrightarrow (a, b) \sim (a', b'),$$

dove '$\sim$' sta per 'è proporzionale a'.

Due rette r ed r' sono perpendicolari se e solo se tali sono i loro parametri direttori. Quindi:

$$r \perp r' \Leftrightarrow (l, m) \perp (l', m') \Leftrightarrow (l, m) \cdot (l', m') = 0 \Leftrightarrow (a, b) \cdot (a', b') = 0.$$

Esempi ed esercizi.

- Le rette $x - y = 1$ e $3x - 3y = 1$ sono parallele; le rette $x + 2z = 1$ e $3x + 6z = 3$ sono parallele e coincidenti.
- Le rette $x - 2y = 1$ e $4x + 2y = 1$ sono perpendicolari.

Angoli tra due rette.

Siano r ed r' due rette orientate e $\vec{r}$, $\vec{r'}$ due vettori concordemente orientati con r ed r'. Allora

$$\cos\widehat{rr'} = \cos\widehat{\vec{r}\vec{r'}} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} = \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2+m^2}\sqrt{l'^2+m'^2}}.$$

Se, invece, le due rette non sono orientate, l'angolo $\widehat{rr'}$ può assumere due valori tra loro supplementari:

$$\cos\widehat{rr'} = \pm\frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} = \pm\frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2+m^2}\sqrt{l'^2+m'^2}}.$$

Fasci di rette.

Siano r ed r' due rette. Se $r \cap r' = \{A\}$, si chiama *fascio di rette proprio* la totalità delle rette del piano passanti per A, che si dice *centro* del fascio proprio. Se $r \parallel r'$, la totalità delle rette del piano parallele ad r (o ad r') costituisce il *fascio di rette improprio* individuato dalla giacitura di α (e di α').

Se $r\colon ax + by + c = 0$ e $r'\colon a'x + b'y + c' = 0$ il fascio è rappresentato da

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0,$$

al variare dei parametri omogenei λ e μ, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Se $\lambda \neq 0$, ponendo $k = \mu/\lambda$, il fascio è rappresentato dall'equazione

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0,$$

che esplicita il fatto che le rette di un fascio sono ∞^1.

Si osservi che nell'equazione precedente, al variare di k in $\mathbb{R}$, la retta r' non è rappresentata; essa si può pensare ottenuta per $k = \pm\infty$.

Esempi ed esercizi.

- Scrivere il fascio di rette del piano, di centro $A(-1, 1)$.

Distanze.

Geometricamente, la distanza di un punto P da una retta r, è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su r. Per determinare H, si trova la retta per P e perpendicolare ad r e la si interseca con r.

In termini analitici, se $P(x_0, y_0)$ ed $r : ax + by + c = 0$, allora

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dati due punti distinti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, la *retta assiale del segmento AB* è il luogo dei punti del piano, equidistanti da A e B. La sua equazione (necessariamente di I grado) è

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

Distanza di due rette parallele r, r': è la distanza tra r ed un qualsiasi punto di r'.

3.3 Circonferenza

Chiamiamo *circonferenza* l'insieme dei punti P del piano tali che $\|\vec{CP}\| = R$, dove C è un punto fisso e R un numero reale positivo. Se $C(\alpha, \beta)$ e $P(x, y)$, da $\|\vec{CP}\| = R$ si ha

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

che dà l'equazione cartesiana di una circonferenza generica. Equivalentemente:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

dove $\delta = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$. Viceversa, ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza Σ di centro (α, β), dove $\alpha = -a$, $\beta = -b$, e di raggio $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. Si ha:

$$\begin{array}{lr} a^2 + b^2 - c > 0 & \text{circonferenza ordinaria,} \\ a^2 + b^2 - c = 0 & \text{circonferenza di raggio nullo,} \\ a^2 + b^2 - c > 0 & \text{circonferenza immaginaria.} \end{array}$$

Esempio:
Scrivere l'equazione della circonferenza che ha come punti diametralmente opposti $A(3, 0)$ e $B(1, 1)$.

