

CORSO DI GEOMETRIA

Giovanni Calvaruso

PROGRAMMA DEL CORSO:

- 1) Matrici, determinanti e sistemi lineari.**
- 2) Vettori geometrici.**
- 3) Geometria analitica del piano.**
- 4) Geometria analitica dello spazio.**

TESTI ED APPROFONDIMENTI:

G. CALVARUSO, Appunti di Geometria (disp. online).

G. CALVARUSO E R. VITOLO, Esercizi di Geometria ed Algebra Lineare (disp. online).

MATRICI

Definizioni

Si chiama *matrice reale di tipo $m \times n$* una tabella di $m \cdot n$ numeri reali, disposti in modo da formare m righe ed n colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

L'elemento generico di A , cioè l'elemento che si trova sull' i -esima riga e j -esima colonna, si indica con a_{ij} . In breve si scrive

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Se $m \neq n$ la matrice A si dice *rettangolare*

se $m = n$ A si chiama *quadrata*

Se $m = 1$ la matrice A si dice *matrice riga*

se $n = 1$ la matrice A si chiama *matrice colonna*.

Indichiamo con $\mathbb{R}^{m,n}$ l'insieme di tutte le matrici reali ad m righe ed n colonne a coefficienti in \mathbb{R} .

Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, allora

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j.$$

Si chiama *trasposta* di $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ la matrice $A^T \in \mathbb{R}^{n,m}$ ottenuta da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne:

$$A = (a_{ij}) \quad \Rightarrow \quad A^T = (a_{ji}).$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & \pi \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Casi particolari di matrici quadrate sono:

A *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ (ossia, $A = A^T$)

A *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ ($A = -A^T$)

A *diagonale* se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$

A *unita' o identica* se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$; $a_{ii} = 1$.

Operazioni su matrici

Somma di due matrici. Due matrici A e B sono sommabili se entrambe appartengono a $\mathbb{R}^{m,n}$. La matrice *somma* $C = A + B$ è per definizione $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ con

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

La matrice O avente tutti gli elementi 0 è la matrice *nulla*, e soddisfa

$$A + O = A \quad \forall A,$$

e l'*opposta* di A è la matrice $A' = -A$, dove $a'_{ij} = -a_{ij} \forall i, j$.

Prodotto di uno scalare per una matrice. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, la matrice λA , *moltiplicazione di A per lo scalare λ* , è la matrice

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \quad \forall i, j$$

Esercizio: Dimostrare che $(A + B)^T = A^T + B^T$.

PROPRIETA':

- 1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa),
- 2) $A + B = B + A$ (commutativa),
- 3) $A + O = A = O + A$ (elemento neutro),
- 4) $A + (-A) = O = (-A) + A$ (inverso rispetto alla somma),
- 5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (distributiva),
- 6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (distributiva),
- 7) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ (associativa),
- 8) $1A = A$ (elemento neutro)

Esercizio: Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0,$$

calcolare $2A - 3B$.

Prodotto righe per colonne. La matrice A è moltiplicabile (*righe per colonne*) per la matrice B se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,p}$. La matrice *prodotto* di A e B è la matrice $C = AB \in \mathbb{R}^{m,p}$, con $C = (c_{ij})$ dove

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

è il prodotto della riga i -esima di A per la colonna j -esima di B .

Importante!: In generale, non ha senso anche la moltiplicazione BA . Tuttavia, *anche se entrambe hanno senso e sono dello stesso tipo*, può comunque accadere che

$$AB \neq BA.$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e$$
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA.$$

Si osservi che (come nell'esempio) *si può avere* $AB = O$ *senza che* A *o* B *siano matrici nulle.*

Proprietá:

- 1) $A(BC) = (AB)C$,
- 2) $A(B + C) = AB + AC$,
- 3) $A(\lambda B) = \lambda(AB) = (\lambda A)B$,
- 4) $AO = O'$,
- 5) $AI_n = A = I_m A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$,

Esempi ed esercizi.

- Se $A = (1, 0, 3)$, verificare che

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \cdot A^T = (10), \quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Provare che $(AB)^T = B^T A^T$.
- Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, provare che AA^T e $A^T A$ sono simmetriche.
- Si osservi che se A e B sono simmetriche, in generale AB non è simmetrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se A è una matrice quadrata, allora

$$A^2 = AA, \dots, A^h = A^{h-1}A.$$

Se $AB = BA$, allora $(AB)^k = A^k B^k$. Questo non è vero, in generale, se $AB \neq BA$.

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è detta *ortogonale* se

$$A^T A = I = A A^T.$$

Esercizi.

- Trovare tutte le potenze della matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Provare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

è ortogonale.

- Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vedere se

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è detta *invertibile* se esiste una matrice $A' \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che

$$AA' = I = A'A.$$

Si scrive in tal caso $A' = A^{-1}$.

Si noti che se A è ortogonale, allora $A^{-1} = A^T$. Vedremo in seguito un criterio che ci permette di decidere quando una matrice è invertibile.

Esercizio: Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

stabilire se sono invertibili e in tal caso trovare l'inversa.

Nota. Le matrici sono molto utili in Matematica: permettono di semplificare complicate espressioni considerando tutta la tabella come un unico ente. Le matrici intervengono nella schematizzazione di molti fenomeni, dipendenti da un numero finito di parametri.

Come vedremo più avanti, se vogliamo risolvere un sistema di equazioni lineari, una matrice ci dà tutte le informazioni necessarie per risolverlo.

Determinante di una matrice

Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, chiamiamo determinante di A il numero

$$\det A = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le $n!$ permutazioni dei numeri $1, 2, \dots, n$.

In termini piú semplici, *il determinante* di una matrice reale **quadrata** è un numero, che si associa alla matrice stessa, e ne evidenzia alcune importanti proprietà.

Si può descrivere come calcolare tale numero *in maniera ricorsiva*, ossia, per matrici quadrate via via piú grandi:

Se $n = 1$, allora $\det A = a_{11}$.

Se $n = 2$, allora

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

se $n = 3$, allora

$$\begin{aligned} \det A = & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ & - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ & + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

Illustriamo la *Regola di Laplace* per il calcolo del determinante:

Fissato un elemento a_{ij} di A , si chiama *minore complementare* di a_{ij} la sottomatrice di A di ordine $n - 1$, ottenuta cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna. Si chiama *complemento algebrico* di a_{ij} o *cofattore* di a_{ij} , il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\text{minore complementare di } a_{ij}).$$

Teorema: Sia A una matrice quadrata di ordine n . Allora

$$\det A = a_{r1}A_{r1} + \cdots + a_{rn}A_{rn},$$

dove r è una fissata riga (scelta arbitrariamente), oppure

$$\det A = a_{1c}A_{1c} + \cdots + a_{nc}A_{nc},$$

dove c è una fissata colonna (scelta arbitrariamente).

