APPUNTI DI ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA

Giovanni Calvaruso

N.B.: Queste note sono realizzate ad esclusivo uso interno per il corso di Istituzioni di Algebra e Geometria del corso di Laurea in Ottica e Optometria dell'Università del Salento. Come tali, non hanno alcuna pretesa di completezza, e sono da intendersi come un puro supporto al corso stesso, che non può in alcun modo sostituirsi all'apprendimento fornito dalle lezioni.

PROGRAMMA DEL CORSO:

PARTE INTRODUTTIVA:

1) Matrici, determinanti e sistemi lineari

GEOMETRIA ANALITICA:

2) Vettori geometrici
3) Geometria analitica del piano
4) Coniche
5) Geometria analitica dello spazio

TESTI ED APPROFONDIMENTI:

- G. CALVARUSO, Appunti di Algebra e Geometria (disponibile online, nella sezione "Materiale Didattico" del sito web: http://www.dmf.unisalento.it/~calvaruso/Homepage/)

- A. SANINI, Lezioni di Geometria, ed. Levrotto e Bella, Torino.

- A. SANINI, Esercizi di Geometria, ed. Levrotto e Bella, Torino.

- G. DE CECCO e R. VITOLO, Note di Geometria e Algebra (disp. in Biblioteca).

- G. CALVARUSO e R. VITOLO, Esercizi di Geometria ed Algebra Lineare (disp. in Biblioteca).

- R. MARINOSCI, Complementi di Geometria e Algebra (Coniche e quadriche) (disp. online).

Richiami sulle strutture algebriche

Definizione. Sia A un insieme. Una *operazione* (o *legge di composizione interna*) in A è un'applicazione

$$\circ\colon A \times A \to A, \qquad (a,b) \mapsto a \circ b,$$

che ad ogni coppia ordinata (a,b) di elementi di A fa corrispondere un elemento $c = \circ(a,b) = a \circ b$, che verifica la *proprietà associativa:*

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, \qquad \forall a,b,c \in A.$$

Esempio. Addizione e moltiplicazione sono leggi di composizione in $\mathbb{Z}$.

Definizione. Un *gruppo* $(G, \circ)$ è un insieme G, con una operazione $\circ$, tali che

1. Per ogni $a, b, c \in G$ si ha

   $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ <u>proprietà associativa.</u>

2. Esiste un elemento $u \in G$ tale che $\forall a \in G$ si ha

   $a \circ u = u \circ a = a$ <u>esistenza dell'elemento neutro.</u>

3. Per ogni $a \in G$ esiste $a' \in G$ tale che

   $a \circ a' = a' \circ a = u$ <u>esistenza dell'inverso.</u>

   Si dimostra che u ed a' sono unici.

   Se oltre agli assiomi (1), (2), (3), vale l'assioma

4. $\forall a, b \in G$

   $a \circ b = b \circ a$ <u>proprietà commutativa,</u>

allora il gruppo si dice *commutativo* o *abeliano*.

Esempio. $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano,

$(Z, \cdot)$ NON è un gruppo (quali assiomi di gruppo non soddisfa?).

Definizione. Un *campo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è un insieme $\mathbb{K}$ (non vuoto), con due leggi di composizione interna, $+$ e $\cdot$, tali che

1. $(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo abeliano (il cui elemento neutro indichiamo con 0).

2. $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ è un gruppo abeliano (dove $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$).

3. $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ vale la <u>proprietà distributiva</u> di $\cdot$ rispetto a $+$:

   $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,, \qquad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a\,.$$

Esempi ed esercizi.

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto, sono esempi di campi.

- $(\{0, 1\}, +, \cdot)$ è un campo.
  ATTENZIONE: nel fare riferimento ai campi, SI ESCLUDE implicitamente o esplicitamente il campo $\{0, 1\}$ (detto di caratteristica 2), perché in esso "2" $= 1 + 1 = 0$.