3.4 Esempi ed esercizi.

1. Determinare le rette del piano che soddisfano le seguenti condizioni:
   (a) r : passante per $A(1, -2)$ e parallela al vettore $\vec{u} = (3, 2)$.
   (b) s : passante per $A(1, -2)$ e $B(2, 2)$.
   (c) t : passante per $A(1, -2)$ e perpendicolare al vettore $\vec{u} = (3, 2)$.
2. Trovare il punto A', simmetrico del punto $A(1, 1)$ rispetto alla retta $r : 2x + 4y + 1 = 0$. (Ripetere per $A(0, 0)$ ed $r : x - 3y + 2 = 0$).
3. Dati i punti $A(1, -1)$, $B(-2, 3)$ e la retta $r : x - y + 3 = 0$, trovare
   (a) i punti $P \in r$ tali che $d(A, P) = d(A, B)$,
   (b) il punto $Q \in r$ tali che $d(A, Q) = d(B, Q)$,
   (c) l'equazione dell'asse del segmento AB.
4. Data la retta $r : x - 3y + 2 = 0$, trovare i punti dell'asse delle x, aventi distanza 3 da r. (Ripetere per l'asse y).
5. Studiare la mutua posizione delle seguenti coppie di rette:
   (a) $r : x + y - 2 = 0$, $s : 2x - 1 = 0$,
   (b) $r : x + y - 2 = 0$, $s : 4x + 4y - 3 = 0$,
   (c) $r : 2x + ky + 1 = 0$, $s : x - y + 1 = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
6. Determinare gli angoli formati dalle seguenti coppie di rette:

(a) $r: x+3y-1=0$, $s: 2x+y+5=0$,

(b) $r: x+y-5=0$, $s: x=1-t, y=2+t$,

7. Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$:

   (a) di centro $A(2,1)$ e raggio 2,

   (b) di centro $B(0,-2)$ e passante per $P(3,1)$,

   (c) di centro $C(1,-3)$ e tangente ad $r: x-y+3=0$,

   (d) di centro $E(1,1)$, e secante la retta $s: x-y+2=0$ in una corda di lunghezza 2.

8. Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$ tangente ad $r: x+y+3=0$ in $A(1,-4)$, e passante per l'origine.

9. Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$, passante per $A(1,-1)$, $B(0,2)$ e $D(-1,3)$.

10. Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$, passante per $A(1,2)$, $B(-1,-2)$ ed avente centro sulla retta $r: x=2+t, y=1-t$. Trovare poi la retta tangente a $\mathcal{C}$ in A, e le rette tangenti a $\mathcal{C}$ e passanti per il punto $D(10,0)$.

3.5 Esercizi di riepilogo.

1. Determinare le equazioni delle bisettrici delle rette

$$r: x-1=0\,, \qquad s: x+2y-1=0\,.$$

   Suggerimento: si ricordi che se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ sono i *versori* associati alle rette, allora $\vec{r}+\vec{s}$ e $\vec{r}-\vec{s}$ danno le direzioni delle bisettrici.

2. Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per l'origine O ed è tangente nel punto $P(1,2)$ alla retta

$$r:\ x-y+1=0\,.$$

4 Coniche

4.1 Definizione e classificazione proiettiva

Si dice *conica* il luogo $\mathcal{C}$ dei punti $P(x,y)$ del piano Euclideo S_2, le cui coordinate (x,y) sono soluzioni di un'equazione di secondo grado a coefficienti reali (non tutti nulli):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{4.1}$$

Sia ora $\mathcal{C}$ la conica rappresentata dall'equazione (4.1). $\mathcal{C}$ si dice *generale* (o *non degenere*) se il polinomio che ne determina l'equazione è irriducibile (nel campo dei numeri reali), si dice *degenere* se tale polinomio è decomponibile nel prodotto di due polinomi di primo grado. In particolare, $\mathcal{C}$ si dice *semplicemente degenere* se $\mathcal{C}$ è unione di due rette distinte, *doppiamente degenere* se è unione di due rette coincidenti.