Questa regola può essere assunta anche come definizione ricorsiva di determinante:

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1 \\ \sum_i a_{ij}A_{ij} = \sum_j a_{ij}A_{ij} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Quindi \det è un'applicazione da $\mathbb{R}^{n,n}$ in \mathbb{R} .

Dal teorema di Laplace segue immediatamente che

1. $\det A = \det A^T$;
2. se la matrice B si ottiene da A moltiplicando una linea di A per un numero reale k e lasciando invariate le altre linee, allora $\det B = k \det A$.

Esempi ed esercizi.

- Se $I \in \mathbb{R}^{n,n}$, allora $\det I = 1$, $\det(-I) = (-1)^n$.
- Provare che $\forall k \in \mathbb{R}$ si ha $\det(kA) = k^n \det A$.
- Si calcoli $\det A$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (\det A = -5).$$

- Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si calcoli $\det A$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & -k & k+2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proprietá:

1. se le matrici A e B differiscono soltanto per lo scambio di due linee parallele, allora $\det B = -\det A$;
2. se A ha due linee uguali, allora $\det A = 0$;
3. se A ha due linee proporzionali, $\det A = 0$;
4. se B si ottiene da A aggiungendo ad una certa linea di A un'altra linea di A moltiplicata per un fattore di proporzionalitá, allora $\det B = \det A$;
5. la somma degli elementi di una linea per i complementi algebrici di un'altra linea è zero.

Teorema di Binet: Se A e B sono due matrici quadrate di ordine n , si ha

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Quindi, in generale, $AB \neq BA$, tuttavia $\det(AB) = \det(BA)$.

Matrici invertibili

Proposizione: Se A è invertibile, allora

1. $\det A \neq 0$;
2. $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Se $\det A \neq 0$, allora A è invertibile, e si prova che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj}(A),$$

dove $\text{Adj}(A)$, detta *aggiunta classica di A* , è la matrice che ha al posto (i, j) il cofattore A_{ji} di a_{ij} .

Esempi ed esercizi.

1) Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Si ha $\det A = -8 \neq 0$,

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -1/2 \\ -12 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e $A^{-1} = -\frac{1}{8}\text{Adj}(A)$)

Combinazioni lineari

Date $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $X = (x_j) \in \mathbb{R}^{n,1}$ e
 $Y = (y_i) \in \mathbb{R}^{m,1}$,

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases}$$

cioè,

$$Y = AX \Leftrightarrow Y = x_1C_1 + \cdots + x_nC_n,$$

dove C_1, \dots, C_n sono le colonne di A . Si dice in tal caso che Y è *combinazione lineare* delle colonne di A , con coefficienti x_1, \dots, x_n .

Analogamente, date $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $X' = (x'_j) \in \mathbb{R}^{1,m}$ e
 $Y' = (y'_i) \in \mathbb{R}^{1,n}$,

$$Y' = X'A \Leftrightarrow Y' = x'_1R_1 + \cdots + x'_nR_m,$$

dove R_1, \dots, R_n sono le righe di A . Si dice in tal caso che Y' è *combinazione lineare* delle righe di A , con coefficienti x'_1, \dots, x'_n .

Rango di una matrice

Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Da A possiamo estrarre sottomatrici quadrate di ordine r , $1 \leq r \leq \min(m, n)$. Di queste sottomatrici quadrate, dette *minori*, si può fare il determinante e vedere se non è nullo.

Definizione: Il *rango* $rg(A)$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è dato dal massimo ordine dei suoi minori con determinante non nullo.

Teorema: $rg(A) = p \Leftrightarrow p$ è il massimo numero di righe o colonne di A linearmente indipendenti, cioè, nessuna di esse si può ottenere come combinazione lineare delle restanti (righe o colonne).

$rg(A) = p > 0$ vuol dire

1. esiste almeno un minore di ordine p con determinante diverso da 0;
2. tutti gli eventuali minori di ordine $p+1$ hanno determinante nullo.

Naturalmente, $rg(A) = 0$ vuol dire che la matrice è nulla.

Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (quadrata), allora

$$rg(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ invertibile}$$

Esempi ed esercizi.

1) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, poiché $\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$, e tutti i minori di ordine 3 hanno determinante nullo.

2) Determinare il rango delle seguenti matrici, al variare di λ ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \lambda \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 4 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si vede che $rg(A) = 2 \forall \lambda$; $rg(B) = 3$ per $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -2$, mentre $rg(B) = 2$ per $\lambda = -2$ e $rg(B) = 1$ per $\lambda = 1$.

3) Calcolare il rango della seguente matrice B al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det B = 0$, si ha che $rg(B) \leq 3$. Inoltre,

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 3 \forall \lambda$$

Sistemi lineari

Un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite x_1, \dots, x_n è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

I numeri reali a_{ij} sono detti *coefficienti* e $b_i \in \mathbb{R}$ *termini noti*. Se $b_i = 0 \forall i$ il sistema si dice *omogeneo*.

In forma matriciale:

$$AX = B,$$

dove $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ è la matrice dei coefficienti, X è la colonna delle incognite e B quella dei termini noti, cioè

$$X^T = (x_1, \dots, x_n), \quad B^T = (b_1, \dots, b_n).$$

I problemi fondamentali che si presentano sono:

1. esistenza delle soluzioni o compatibilità del sistema (aspetto **qualitativo**);
2. determinazione del numero delle soluzioni (aspetto **quantitativo**);
3. calcolo esplicito di tutte le eventuali soluzioni (aspetto **computazionale**).

Una **soluzione** del sistema è una n -pla $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ che soddisfi simultaneamente tutte le sue equazioni.

Problema 1 (qualitativo). Esso è risolto completamente dal *Teorema di Rouché'-Capelli*:

il sistema è compatibile $\Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A})$,

dove $\tilde{A} = (A, B)$ è la *matrice completa* del sistema.

Esempio. Il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è chiaramente incompatibile. Infatti $1 = rg(A) \neq rg(\tilde{A}) = 2$.

Problema 2 (quantitativo). Se $rg(A) = rg(\tilde{A}) = p$. Si hanno i seguenti casi:

$$\begin{array}{ll} p = n & \text{una sola soluzione,} \\ p < n & \infty^{n-p} \text{ soluzioni,} \end{array}$$

Con ' ∞^{n-p} soluzioni' si intende infinite soluzioni dipendenti da $n - p$ parametri.

Ne segue che se $p = m < n$ (*sistema normale*) il sistema è sempre compatibile.

N. B. La risoluzione di un sistema compatibile di rango p si riconduce sempre a quella di un sistema di p equazioni in p incognite (con matrice dei coefficienti non singolare): basta considerare come parametri le $n - p$ incognite, i cui coefficienti non concorrano a formare il minore di rango p .