MATRICI

Definizioni

Sia $\mathbb{K}$ un campo ($\neq \{0,1\}$). Si chiama *matrice di tipo* $m \times n$ *sul campo* $\mathbb{K}$ una tabella di $m \cdot n$ elementi di $\mathbb{K}$, disposti in modo da formare m righe ed n colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

L'elemento generico di A, cioè l'elemento che si trova sull'i-esima riga e j-esima colonna, si indica con a_{ij}. In breve si scrive

$$A = (a_{ij}), \qquad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Se $m \neq n$ la matrice A si dice *rettangolare*.
se $m = n$ A si chiama *quadrata*.
Se $m = 1$ la matrice A si dice *matrice riga*.
se $n = 1$ la matrice A si chiama *matrice colonna*.

Indichiamo con $\mathbb{K}^{m,n}$ l'insieme di tutte le matrici di m righe ed n colonne a coefficienti in $\mathbb{K}$. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, allora

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j\,.$$

Si chiama *trasposta* di $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ la matrice $A^T \in \mathbb{K}^{n,m}$ ottenuta da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne:

$$A = (a_{ij}) \quad \Rightarrow \quad A^T = (a_{ji})\,.$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & \pi \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Casi particolari di matrici quadrate sono:

A *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ (ossia, $A = A^T$).

A *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ ($A = -A^T$).

A *diagonale* se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$.

A *unità* o *identica* se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$; $a_{ii} = 1$.

Operazioni su matrici

Somma di due matrici. Due matrici A e B sono *sommabili* se entrambe appartengono a $\mathbb{K}^{m,n}$. La matrice *somma* $C = A + B$ è per definizione $C = (c_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ con

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \,.$$

La matrice O avente tutti gli elementi 0 è la matrice *nulla*, e soddisfa

$$A + O = A \qquad \forall A\,,$$

e l'*opposta* di A è la matrice $A' = -A$, dove $a'_{ij} = -a_{ij}$ $\forall i, j$.

Prodotto di uno scalare per una matrice. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, la matrice λA, *moltiplicazione di A per lo scalare λ*, è la matrice

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \quad \forall i, j$$

Esercizio: Dimostrare che $(A + B)^T = A^T + B^T$.

PROPRIETÀ:

1) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associativa),

2) $A+B = B+A$ (commutativa),

3) $A+O = A = O+A$ (elemento neutro),

4) $A+(-A) = O = (-A)+A$ (inverso rispetto alla somma),

5) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ (distributiva),

6) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ (distributiva),

7) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ (associativa),

8) $1A = A$ (elemento neutro)

Osservazione. $(\mathbb{K}^{m,n}, +)$ è un gruppo commutativo.

Esercizio: Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0,$$

calcolare $2A - 3B$.

Prodotto righe per colonne. La matrice A è *moltiplicabile (righe per colonne*) per la matrice B se $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,p}$. La matrice *prodotto* di A e B è la matrice $C = AB \in \mathbb{K}^{m,p}$, con $C = (c_{ij})$ dove

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

è il prodotto della riga i-esima di A per la colonna j-esima di B.

Importante!: In generale, non ha senso anche la moltiplicazione BA. Tuttavia, *anche se entrambe hanno senso e sono dello stesso tipo*, può comunque accadere che

$$AB \neq BA\,.$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,\ e$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA\,.$$

Si osservi che (come nell'esempio) *si può avere $AB = O$ senza che A o B siano matrici nulle*.

Proprietà:

1) $A(BC) = (AB)C$,

2) $A(B + C) = AB + AC$,

3) $A(\lambda B) = \lambda(AB) = (\lambda A)B$,

4) $AO = O'$,

5) $AI_n = A = I_m A \qquad \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$,

Esempi ed esercizi.

- Se $A = (1, 0, 3)$, verificare che

  $$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ A{\cdot}A^T = (10), \ A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Provare che $(AB)^T = B^T A^T$.

- Se $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, provare che AA^T e $A^T A$ sono simmetriche.