La suddivisione delle coniche in generali, semplicemente degeneri e doppiamente degeneri costituisce la *classificazione proiettiva* coniche, in quanto tale classificazione è invariante per trasformazioni proiettive. In particolare, è anche invariante per cambiamenti di riferimento cartesiani.

Esempi: $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$ è generale, $\mathcal{C}_2 : x^2 - 2xy = 0$ è semplicemente degenere, $\mathcal{C}_3 : x^2 + y^2 - 2xy = 0$ è doppiamente degenere.

Osservazione: L'equazione (4.1) dipende da 5 parametri essenziali, quindi per determinare una conica occorrono 5 condizioni tra loro indipendenti.

I coefficienti a_{ij} che determinano l'equazione 4.1, formano una matrice quadrata A, **simmetrica** di ordine 3, detta *matrice associata alla conica*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Teorema: Data la conica $\mathcal{C}$, di equazione (4.1), risulta:

- $\mathcal{C}$ è generale $\Leftrightarrow rg(A) = 3$,
- $\mathcal{C}$ è semplicemente degenere $\Leftrightarrow rg(A) = 2$,
- $\mathcal{C}$ è doppiamente degenere $\Leftrightarrow rg(A) = 1$.

Inoltre, il rango di A è invariante per cambiamenti di riferimento (si dice pertanto che $rg(A)$ è un invariante della conica).

4.2 Classificazione affine. Invarianti.

Sia $\mathcal{C}$ una conica **non degenere**. Essendo $\mathcal{C}$ determinata da un'equazione di secondo grado, l'intersezione di $\mathcal{C}$ con una qualsiasi retta contiene 2 punti (reali o complessi, propri oppure "all'infinito", distinti o coincidenti). In particolare, una conica ha due "punti all'infinito", le cui coordinate si trovano ponendo uguale a zero il complesso dei termini di secondo grado dell'equazione (4.1), ossia, risolvendo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0. \tag{4.2}$$

Si chiama *complemento algebrico di* a_{33}, il numero

$$D_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

e si ha:

$$D_{33} = -\Delta,$$

dove Δ è il discriminante di (4.2). Pertanto, risulta:

1. $\mathcal{C}$ ha due punti all'infinito reali e distinti **(Iperbole)** $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow D_{33} < 0$,
2. $\mathcal{C}$ ha due punti all'infinito reali e coincidenti (**Parabola**) $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow D_{33} = 0$,
3. $\mathcal{C}$ ha due punti all'infinito complessi **(Ellisse)** $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow D_{33} > 0$,

Questa distinzione tra diversi tipi di coniche non degeneri sulla base dei suoi punti all'infinito si dice *classificazione affine* delle coniche, ed è invariante per cambiamenti di riferimento affini (in particolare, anche ortonormali, ma NON per cambiamenti di riferimento proiettivi).
Una *circonferenza* è una ellisse con $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$.

Se $\mathcal{C}$ è un'iperbole e $(l, m), (l', m')$ sono le soluzioni di (4.2), i parametri direttori $(l, m), (l', m')$ si dicono *direzioni asintotiche* di $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ è una parabola, le direzioni asintotiche sono coincidenti. Inoltre, un'iperbole $\mathcal{C}$ si dice equilatera se le sue direzioni asintotiche sono ortogonali tra loro.

Si prova che un'iperbole $\mathcal{C}$ è equilatera se e solo se $T = a_{11} + a_{22} = 0$, e si prova che $T = a_{11} + a_{22}$ risulta invariante per cambiamenti di riferimento ortonormali (ma non per quelli affini). I tre numeri $rg(A)$ (che determina la classificazione proiettiva), D_{33} (che determina la classificazione affine) e T si dicono gli *invarianti della conica* $\mathcal{C}$.