Problema 3 (computazionale). Si tratta dunque di risolvere un sistema con $n = m$ e $\det A \neq 0$ (**sistema di Cramer**):

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Il Teorema di Cramer ci dà l'espressione esplicita delle soluzioni:

$$x_k = \frac{\det(A^{(k)})}{\det(A)},$$

dove $A^{(k)}$ è la matrice ottenuta da A sostituendo alla k -esima colonna di A la colonna dei termini noti.

Nota: sistemi omogenei. I sistemi *omogenei*, ossia sistemi del tipo

$$(*) \quad AX = O,$$

ammettono *sempre* la soluzione nulla $X = O$. Siamo perciò interessati alle soluzioni non nulle, dette anche *autosoluzioni* o *soluzioni proprie*.

Se X' è una soluzione di (*), allora $\lambda X'$ è una soluzione $\forall \lambda$; se X' e X'' sono soluzioni di (*), allora anche $X' + X''$ è una soluzione. Chiaramente $rg(A) = rg(\tilde{A})$, e se $p = rg(A)$ allora le soluzioni sono ∞^{n-p} .

Ad ogni sistema lineare non omogeneo $AX = B$ si può associare il sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

Si osservi che se X_0 è una soluzione particolare di $AX = B$ e \tilde{X} la soluzione generica di $AX = 0$, allora $\tilde{X} + X_0$ è la soluzione generica di $AX = B$; infatti

$$A(\tilde{X} + X_0) = A\tilde{X} + AX_0 = O + B = B.$$

Esempi.

1) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \left(A \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right. \right).$$

Poiché $\det(A) = -4 \neq 0$, il sistema è di Cramer, e quindi ammette un'unica soluzione.

Applicando il metodo risolutivo dei sistemi di tipo Cramer:

$$x = \frac{|A^1|}{|A|} = 0, \quad y = \frac{|A^2|}{|A|} = 1, \quad z = \frac{|A^3|}{|A|} = 0,$$

per cui, $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ è l'unica soluzione del sistema.

2) Risolviamo il sistema

$$(*) \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y - z = 0 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \left(A \mid \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 6 \end{array} \right).$$

Poiché $p = rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2$ il sistema è compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni ($n - p = 3 - 2 = 1$). Esso corrisponde al sistema di tipo Cramer

$$\begin{cases} 2y = z \\ 2x = 6 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t + 3 \\ (y = t) \\ z = 2t \end{cases}$$

Il II sistema (di Cramer) ha l'unica soluzione $(x, z) = (-3t + 3, 2t)$ (dipendente dal param. t). Quindi, il sistema dato ha per soluzioni $(x, y, z) = (-3t + 3, t, 2t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Altro metodo: Il sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione generale

$(x, y, z) = (h, -1/3h, -1/3h)$. Una soluzione particolare di (*), ottenuta ad esempio ponendo $z = 0$, è $(3, 0, 0)$. Quindi, *tutte* le soluzioni di (*) sono date da

$$(x, y, z) = (h + 3, -1/3h, -1/3h), \quad h \in \mathbb{R}.$$

Ponendo $t = -1/3h$, ci si rende conto immediatamente che gli insiemi

$$\{(-3t + 3, t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \\ \left\{ \left(h + 3, -\frac{1}{3}h, -\frac{2}{3}h \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

coincidono.

3) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \left(A \mid \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix} \right).$$

Poiché $p = \text{rg}(A) = 1 \neq 2 = \text{rg}(\tilde{A})$, il sistema NON è compatibile.

Esempi ed Esercizi.

1) Verificare che la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

è ortogonale, per ogni valore reale di θ . Ripetere per

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

2) Trovare A^{-1} e B^{-1} , dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Trovare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, il rango delle seguenti matrici A e B . Determinare in particolare i valori reali di k per cui le matrici A e B sono invertibili:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - k & 2 \\ 3 & 1 + k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 - k & 3 & -1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & -k & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Discutere il seguente sistema, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, e risolverlo nei casi in cui è compatibile.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ 2x - \lambda z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizi di riepilogo

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0,$$

calcolare $2A - 3B$, A^2 , B^T , AB , BA .

2) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolarne tutti i possibili prodotti a due a due.

3) Risolvere il sistema lineare $AX = B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4) Dire se le seguenti matrici sono invertibili. In caso affermativo, trovarne l'inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -\mu \\ \mu - 1 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

6) Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\mu \\ 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

7) Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 0, \\ x - 2z - t = -1. \end{cases}$$

8) Verificare che i seguenti sistemi lineari sono equivalenti (hanno le stesse soluzioni):

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + y - 4z = 5, \\ x + 3y - 7z = 0, \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x - z = 3, \\ y - 2z = -1. \end{cases}$$

9) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare e risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + kz = k, \\ 2y + z = 0, \\ kx + z = k. \end{cases}$$

Vettori dello spazio ordinario

Lo spazio V_3

Sia S_3 lo spazio della geometria euclidea. Ogni segmento di estremi A e B individua due segmenti orientati AB e BA aventi orientazioni opposte; ciò è espresso scrivendo che

$$AB = -BA.$$

Nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio introduciamo la seguente relazione di equivalenza, detta di *equipollenza*

$$AB \sim CD \Leftrightarrow \begin{array}{l} (1) AB \text{ è parallelo a } CD, \\ (2) \|AB\| = \|CD\|, \\ (3) AB, CD \text{ sono equiversi.} \end{array}$$

Le classi di equivalenza si chiamano *vettori*. Il vettore \vec{u} individuato da \vec{AB} , è anche individuato da un qualsiasi altro segmento ad esso equipollente (come \vec{CD}). Il rappresentante \vec{AB} di un vettore \vec{u} si dice *vettore \vec{u} applicato in A* e si indica (\vec{u}, A) . Si usa anche la notazione $\vec{u} = B - A$.

I segmenti AA , BB , \dots , individuano il vettore nullo $\vec{0}$.

Un vettore non nullo è individuato dalla direzione, dal verso e dal modulo. \mathbf{V}_3 denota l'insieme dei vettori liberi dello spazio e con \mathbf{S}_3 i punti dello spazio. Fissato un punto $O \in \mathbf{S}_3$, ad ogni punto $P \in \mathbf{S}_3$ si può associare un unico vettore $\vec{u} \in \mathbf{V}_3$, ponendo $\vec{u} = \vec{OP}$, e viceversa.

Somma di vettori. Siano \vec{u} e \vec{v} due vettori, che vogliamo sommare. Se si considerano i rappresentanti indicati $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - B$, poniamo

$$\vec{u} + \vec{v} = C - A$$

(che non dipende dai rappresentanti scelti).

Proprietá:

- 1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (associativa)
- 2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativa)
- 3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (elemento neutro)
- 4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (inverso rispetto alla somma)

Si osservi che se consideriamo rappresentanti opportuni $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AD}$, allora $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$ è la diagonale del parallelogramma di lati AB e AD , in accordo con quanto si studia in Fisica.