- Si osservi che se A e B sono simmetriche, in generale AB non è simmetrica:

  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se A è una matrice quadrata, allora

$$A^2 = AA, \dots, A^h = A^{h-1}A\,.$$

Se $AB = BA$, allora $(AB)^k = A^k B^k$. Questo non è vero, in generale, se $AB \neq BA$.

Una matrice REALE QUADRATA $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è detta *ortogonale* se

$$A^T A = I = AA^T\,.$$

Esercizi.

- Trovare tutte le potenze della matrice $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

- Provare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

  è ortogonale.

- Siano $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Vedere se

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2\,.$$

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta *invertibile* se esiste una matrice $A' \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che

$$AA' = I = A'A\,.$$

Si scrive in tal caso $A' = A^{-1}$.
Si noti che se A è ortogonale, allora $A^{-1} = A^T$.
Vedremo in seguito un criterio che ci permette di decidere quando una matrice è invertibile.

Esercizio: Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

stabilire se sono invertibili e in tal caso trovare l'inversa.

Nota. Le matrici sono molto utili in Matematica: permettono di semplificare complicate espressioni considerando tutta la tabella come un unico ente.
Le matrici intervengono nella schematizzazione di molti fenomeni, dipendenti da un numero finito di parametri.
Come vedremo più avanti, se vogliamo risolvere un sistema di equazioni lineari, una matrice ci dà tutte le informazioni necessarie per risolverlo.

Determinante di una matrice

Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$, chiamiamo *determinante* di A l'elemento di $\mathbb{K}$

$$\det A = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}\,,$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le $n!$ permutazioni dei numeri $1, 2, \dots, n$.

In termini più semplici, *il determinante* di una matrice **quadrata** è un numero, che si associa alla matrice stessa, e ne evidenzia alcune importanti proprietà. Si può descrivere come calcolare tale numero *in maniera ricorsiva*, ossia, per matrici quadrate via via più grandi:

Se $n = 1$, allora $\det A = a_{11}$.

Se $n = 2$, allora

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,,$$

se $n = 3$, allora

$$\begin{aligned} \det A \;&=\; a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ &\quad -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad +a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

Illustriamo la *Regola di Laplace* per il calcolo del determinante:

Fissato un elemento a_{ij} di A, si chiama *minore complementare* di a_{ij} la sottomatrice di A di ordine $n-1$, ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna. Si chiama *complemento algebrico* di a_{ij} o *cofattore* di a_{ij}, il numero

$A_{ij} = (-1)^{i+j}$ det(minore complementare di a_{ij}).

Teorema: Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora

$$\det A = a_{r1}A_{r1} + \cdots + a_{rn}A_{rn}\,,$$

dove r è una fissata riga (scelta arbitrariamente), oppure

$$\det A = a_{1c}A_{1c} + \cdots + a_{nc}A_{nc}\,,$$

dove c è una fissata colonna (scelta arbitrariamente).

Questa regola può essere assunta anche come definizione ricorsiva di determinante:

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1 \\ \sum_i a_{ij}A_{ij} = \sum_j a_{ij}A_{ij} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Quindi det è un'applicazione da $\mathbb{K}^{n,n}$ in $\mathbb{K}$.

Dal teorema di Laplace segue immediatamente che

1. $\det A = \det A^T$;

2. se la matrice B si ottiene da A moltiplicando una linea (o colonna) di A per un numero $k \in \mathbb{K}$ e lasciando invariate le altre linee (o colonne), allora $\det B = k \det A$.

Esempi ed esercizi.

- Se $I \in \mathbb{K}^{n,n}$, vale $\det I = 1$, $\det(-I) = (-1)^n$.

- Provare che $\forall k \in \mathbb{K}$ si ha $\det(kA) = k^n \det A$.

- Si calcoli $detA$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad (detA = -5).$$

- Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si calcoli $detA$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & -k & k+2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proprietà:

1. se le matrici A e B differiscono soltanto per lo scambio di due linee parallele, allora $\det B = -\det A$;

2. se A ha due linee uguali, allora $\det A = 0$;

3. se A ha due linee proporzionali, $\det A = 0$;

4. se B si ottiene da A aggiungendo ad una certa linea di A un'altra linea di A moltiplicata per un fattore di proporzionalità, allora $\det B = \det A$;

5. la somma degli elementi di una linea per i complementi algebrici di un'altra linea è zero.