4.3 Posizioni di una retta rispetto ad una conica. Retta tangente.

Dati una conica non degenere $\mathcal{C}$ ed una retta r del piano, r può assumere tre posizioni rispetto a $\mathcal{C}$:

r è *secante* se $r \cap \mathcal{C}$ contiene due punti reali e distinti.

r è *tangente* se $r \cap \mathcal{C}$ contiene due punti reali e coincidenti.

r è *esterna* se $r \cap \mathcal{C}$ contiene due punti complessi coniugati.

Dato un punto $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, l'equazione della retta tangente in P_0 a $\mathcal{C}$ è

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0,$$

che si può ricordare più facilmente come lo sviluppo del prodotto

$$\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove (a_{ij}) è la matrice associata alla conica.

4.4 Centro e diametri di una conica.

Ellisse ed iperbole sono dette *coniche a centro*, perché esiste un punto del piano che risulta essere il loro centro di simmetria. Le coordinate del centro C della conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases}$$

Si chiamano *diametri* della conica tutte la rette passanti per il su centro.

Abbiamo detto che una iperbole ha due punti reali “all'infinito”. I diametri tangenti all'infinito all'iperbole si chiamano *asintoti.* Essi sono dati dalle due rette passanti per il centro, e i cui parametri direttori (l, m) sono soluzioni dell'equazione omogenea (4.2), ossia, soddisfano

$$a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + 2a_{12}lm = 0.$$

4.5 Assi di una conica.

Sono dei diametri che rappresentano gli assi di simmetria di una conica non degenere $\mathcal{C}$. Per una conica a centro ($\neq$ circonferenza), sono le due rette passanti per il centro C, ed i cui parametri direttori (l, m) soddisfano l'equazione

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm + a_{12}m^2 = 0.$$

Nel caso di una circonferenza ogni diametro è un asse. Per una parabola $\mathcal{C}$, esiste un unico asse. Essendo per una parabola $D_{33} = 0$, la sua equazione si può scrivere nella forma

$$(ax + by)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

e si dimostra che il suo asse ha equazione

$$(a^2 + b^2)(ax + by) + a_{13}a + a_{23}b = 0.$$

Si chiamano *vertici* di una conica le intersezioni degli assi con la conica stessa. Una parabola ha un unico vertice, un'ellisse ne ha 4, un'iperbole 2 (reali).

4.6 Equazioni canoniche.

Mediante la scelta di un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è possibile scrivere l'equazione di una conica (non degenere) in una forma particolarmente semplice. Distinguiamo i seguenti casi.

a) Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro, di equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

in un riferimento cartesiano $RC(O, x, y)$. Nel nuovo riferimento $RC'(O', x', y')$, scelto in modo tale che $O' = C$ sia il centro della conica, e gli assi del riferimento gli assi della conica, l'equazione si riduce alla forma

$$Lx'^2 + My'^2 + N = 0.$$

Il modo più semplice per determinare i coefficienti L, M, N, consiste nell'usare gli invarianti della conica. Infatti, L, M, N possono determinarsi risolvendo il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} LMN = det(A), \\ LM = D_{33}, \\ L + M = T. \end{cases}$$

Inoltre, in base alle diverse possibilità per il segno di L, M, N, si può scrivere l'equazione canonica in uno dei seguenti modi standard:

I) $\dfrac{x'^{\,2}}{a^2} + \dfrac{y'^{\,2}}{b^2} = 1$ (ellisse a punti reali);

II) $\dfrac{x'^{\,2}}{a^2} + \dfrac{y'^{\,2}}{b^2} = -1$ (ellisse a punti immaginari);

III) $\dfrac{x'^{\,2}}{a^2} - \dfrac{y'^{\,2}}{b^2} = \pm 1$ (iperbole);

b) Sia $\mathcal{C}$ una parabola. In un sistema di riferimento cartesiano $RC'(O', x', y')$, scelto in modo tale che $O' = V$ sia il vertice della conica, e gli assi del riferimento il suo asse e la tangente nel vertice, l'equazione di $\mathcal{C}$ si riduce alla forma

$$\alpha y'^{\,2} + 2\beta x' = 0.$$

Il modo più semplice per determinare i coefficienti α, β consiste nell'usare gli invarianti della conica. Infatti:

$$\begin{cases} -\alpha\beta^2 = det(A), \\ (0 = D_{33}), \\ \alpha = T. \end{cases}$$