Differenza di vettori: Per definizione, poniamo $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Se $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - A$, allora $\vec{u} - \vec{v} = B - C$.

Prodotto di un numero reale per un vettore

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbf{V}_3$. Vogliamo definire $\lambda\vec{u}$.

1. Se $\lambda = 0$, oppure $\vec{u} = \vec{0}$, poniamo $\lambda\vec{u} = \vec{0}$.
2. Se $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, il vettore $\lambda\vec{u}$ ha direzione coincidente con \vec{u} , verso concorde con quello di \vec{u} se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$, e inoltre

$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|.$$

Il numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è detto *scalare*.

Proprietà:

- 1) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$,
- 2) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$,
- 3) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$,
- 4) $1\vec{u} = \vec{u}$.

Dipendenza lineare

I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente dipendenti* se e solo se esiste una n -pla $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tale che

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}.$$

Se ad esempio $\lambda_n \neq 0$, allora

$$\vec{v}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \vec{v}_1 - \dots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \vec{v}_{n-1},$$

cioè, \vec{v}_n 'dipende' da $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$. Più precisamente, \vec{v}_n è combinazione lineare di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$. In generale, un vettore \vec{v} è *combinazione lineare* di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ con coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ se

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Indipendenza lineare: I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente indipendenti* se e solo se *non* sono linearmente dipendenti, cioè

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Chiaramente **vale sempre** (sia per vettori indipendenti che dipendenti)

$$\lambda_i = 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}.$$

Significato geometrico: Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbf{V}_3$.
Allora

$$\vec{v}_1 \text{ dipendente} \Leftrightarrow \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ dipendenti} \Leftrightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ paralleli}$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ dipendenti} \Leftrightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ complanari.}$$

$n \geq 4$ **vettori di \mathbf{V}_3 sono sempre dipendenti.**
Quindi, *in \mathbf{V}_3 il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 3.*

Sia \mathbf{V}_2 l'insieme dei vettori del piano; in \mathbf{V}_2 il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 2.

Sia \mathbf{V}_1 l'insieme dei vettori della retta; in \mathbf{V}_1 il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 1.

Si dice anche che la **dimensione** della retta è 1 ed una sua base è data da un vettore non nullo $\{\vec{v}_1\}$; la dimensione del piano è 2 ed una sua base è data da 2 vettori indipendenti $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$; la dimensione dello spazio è 3 ed una sua base è data da 3 vettori indipendenti $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base di V_3 . Allora, per ogni \vec{v} , $\{\vec{v}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sono dipendenti, e

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3.$$

La terna di numeri $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ è univocamente individuata, e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono dette le *coordinate* di \vec{v} nella base \mathcal{B} . Naturalmente, nella base \mathcal{B}

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 & \text{ ha coordinate } (1, 0, 0), \\ \vec{e}_2 & \text{ ha coordinate } (0, 1, 0), \\ \vec{e}_3 & \text{ ha coordinate } (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Vediamo ora come condizioni vettoriali si traducano in problemi scalari tramite le coordinate. Siano

$$\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \quad \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \quad \vec{w}(w_1, w_2, w_3).$$

Allora:

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} au_1 + bv_1 + cw_1 = 0 \\ au_2 + bv_2 + cw_2 = 0 \\ au_3 + bv_3 + cw_3 = 0. \end{cases}$$

Si consideri

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Se $rg(A) = p$, allora p è il massimo numero di vettori indipendenti in $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Naturalmente, $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$,
e $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

Se consideriamo il riferimento cartesiano affine $\mathcal{R}(Oxyz)$ associato a \mathcal{B} tale che $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ siano i vettori unità sugli assi si ha, con l'usuale simbolismo,

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{i}, & \vec{e}_2 &= \vec{j}, & \vec{e}_3 &= \vec{k}, \\ u_1 &= u_x, & u_2 &= u_y, & u_3 &= u_z.\end{aligned}$$

Se $P_i(x_i, y_i, z_i)$ per $i = 1, 2$, allora

$$\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Esercizi.

1) Dati i vettori $\vec{v}(1, 2, 3)$, $\vec{w}(1, 1, 1)$ e $\vec{v}_1(1, -1, 0)$,
 $\vec{v}_2(0, 1, 1)$, $\vec{v}_3(2, 2, 4)$.

a) Si possono scrivere \vec{v} e \vec{w} come combinazione lineare di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$? Se sì, trovare i coefficienti della combinazione lineare.

b) \vec{v}_2 è combinazione lineare di $\vec{w}, \vec{v}_1, \vec{v}_3$?

2) Si consideri V_2 ed una sua base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, i vettori

$$\vec{v}_1 = (1 - t)\vec{e}_1 + t\vec{e}_2, \quad \vec{v}_2 = t\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

costituiscono una base di V_2 ?

3) Siano dati i seguenti vettori di V_3 riferiti alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (2 - h, 4 - 2h, 2 - h), \\ \vec{v}_2 &= (h, 3h, 2h), \\ \vec{v}_3 &= (1 - h, 1 - 2h, h).\end{aligned}$$

1. determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\vec{w}(1 - 2h, 1 - h, -5h)$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.
2. Esaminare il caso $h = 0$.

Orientazione.

In generale, *orientare* uno spazio significa *fissare* una base ordinata di suoi vettori, e assumerla come positiva.

Una retta r si dice *orientata* se é assegnato un vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$, parallelo ad r . Tale vettore determina un verso di percorrenza su r , che **si sceglie** come positivo.

Un piano π si dice *orientato* se é assegnata una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *ordinata* di vettori paralleli a π . Tale base determina un verso di rotazione su π , quello della minima rotazione che porta \vec{e}_1 su \vec{e}_2 , che **si sceglie** come positivo. Per convenzione, si sceglie il verso *antiorario* come positivo.

Lo spazio S_3 é *orientato* se é assegnata una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *ordinata* di vettori paralleli a π . Tale base determina una orientazione, che **si sceglie** come positiva, legata al fatto che un osservatore, posto nel semispazio determinato dal piano di \vec{e}_1 e \vec{e}_2 in cui c'è \vec{e}_3 , vede la minima rotazione che porta \vec{e}_1 su \vec{e}_2 in senso *antiorario*.

Prodotto scalare

Il *prodotto scalare* tra due vettori è l'applicazione

$$g: \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ o } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Proprietà:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, commutatività
2. $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, omogeneità
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, distributività.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base ortonormale di \mathbf{V}_3 (cioè, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono unitari e mutuamente ortogonali); allora:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1, & \vec{j} \cdot \vec{j} &= 1, & \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= 0, & \vec{j} \cdot \vec{k} &= 0, & \vec{i} \cdot \vec{k} &= 0. \end{aligned}$$

Se $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, allora si ha

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Si osservi che se \mathcal{B} non fosse ortonormale, l'espressione del prodotto scalare non sarebbe così semplice. Si vede facilmente che

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Dunque, *conoscendo il prodotto scalare*, si può determinare la lunghezza di un vettore e l'angolo tra due vettori.

La *componente ortogonale* di \vec{v} rispetto ad un vettore non nullo \vec{u} è il numero reale

$$v_{\vec{u}} = \|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \vec{v} \cdot \hat{u} \in \mathbb{R}.$$

La *proiezione ortogonale* di \vec{v} su \vec{u} è il vettore

$$\vec{v}_{\vec{u}} = v_{\vec{u}} \hat{u}.$$

Prodotto vettoriale

Il *prodotto vettoriale* tra vettori è l'applicazione

$$\wedge: \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \rightarrow \mathbf{V}_3, \quad \wedge(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \text{se } \vec{u} \parallel \vec{v} \\ \vec{w} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove \vec{w} ha:

- (i) modulo $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \widehat{\vec{u}\vec{v}}$,
- (ii) direzione perpendicolare a \vec{u} e \vec{v} ,
- (iii) verso tale che la terna $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sia equiversa a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Proprietà:

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$, anticommutatività,
2. $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, omog.
3. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, distributività.

Se $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ è una base ortonormale, allora

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Prodotto misto

Il *prodotto misto* di 3 vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_3$ è dato dal numero reale $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$. Considerata una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, si ha la seguente espressione analitica:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Significato geometrico dei prodotti vettoriale e misto:

- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \mathcal{A}$, area del parallelogramma costruito sui vettori \vec{u} e \vec{v} .
- $|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \mathcal{V}$, volume del parallelepipedo costruito sui vettori \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .

Esercizi di riepilogo

1) (Rispetto ad una fissata base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$,) si considerino i vettori $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{w} = 3\vec{j} + \vec{k}$. Provare che $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ formano una base, e trovare le componenti di $\vec{x} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ rispetto a tale base.

2) Dati i vettori $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = -3\vec{j}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, calcolare $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$, l'area del triangolo di lati \vec{u} e \vec{v} , il volume del parallelepipedo di lati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

3) trovare la proiezione ortogonale del vettore $\vec{v} = (0, -3, 0)$ sul vettore $\vec{u} = (1, -2, 3)$.

4) Dati i vettori $\vec{a} = (1, -2, 0)$ e $\vec{b} = (3, -1, -1)$,

1. Verificare che i vettori

$$\vec{u}_1 = (2, 1, 0), \quad \vec{u}_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -2 \right),$$

sono perpendicolari ad \vec{a} .

2. Si trovino i vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 perpendicolari a \vec{b} le cui componenti ortogonali ad \vec{a} siano rispettivamente \vec{u}_1 e \vec{u}_2 .

5) Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, i vettori $\vec{u} = (h, h-1, 2)$ e $\vec{v} = (5, h, 0)$ sono perpendicolari, e per quali valori sono paralleli.

6) Dati i vettori $\vec{v}_1 = (0, -1, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 2)$, trovare la giacitura \vec{a} individuata da \vec{v}_1 e \vec{v}_2 (cioè un vettore perpendicolare al piano individuato da \vec{v}_1 e \vec{v}_2).

7) Si considerino i seguenti vettori

$$\vec{u} = \lambda \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{v} = \vec{i} - \lambda \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{w} = -2\vec{i} + \mu \vec{k},$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. Trovare per quali valori di λ, μ esistono vettori \vec{x} tali che

$$\vec{u} \wedge \vec{x} + \vec{x} \wedge \vec{v} = \vec{w}.$$

2. Determinare, quando possibile, le componenti di \vec{x} per $\lambda = 1$.

8) Trovare i vettori di modulo 3, perpendicolari ai vettori $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

Geometria analitica del piano.

Coordinate cartesiane nel piano.

Un **riferimento ortonormale cartesiano** del piano è individuato da una base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ dei vettori del piano, e da un punto O scelto come origine del riferimento. Il riferimento si indica con $RC(O, x, y)$.

Sia P un punto del piano.

$$P(x, y) \Leftrightarrow \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Fissare un riferimento $RC(O, x, y)$ permette quindi di stabilire *corrispondenze biunivoche* tra i punti del piano, i vettori del piano e le coppie di \mathbb{R}^2 .

Assi coordinati:

asse x: retta per O e parallela a \vec{i} . Ha equazione $y = 0$.

asse y: retta per O e parallela a \vec{j} . Ha equazione $x = 0$.

Dati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ del piano,

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

è il vettore posizione di P_2 rispetto a P_1 . La *distanza* tra P_1 e P_2 è quindi data da:

$$d(P_1, P_2) = \|\vec{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Il *punto medio* del segmento $\overline{P_1P_2}$ è il punto M di coordinate

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Retta del piano.

Due punti P_1, P_2 non coincidenti individuano una retta r del piano:

$$P \in r \Leftrightarrow P_1\vec{P} \parallel P_1\vec{P}_2.$$

Posto $P_i(x_i, y_i), P(x, y)$, il parallelismo si può esprimere in due modi:

a) *Equazione cartesiana di una retta del piano:*

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante, si ha l'*equazione cartesiana della retta*:

$$r : ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

(a, b) rappresenta un vettore (non nullo) perpendicolare alla retta r . Di conseguenza, $(b, -a)$ rappresenta un vettore parallelo a r .

b) *Equazioni parametriche di una retta del piano:*

$$P_1\vec{P} \parallel P_1\vec{P}_2 \Leftrightarrow P_1\vec{P} = t P_1\vec{P}_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) = x_1 + lt \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) = y_1 + mt \end{cases}$$

che sono dette *equazioni parametriche della retta*.

(l, m) sono le coordinate di un vettore parallelo ad r , e si dicono *parametri direttori* della retta.

Eliminando t si perviene all'*equazione cartesiana*.

Esempio. Troviamo le equazioni parametriche e cartesiana della retta passante per $P_1(1,0)$ e $P_2(1,1)$. Si ha $\vec{P_1P_2} = (0,1)$, dunque

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$$

da cui l'equazione cartesiana $x = 1$.

Mutue posizioni di due rette.

Siano r ed s due rette del piano. Per studiarne la mutua posizione, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Risulta:

sist. incompatibile $\Leftrightarrow rg(A) \neq rg(\tilde{A}) \Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset$,

sist. compatibile $\Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A}) \Leftrightarrow r \cap r' \neq \emptyset$.

Inoltre:

$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow 1$ soluzione $\Leftrightarrow r \cap r' = \{P_0\}$,

$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \infty^1$ soluzioni $\Leftrightarrow r \equiv r'$.