5 Geometria analitica dello spazio

5.1 Coordinate cartesiane

Un **riferimento ortonormale cartesiano** dello spazio è individuato da una base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ dei vettori dello spazio, e da un punto O scelto come origine del riferimento. Il riferimento si indica con $RC(O, x, y, z)$.

Sia P un punto dello spazio.

$$P(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Fissare un riferimento $RC(O, x, y, z)$ permette quindi di stabilire *corrispondenze biunivoche* tra i punti di S_3, i vettori di V_3 e le terne di $\mathbb{R}^3$.

Assi coordinati:

asse x: retta per O e parallela a $\vec{i}$. Ha equazioni $y = z = 0$.

asse y: retta per O e parallela a $\vec{j}$. Ha equazioni $x = z = 0$.

asse z: retta per O e parallela a $\vec{k}$. Ha equazioni $x = y = 0$.

Piani coordinati:

piano xy: piano degli assi x ed y. Ha equazione $z = 0$.

piano xz: piano degli assi x e z. Ha equazione $y = 0$.

piano yz: piano degli assi y e z. Ha equazione $x = 0$.

Dati due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dello spazio,

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

è il vettore posizione di P_2 rispetto a P_1. La *distanza* tra P_1 e P_2 è quindi data da:

$$d(P_1, P_2) = \|\vec{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Il *punto medio* del segmento $\overline{P_1P_2}$ è il punto M di coordinate

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

5.2 Piano

Tre punti P_1, P_2, P_3 non allineati individuano un piano α

$$P \in \alpha \Leftrightarrow \vec{P_1P}, \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3} \quad \text{dipendenti.}$$

Posto $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $P(x, y, z)$, la dipendenza lineare si può esprimere in due modi:

Equazione cartesiana di un piano.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante, si ha l'*equazione cartesiana del piano:*

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

I parametri (a, b, c) si chiamano *coefficienti di giacitura* del piano e rappresentano le coordinate di un vettore (non nullo) perpendicolare al piano. Infatti, considerando il vettore $\vec{n} = (a, b, c)$ uscente da $P_0 \in \alpha$, si ha

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \qquad \forall P \in \alpha$$

da cui

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

che rappresenta il piano per P_0 con coefficienti di giacitura (a, b, c).

Equazioni parametriche di un piano.

$$\overrightarrow{P_1P} = u\overrightarrow{P_1P_2} + v\overrightarrow{P_1P_3}, \qquad u, v \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + u(x_2 - x_1) + v(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + u(y_2 - y_1) + v(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + u(z_2 - z_1) + v(z_3 - z_1) \end{cases}$$

che sono dette *equazioni parametriche del piano.* Eliminando i parametri u e v si perviene all'equazione cartesiana.

Esempio. Dati i punti $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(1, 1, 1)$, $P_3(1, 0, 1)$ troviamo le equazioni parametriche e cartesiana del piano. Si ha $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 0, 1)$, dunque

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = u \\ z = u + v \end{cases},$$

da cui l'equazione cartesiana $x = 1$.

Mutue posizioni di due piani.

Siano α ed α' due piani. Volendo studiare la loro mutua posizione, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Risulta

$$\text{sistema incompatibile} \Leftrightarrow rg(A) \neq rg(\tilde{A}) \qquad \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = \emptyset,$$
$$\text{sistema compatibile} \Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A}) \qquad \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' \neq \emptyset.$$

Inoltre

$$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni} \qquad \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = r,$$
$$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \infty^2 \text{ soluzioni} \qquad \Leftrightarrow \alpha \equiv \alpha',$$

dove r è una retta. Ponendo

$$\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = \emptyset \quad \text{oppure} \quad \alpha \equiv \alpha'$$

possiamo dire che

$$\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow (a, b, c) \sim (a', b', c'),$$

dove '$\sim$' sta per 'è proporzionale a'.