Ponendo

$$r \parallel r' \Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset \quad \text{oppure} \quad r \equiv r'$$

possiamo dire che

$$r \parallel r' \Leftrightarrow (b, -a) \sim (b', -a') \Leftrightarrow (a, b) \sim (a', b'),$$

dove ' \sim ' sta per 'è proporzionale a'.

Ortogonalita' di due rette.

Due rette r ed r' sono perpendicolari se e solo se tali sono i loro parametri direttori. Quindi:

$$\begin{aligned}r \perp r' &\Leftrightarrow (l, m) \perp (l', m') \\ &\Leftrightarrow (l, m) \cdot (l', m') = 0 \\ &\Leftrightarrow (a, b) \cdot (a', b') = 0.\end{aligned}$$

Esempi ed esercizi.

- Le rette $x - y = 1$ e $3x - 3y = 1$ sono parallele; le rette $x + 2z = 1$ e $3x + 6z = 3$ sono parallele e coincidenti.
- Le rette $x - 2y = 1$ e $4x + 2y = 1$ sono perpendicolari.

Angoli tra due rette.

Date due rette orientate r ed r' e \vec{r} , \vec{r}' due vettori concordemente orientati con r ed r' , risulta

$$\cos \widehat{rr'} = \cos \widehat{\vec{r}\vec{r}'} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\|\vec{r}\| \|\vec{r}'\|} = \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2 + m^2} \sqrt{l'^2 + m'^2}}.$$

Se, invece, le due rette non sono orientate, l'angolo $\widehat{rr'}$ può assumere due valori tra loro supplementari:

$$\cos \widehat{rr'} = \pm \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\|\vec{r}\| \|\vec{r}'\|} = \pm \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2 + m^2} \sqrt{l'^2 + m'^2}}.$$

Fasci di rette.

Siano r ed r' due rette. Se $r \cap r' = \{A\}$, si chiama *fascio di rette proprio* la totalità delle rette del piano passanti per A , che si dice *centro* del fascio proprio. Se $r \parallel r'$, la totalità delle rette del piano parallele ad r (o ad r') costituisce il *fascio di rette improprio* individuato dalla giacitura di α (e di α').

Se $r: ax + by + c = 0$ e $r': a'x + b'y + c' = 0$ il fascio è rappresentato da

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0,$$

al variare dei parametri omogenei λ e μ , con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Se $\lambda \neq 0$, ponendo $k = \mu/\lambda$, il fascio è rappresentato dall'equazione

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0,$$

che mostra come le rette di un fascio siano ∞^1 .

Si osservi che nell'equazione precedente, al variare di k in \mathbb{R} , la retta r' non è rappresentata; essa si può pensare ottenuta per $k = \pm\infty$.

Esempio: Determinare il fascio di rette del piano, di centro $A(-1, 1)$.

Distanze.

Geometricamente, la distanza di un punto P da una retta r , è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su r . Per determinare H , si trova la retta per P e perpendicolare ad r e la si interseca con r .

In termini analitici, se $P(x_0, y_0)$ ed $r : ax + by + c = 0$, risulta:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dati due punti distinti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, la *retta assiale del segmento AB* è il luogo dei punti del piano, equidistanti da A e B . La sua equazione (necessariamente di I grado) è

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

Distanza di due rette parallele r, r' : è la distanza tra r ed un qualsiasi punto di r' .

Circonferenza.

Chiamiamo *circonferenza* l'insieme \mathcal{C} dei punti P del piano tali che $\|\vec{CP}\| = R$, dove C è un punto fisso detto *centro* e R un numero reale positivo detto *raggio*. Se $C(\alpha, \beta)$ e $P(x, y)$, da $\|\vec{CP}\| = R$ segue:

$$\mathcal{C} : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

che dà l'equazione cartesiana di una circonferenza generica. Equivalentemente:

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

dove $\delta = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$. Viceversa, ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza di centro (α, β) , dove $\alpha = -a$, $\beta = -b$, e raggio $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, dove però:

$$a^2 + b^2 - c > 0 \Rightarrow \text{circonferenza ordinaria,}$$

$$a^2 + b^2 - c = 0 \Rightarrow \text{circonferenza di raggio nullo,}$$

$$a^2 + b^2 - c < 0 \Rightarrow \text{circonferenza immaginaria.}$$

Esempio:

Scrivere l'equazione della circonferenza \mathcal{C} , avente come punti diametralmente opposti $A(3, 0)$ e $B(1, 1)$.

Esempi ed esercizi.

1) Determinare le rette del piano che soddisfano le seguenti condizioni:

1. r : passante per $A(1, -2)$ e parallela al vettore $\vec{u} = (3, 2)$.
2. s : passante per $A(1, -2)$ e $B(2, 2)$.
3. t : passante per $A(1, -2)$ e perpendicolare al vettore $\vec{u} = (3, 2)$.

2) Trovare il punto A' , simmetrico di $A(1, 1)$ rispetto alla retta $r : 2x + 4y + 1 = 0$.
(Ripetere per $A(0, 0)$ ed $r : x - 3y + 2 = 0$).

3) Dati i punti $A(1, -1)$, $B(-2, 3)$ e la retta $r : x - y + 3 = 0$, trovare

1. i punti $P \in r$ tali che $d(A, P) = d(A, B)$,
2. il punto $Q \in r$ tali che $d(A, Q) = d(B, Q)$,
3. l'equazione dell'asse del segmento AB .

4) Data la retta $r : x - 3y + 2 = 0$, trovare i punti dell'asse delle x , aventi distanza 3 da r . (Ripetere per l'asse y).

5) Studiare la mutua posizione delle seguenti coppie di rette:

1. $r : x + y - 2 = 0, s : 2x - 1 = 0,$

2. $r : x + y - 2 = 0, s : 4x + 4y - 3 = 0,$

3. $r : 2x + ky + 1 = 0, s : x - y + 1 = 0,$ al variare di $k \in \mathbb{R}.$

6) Determinare gli angoli formati dalle seguenti coppie di rette:

1. $r : x + 3y - 1 = 0, s : 2x + y + 5 = 0,$

2. $r : x + y - 5 = 0, s : x = 1 - t, y = 2 + t,$

7) Scrivere l'equazione della circonferenza \mathcal{C} :

1. di centro $A(2, 1)$ e raggio 2,

2. di centro $B(0, -2)$ e passante per $P(3, 1),$

3. di centro $C(1, -3)$ e tangente ad
 $r : x - y + 3 = 0,$

4. di centro $E(1, 1),$ e secante la retta
 $s : x - y + 2 = 0$ in una corda di lunghezza 2.

8) Trovare la circonferenza \mathcal{C} , tangente ad $r : x + y + 3 = 0$ in $A(1, -4)$ e passante per l'origine.

9) Trovare la circonferenza \mathcal{C} , passante per $A(1, -1)$, $B(0, 2)$ e $D(-1, 3)$.

10) Trovare la circonferenza \mathcal{C} , passante per $A(1, 2)$, $B(-1, -2)$ ed avente centro sulla retta $r : x = 2 + t, y = 1 - t$. Trovare poi la retta tangente a \mathcal{C} in A , e le rette tangenti a \mathcal{C} e passanti per il punto $D(10, 0)$.

11) Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per l'origine O ed è tangente nel punto $P(1, 2)$ alla retta

$$r : x - y + 1 = 0.$$

Geometria analitica dello spazio

Un **riferimento ortonormale cartesiano** dello spazio è individuato da una base ortonormale positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ dei vettori dello spazio, e da un punto O scelto come origine del riferimento. Il riferimento si indica con $RC(O, x, y, z)$.

Sia P un punto dello spazio.

$$P(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Un riferimento $RC(O, x, y, z)$ permette quindi di stabilire *corrispondenze biunivoche* tra i punti di S_3 , i vettori di V_3 e le terne di \mathbb{R}^3 .

Assi coordinati:

asse x: retta per O e parallela a \vec{i} . Ha equazioni $y = z = 0$.

asse y: retta per O e parallela a \vec{j} . Ha equazioni $x = z = 0$.

asse z: retta per O e parallela a \vec{k} . Ha equazioni $x = y = 0$.

Piani coordinati:

piano xy: piano degli assi x ed y . Ha equazione $z = 0$.

piano xz: piano degli assi x e z . Ha equazione $y = 0$.

piano yz: piano degli assi y e z . Ha equazione $x = 0$.

Dati due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dello spazio,

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

è il vettore posizione di P_2 rispetto a P_1 . La *distanza* tra P_1 e P_2 è quindi data da:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \|\vec{P_1P_2}\| \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}$$

Il *punto medio* del segmento $\overline{P_1P_2}$ è il punto M di coordinate

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

Piani.

Tre punti P_1, P_2, P_3 non allineati individuano un piano α dello spazio:

$$P \in \alpha \Leftrightarrow \vec{P_1P}, \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3} \quad \text{dipendenti.}$$

Posto $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $P(x, y, z)$, la dipendenza lineare si può esprimere in due modi:

a) Equazioni parametriche di un piano:

$$\vec{P_1P} = u\vec{P_1P_2} + v\vec{P_1P_3}, \quad u, v \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + u(x_2 - x_1) + v(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + u(y_2 - y_1) + v(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + u(z_2 - z_1) + v(z_3 - z_1) \end{cases}$$

b) Equazione cartesiana di un piano:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante, si ha l'equazione cartesiana del piano:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

I parametri (a, b, c) si chiamano *coefficienti di giacitura* del piano e rappresentano le coordinate di un vettore (non nullo) perpendicolare al piano. Infatti, considerando il vettore $\vec{n} = (a, b, c)$ uscente da $P_0 \in \alpha$, si ha

$$\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0 \quad \forall P \in \alpha$$

da cui

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

che rappresenta il piano per P_0 con coefficienti di giacitura (a, b, c) .

Esempio. Dati i punti $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(1, 1, 1)$, $P_3(1, 0, 1)$ troviamo le equazioni parametriche e cartesiana del piano. Si ha $\vec{P_1P_2} = (0, 1, 1)$, $\vec{P_1P_3} = (0, 0, 1)$, dunque

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = u \\ z = u + v \end{cases},$$

da cui l'equazione cartesiana $x = 1$.

Mutue posizioni di due piani.

Siano α ed α' due piani. Volendo studiare la loro mutua posizione, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Risulta

sist. incomp. $\Leftrightarrow \text{rg}(A) \neq \text{rg}(\tilde{A}) \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = \emptyset$,

sist. comp. $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A}) \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' \neq \emptyset$.

Inoltre

$\text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \infty^1$ soluzioni $\Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = r$,

$\text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \infty^2$ soluzioni $\Leftrightarrow \alpha \equiv \alpha'$,

dove r è una retta. Ponendo

$$\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = \emptyset \quad \text{oppure} \quad \alpha \equiv \alpha'$$

possiamo dire che

$$\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow (a, b, c) \sim (a', b', c'),$$

dove ' \sim ' sta per 'è proporzionale a'.

Esempi ed esercizi.

a) I piani $x - y + 2z = 1$ e $3x - 3y + 6z = 1$ sono paralleli; i piani $x - y + 2z = 1$ e $3x - 3y + 6z = 3$ sono paralleli e coincidenti.

b) Il piano perpendicolare al vettore $(1, -1, 2)$ e uscente dal punto $(3, -1, 5)$ è

$$1(x - 3) + (-1)(y + 1) + 2(z - 5) = 0.$$

Retta

Due punti $P_1 \neq P_2$ individuano una retta r :

$$P \in r \Leftrightarrow P_1\vec{P}, P_1\vec{P}_2 \text{ dipendenti.}$$

La dipendenza lineare si può esprimere nei seguenti modi:

Equazioni cartesiane di una retta:

$$\begin{aligned} \text{rg} \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} &= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \end{aligned}$$

che si può porre nella forma

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

(*equazioni cartesiane della retta*). Quindi, r si può scrivere come intersezione di due piani

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0, \quad \alpha': a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

e tali che

$$\text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

N.B.: r non determina univocamente i piani α ed α' : due altri piani *distinti* passanti per r (ce ne sono ∞^1) individuano la stessa retta.

Si chiamano *parametri direttori* di r le coordinate di un arbitrario vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$ parallelo ad r .

Se $P_1, P_2 \in r$ e $P_1 \neq P_2$, allora $\vec{v} = \vec{P_1P_2}$ è parallelo ad r e quindi parametri direttori di r sono

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$$

I parametri direttori (l, m, n) di una retta sono *individuati a meno di un fattore di proporzionalità*.

Equazioni parametriche di una retta.

$$p \in r \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \vec{Pp} = t\vec{P_1P_2},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) = x_1 + lt \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) = y_1 + mt \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) = z_1 + nt \end{cases}$$

che sono dette *equazioni parametriche della retta*.

Eliminando t si riottengono le equazioni cartesiane.

Esempi ed esercizi.

1) Trovare i parametri direttori della retta

$$r: \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

($\vec{v} = (-3, 1, 2)$).

2) Verificare che le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 \\ z = 2 - \frac{t}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 11 - 4t' \\ y = 2 \\ z = t' \end{cases},$$

rappresentano la stessa retta r , trovarne i parametri direttori e le equazioni cartesiane.

Mutua posizione retta-piano.