Esempi ed esercizi.

- I piani $x - y + 2z = 1$ e $3x - 3y + 6z = 1$ sono paralleli; i piani $x - y + 2z = 1$ e $3x - 3y + 6z = 3$ sono paralleli e coincidenti.
- Il piano perpendicolare al vettore $(1, -1, 2)$ e uscente dal punto $(3, -1, 5)$ è

$$1(x - 3) + (-1)(y + 1) + 2(z - 5) = 0.$$

5.3 Retta

Due punti distinti P_1 e P_2 individuano una retta r:

$$P \in r \Leftrightarrow \vec{P_1P}, \vec{P_1P_2} \text{ dipendenti.}$$

La dipendenza lineare si può esprimere nei seguenti modi.

Equazioni cartesiane di una retta.

$$rg\begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

che si può porre nella forma

$$r\colon \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

Queste ultime sono dette *equazioni cartesiane della retta*. Quindi, ogni retta r si può scrivere come intersezione di due piani α ed α', di equazioni cartesiane

$$\alpha\colon ax + by + cz + d = 0, \qquad \alpha'\colon a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

e tali che

$$rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

Si osservi che la retta r non determina univocamente i piani α ed α': due altri piani *distinti* passanti per r (ce ne sono ∞^1) individuano la stessa retta.

Si chiamano *parametri direttori* di r le coordinate di un arbitrario vettore $\vec{v}$ parallelo ad r. Ovviamente, se $P_1, P_2 \in r$ e $P_1 \neq P_2$, allora $\vec{v} = \vec{P_1P_2}$ è parallelo ad r e quindi parametri direttori di r sono

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$$

I parametri direttori (l, m, n) di una retta sono individuati a meno di un fattore di proporzionalità.

Equazioni parametriche di una retta.

Si ha

$$\vec{PP_1} = t\vec{P_1P_2}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) = x_1 + lt \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) = y_1 + mt \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) = z_1 + nt \end{cases}$$

che sono dette *equazioni parametriche della retta*. Eliminando il parametro t si perviene alle equazioni cartesiane.

Esempi ed esercizi.

- Trovare i parametri direttori della retta

$$r: \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

I suoi parametri direttori sono le soluzioni del sistema omogeneo associato ad r, ossia

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Questo sistema rappresenta, infatti, la retta parallela ad r e passante per l'origine (che ha gli stessi parametri direttori di r). Quindi, una terna di parametri direttori è $\vec{v} = (-3, 1, 2)$.

- Verificare che le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 \\ z = 2 - \frac{t}{2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 11 - 4t' \\ y = 2 \\ z = t' \end{cases},$$

rappresentano la stessa retta r. Chi sono i parametri direttori di r? Scrivere equazioni cartesiane di r.

Mutua posizione retta-piano.

Ad ogni piano α associamo il vettore $\vec{n} = (a, b, c)$, perpendicolare ad α, di coordinate i parametri di giacitura; ad ogni retta r associamo il vettore $\vec{r} = (l, m, n)$, parallelo ad r, di coordinate i parametri direttori.

$$\begin{aligned} & r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n} \Leftrightarrow al + bm + cn = 0 \\ & r \text{ incidente } \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \neg \perp \vec{n} \Leftrightarrow al + bm + cn \neq 0 \end{aligned}$$

In particolare,

$$r \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \vec{n}.$$

Mutua posizione di due rette.

Date due rette dello spazio r ed r', di parametri direttori $\vec{r} = (l, m, n)$ ed $\vec{r'} = (l', m', n')$ rispettivamente, r ed r' possono essere

$$\begin{cases} \text{complanari : } \begin{cases} r \parallel r' \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \vec{r'} \Leftrightarrow (l, m, n) \sim (l', m', n') \\ \\ r \text{ incidente } r' \Leftrightarrow r \cap r' = P_0 \end{cases} \\ \\ \text{sghembe : non complanari.} \end{cases}$$

Caso particolare di incidenza:

$$r \perp r' \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{r'} \Rightarrow ll' + mm' + nn' = 0.$$

Rette sghembe.