Ad un piano α associamo il vettore $\vec{n} = (a, b, c)$, perpendicolare ad α , di coordinate i parametri di giacitura; ad una retta r associamo il vettore $\vec{r} = (l, m, n)$, parallelo ad r , di coordinate i parametri direttori. Allora:

$$r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n} \Leftrightarrow al + bm + cn = 0,$$

$$r \text{ incidente } \alpha \Leftrightarrow \neg(\vec{r} \perp \vec{n}) \Leftrightarrow al + bm + cn \neq 0.$$

In particolare,

$$r \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \vec{n}.$$

Mutua posizione di due rette.

Due rette dello spazio r ed r' , di parametri direttori $\vec{r} = (l, m, n)$ ed $\vec{r}' = (l', m', n')$ rispettivamente, possono essere

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{complanari : } \left\{ \begin{array}{l} r \parallel r' \Leftrightarrow (l, m, n) \sim (l', m', n') \\ r \text{ incidente } r' \Leftrightarrow r \cap r' = P_0 \end{array} \right. \\ \text{sghembe : non complanari.} \end{array} \right.$$

Caso particolare di incidenza:

$$r \perp r' \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{r}' \Rightarrow ll' + mm' + nn' = 0.$$

Rette sghembe.

Due rette r ed r' sono *sghembe* se non esiste alcun piano che le contiene.

Ricordiamo che, se $F, F' \subset V_3$, la distanza tra F ed F' è

$$\text{dist}(F, F') = \inf\{\text{dist}(P, P'); P \in F, P' \in F'\}.$$

Siano \vec{r} ed \vec{r}' i param. dir. delle rette sghembe r, r' . Esistono e sono univocamente determinati, $R \in r$ ed $R' \in r'$, tali che $\vec{RR'} \perp \vec{r}, \vec{r}'$, e vale: $\text{dist}(r, r') = \|\vec{RR'}\|$.

Esempio: Provare che sono sghembe le due rette

$$r : x - z = y - z = 0, \quad r' : x - 2z - 1 = y + z - 2 = 0$$

Angoli tra rette e piani. Siano r, r' due rette orientate e \vec{r}, \vec{r}' due vettori concordemente orientati con r ed r' . Allora

$$\begin{aligned} \cos \widehat{rr'} &= \cos \widehat{\vec{r}\vec{r}'} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\|\vec{r}\| \|\vec{r}'\|} = \\ &= \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}. \end{aligned}$$

Se le due rette non sono orientate, l'angolo $\widehat{rr'}$ assume due valori, tra loro supplementari:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{rr'} &= \pm \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\|\vec{r}\| \|\vec{r}'\|} = \\ &= \pm \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}. \end{aligned}$$

Analogamente, indicate con n ed n' le rette normali rispetto ad α ed α' , si ha

$$\begin{aligned} \cos \widehat{\alpha\alpha'} &= \cos \widehat{\vec{n}\vec{n}'} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{\|\vec{n}\| \|\vec{n}'\|} = \\ &= \pm \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \widehat{\alpha r} &= |\cos \widehat{\vec{n}\vec{r}}| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{\|\vec{n}\| \|\vec{r}\|} = \\ &= \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \end{aligned}$$

Fasci di piani.

Siano α ed α' due piani. Se $\alpha \cap \alpha' = r$, si chiama *fascio di piani proprio* di asse r la totalità dei piani dello spazio passanti per r , che si dice *asse del fascio proprio*.

Se $\alpha \parallel \alpha'$, i piani dello spazio paralleli ad α (o ad α') formano il *fascio di piani improprio* individuato dalla giacitura di α (e di α').

Se $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ il fascio è rappresentato da

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

al variare dei parametri omogenei λ e μ , con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Se $\lambda \neq 0$, ponendo $k = \mu/\lambda$, il fascio è rappresentato dall'equazione

$$ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

che evidenzia che i piani di un fascio sono ∞^1 .

Nell'equazione precedente, al variare di k in \mathbb{R} , il piano α' non è rappresentato; esso si può pensare ottenuto per $k = \pm\infty$. Ciò porta ad ampliare \mathbb{R} in modo spontaneo, aggiungendo un solo punto improprio (mentre in Analisi l'ampliamento è fatto con i due punti impropri $\pm\infty$).

Esempi ed esercizi.

1) Trovare il piano passante per $A(0, 2, -1)$ e per la retta

$$r: \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Poiché $A \notin r$, il piano è univocamente individuato. Si considera il fascio di piani di asse r e si impone il passaggio per A del generico piano.

Il piano generico $x + 2y + z + k(x - z) = 0$ passa per A se $k = -3$, quindi il piano cercato è $x - y - 2z = 0$.

2) Si risolva l'esercizio precedente considerando il piano passante per A e per due punti scelti di r .

3) Scrivere il fascio di rette del piano $\alpha: 3x - y + 5z + 1 = 0$ di centro $P_0(0, 1, 0) \in \alpha$.

Sia r una retta per P_0 non contenuta in α ; ad esempio:

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

L'equazione $x + kz = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, rappresenta il fascio di piani di asse r e

$$\begin{cases} x + kz = 0 \\ 3x - y + 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

rappresenta il fascio di rette richiesto.

Distanze.

In generale, la distanza tra rette, tra rette e piani, e tra piani, è sempre riconducibile alla distanza tra punti.

La distanza di un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ da un piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su π . In termini analitici,

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dati due punti $A(x_1, y_1, z_1) \neq B(x_2, y_2, z_2)$, il *piano assiale del segmento AB* è il luogo dei punti dello spazio, equidistanti da A e B . Ha equazione:

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 \end{aligned}$$

La distanza di un punto P da una retta r dello spazio, è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su r . Per determinare H , si trova il piano per P e $\perp r$, e lo si interseca con r . (Oppure, si considera \vec{PR} , dove R è un generico punto di r , e si impone che sia ortogonale a r .)

Distanza di due rette $r \parallel r'$: è la distanza tra r ed un qualsiasi punto di r' .

Distanza di due piani $\pi \parallel \pi'$: è la distanza tra π ed un qualsiasi punto di π' .

Distanza tra una retta r ed un piano π parallelo ad r : è la distanza tra π ed un punto di r .

Sfere e circonferenze.

Chiamiamo *sfera* l'insieme dei punti P dello spazio tali che $\|\vec{CP}\| = R$, dove C è un punto fisso e $R > 0$. Se $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e $P(x, y, z)$, da $\|\vec{CP}\| = R$ si ha

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2,$$

(equazione cartesiana di una sfera), da cui,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0,$$

dove $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$. Viceversa, ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

rappresenta una sfera Σ di centro $(\alpha = -a, \beta = -b, \gamma = -c)$, e raggio

$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Si ha:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \quad \text{sfera ordinaria,}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = 0 \quad \text{sfera di raggio nullo,}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - d < 0 \quad \text{sfera immaginaria.}$$

Se π è un piano, $\Sigma \cap \pi$ dà una circonferenza.

Esempio:

Trovare la sfera che ha come punti diametralmente opposti $A(3, 0, 0)$ e $B(1, 1, 1)$.