Due rette r ed r' sono *sghembe* se non esiste alcun piano che le contiene. Si può provare che esistono due piani α e α' tra loro paralleli tali che

$$r \subset \alpha, \qquad r' \subset \alpha'.$$

Chiaramente, $dist(r, r') = dist(\alpha, \alpha')$, che è la cosiddetta *minima distanza* tra le rette sghembe r e r'. Ricordiamo che, se F ed F' sono due insiemi di punti dello spazio, la distanza tra F ed F' è per definizione

$$dist(F, F') = \inf\{dist(P, P');\ P \in F, P' \in F'\}.$$

Siano $\vec{r}$ ed $\vec{r'}$ vettori rispettivamente paralleli alle rette considerate. Esistono e sono univocamente determinati un punto $R \in r$ ed un punto $R' \in r'$, tali che $\vec{RR'} \perp \vec{r}, \vec{r'}$, e la minima distanza tra le rette r, r' é esattamente $\|\vec{RR'}\|$.

In generale, la distanza tra rette, tra rette e piani, e tra piani, è sempre riconducibile alla distanza tra punti.

Angoli tra rette e piani. Siano ora r ed r' due rette orientate e $\vec{r}$, $\vec{r'}$ due vettori concordemente orientati con r ed r'. Allora

$$\cos\widehat{rr'} = \cos\widehat{\vec{r}\vec{r'}} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}.$$

Se, invece, le due rette non sono orientate, l'angolo $\widehat{rr'}$ può assumere due valori tra loro supplementari:

$$\cos\widehat{rr'} = \pm\frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} = \pm\frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}.$$

Così, indicate con n ed n' le rette normali rispetto ad α ed α', si ha

$$\cos\widehat{\alpha\alpha'} = \cos\widehat{\vec{n}\vec{n'}} = \frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{\|\vec{n}\|\,\|\vec{n'}\|} = \pm\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

$$\sin\widehat{\alpha r} = |\cos\widehat{\vec{n}\vec{r}}| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{r}|}{\|\vec{n}\|\,\|\vec{r}\|} = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Esempi ed esercizi.

- Sono sghembe le due rette seguenti

$$r\colon \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \qquad r'\colon \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

  Infatti r ed r' non sono parallele e $r \cap r' = \emptyset$. La loro minima distanza é $d(r, r') = d(R, R') = 2\sqrt{14}/7$.

Fasci di piani.

Siano α ed α' due piani. Se $\alpha \cap \alpha' = r$, si chiama *fascio di piani proprio* di asse r la totalità dei piani dello spazio passanti per r, che si dice *asse* del fascio proprio. Se $\alpha \parallel \alpha'$, la totalità dei piani dello spazio paralleli ad α (o ad α') costituisce il *fascio di piani improprio* individuato dalla giacitura di α (e di α').

Se $\alpha\colon ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha'\colon a'x + b'y + c'z + d' = 0$ il fascio è rappresentato da

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

al variare dei parametri omogenei λ e μ, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Se $\lambda \neq 0$, ponendo $k = \mu/\lambda$, il fascio è rappresentato dall'equazione

$$ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

che esplicita il fatto che i piani di un fascio sono ∞^1.

Si osservi che nell'equazione precedente, al variare di k in $\mathbb{R}$, il piano α' non è rappresentato; esso però si può pensare ottenuto per $k = \pm\infty$. Ciò porta ad ampliare $\mathbb{R}$ in modo spontaneo, aggiungendo un solo punto improprio (mentre in Analisi l'ampliamento è fatto con i due punti impropri $\pm\infty$):

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Esempi ed esercizi.

- Trovare il piano passante per $A(0, 2, -1)$ e per la retta

$$r\colon \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

  Poiché $A \notin r$, il piano è univocamente individuato. Si considera il fascio di piani di asse r e si impone il passaggio per A del generico piano.

  Il piano generico $x + 2y + z + k(x - z) = 0$ passa per A se $k = -3$, quindi il piano cercato è $x - y - 2z = 0$.

- Si risolva l'esercizio precedente considerando il piano passante per A e per due punti scelti di r.

- Scrivere il fascio di rette del piano $\alpha\colon 3x - y + 5z + 1 = 0$ di centro $P_0(0, 1, 0) \in \alpha$.

  Sia r una retta per P_0 non contenuta in α; ad esempio:

$$r\colon \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

  L'equazione $x + kz = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, rappresenta il fascio di piani di asse r e

$$\begin{cases} x + kz = 0 \\ 3x - y + 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

  rappresenta il fascio di rette richiesto.

Distanze.

Geometricamente, la distanza di un punto P da un piano π, è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su π. Per determinare H, si trova la retta per P e perpendicolare a π e la si interseca con π.

In termini analitici, se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0 = 0$, allora

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dati due punti distinti $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, il *piano assiale del segmento AB* è il luogo dei punti dello spazio, equidistanti da A e B. La sua equazione (necessariamente di I grado) è

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$$

La distanza di un punto P da una retta r dello spazio, è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su r. Per determinare H, si trova il piano per P e perpendicolare a r, e lo si interseca con π. **N.B.:** NON esiste una formula analitica per la distanza punto-retta nello spazio.

Distanza di due rette parallele r, r': è la distanza tra r ed un qualsiasi punto di r'.

Distanza di due piani paralleli π, π': è la distanza tra π ed un qualsiasi punto di π'.

Distanza tra una retta r ed un piano π parallelo ad r: è la distanza tra π ed un qualsiasi punto di r.

5.4 Sfere e circonferenze

Chiamiamo *sfera* l'insieme dei punti P dello spazio tali che $\|\vec{CP}\| = R$, dove C è un punto fisso e R un numero reale positivo. Se $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e $P(x, y, z)$, da $\|\vec{CP}\| = R$ si ha

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2,$$

che dà l'equazione cartesiana di una sfera generica. Equivalentemente:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0,$$

dove $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$. Viceversa, ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

rappresenta una sfera Σ di centro (α, β, γ), dove $\alpha = -a$, $\beta = -b$, $\gamma = -c$, e di raggio $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 && \text{sfera ordinaria,}\\
&a^2 + b^2 + c^2 - d = 0 && \text{sfera di raggio nullo,}\\
&a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 && \text{sfera immaginaria.}
\end{aligned}$$

Se π è un piano, $\Sigma \cap \pi$ è una circonferenza.

Esempio:
Scrivere l'equazione della sfera che ha come punti diametralmente opposti $A(3, 0, 0)$ e $B(1, 1, 1)$. Discutere nel campo complesso l'intersezione della sfera con il piano coordinato yz.

5.5 Esercizi di riepilogo

1. Determinare le equazioni delle bisettrici delle rette

$$r : x - 1 = y - z = 0\,, \qquad s : y = 1 = z\,.$$

   Suggerimento: si ricordi che se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ sono i *versori* associati alle rette, allora $\vec{r} + \vec{s}$ e $\vec{r} - \vec{s}$ danno le direzioni delle bisettrici.

2. Si consideri il piano α contenente il triangolo T di vertici

$$A(1, 0, 0), \quad B(0, \sqrt{2}, 1), \quad C(-1, 1/\sqrt{2}, 1)\,.$$

   (a) Determinare l'angolo ϕ $(0 \le \phi \le \pi/2)$ tra il piano α e il piano coordinato xy.
   (b) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A e B.
   (c) Trovare i parametri direttori di r e quelli di giacitura di α.
   (d) Determinare il piano ortogonale ad $\vec{AB}$ e passante per il punto medio H di AB.