Teorema di Binet: Se A e B sono due matrici quadrate di ordine n, si ha

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)\,.$$

Quindi, in generale, $AB \neq BA$, tuttavia $\det(AB) = \det(BA)$.

Matrici invertibili

Proposizione: Se A è invertibile, allora

1. $\det A \neq 0$;

2. $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Se $\det A \neq 0$, allora A è invertibile, e si prova che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A)\,,$$

dove $Adj(A) = (A_{ij}^T)$, detta *aggiunta classica di* A, è la matrice che ha al posto (i,j) il cofattore A_{ji} di a_{ji} (si noti lo scambio di indici).

Esempi ed esercizi.
1) Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

2) Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

(Si ha $\det A = -8 \neq 0$,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -1/2 \\ -12 & 0 & 2 \end{pmatrix}\,,$$

e $A^{-1} = -\frac{1}{8} Adj(A)$)

Combinazioni lineari

Date $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, $X = (x_j) \in \mathbb{K}^{n,1}$ e
$Y = (y_i) \in \mathbb{K}^{m,1}$,

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases}$$

cioè,

$$Y = AX \Leftrightarrow Y = x_1C_1 + \cdots + x_nC_n,$$

dove $C_1, \ldots, C_n$ sono le colonne di A. Si dice in tal caso che Y è *combinazione lineare* delle colonne di A, con coefficienti $x_1, \ldots, x_n$.

Analogamente, date $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, $X' = (x'_j) \in \mathbb{K}^{1,m}$ e
$Y' = (y'_i) \in \mathbb{K}^{1,n}$,

$$Y' = X'A \Leftrightarrow Y' = x_1R_1 + \cdots + x_nR_m,$$

dove $R_1, \ldots, R_n$ sono le righe di A. Si dice in tal caso che Y' è *combinazione lineare* delle righe di A, con coefficienti $x'_1, \ldots, x'_n$.

Rango di una matrice

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,m}$. Da A possiamo estrarre sottomatrici quadrate di ordine r, $1 \leq r \leq \min(n, m)$, formate da elementi che stanno su r righe ed r colonne di A. Di queste sottomatrici quadrate, dette *minori*, si può fare il determinante e vedere se non è nullo.

Definizione: Il *rango* $rg(A)$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ è dato dal **massimo** ordine dei suoi minori con determinante non nullo.

Teorema: $rg(A) = p \Leftrightarrow p$ è il massimo numero di righe o colonne di A linearmente indipendenti, cioè, nessuna delle quali si può ottenere come combinazione lineare delle restanti(righe o colonne).

$rg(A) = p > 0$ vuol dire che

1. <u>esiste</u> almeno <u>un</u> minore di ordine p con determinante diverso da 0; e

2. <u>tutti</u> gli eventuali minori di ordine $p+1$ hanno determinante nullo.

Naturalmente, $rg(A) = 0 \Leftrightarrow$ la matrice è nulla.

Se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ (quadrata), allora

$$rg(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ invertibile.}$$

Esempi ed esercizi.

1) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, poiché $\det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, e tutti i minori di ordine 3 hanno determinante nullo.

2) Determinare il rango delle seguenti matrici, al variare di λ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \lambda \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 4 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si vede che $rg(A) = 2 \ \forall \lambda$; $rg(B) = 3$ per $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -2$, mentre $rg(B) = 2$ per $\lambda = -2$ e $rg(B) = 1$ per $\lambda = 1$.

3) Calcolare il rango della seguente matrice B al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det B = 0$, si ha che $rg(B) \leq 3$. Inoltre,

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \ \Rightarrow \ rg(B) = 3 \ \forall \lambda$$

Sistemi lineari

Un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite $x_1, \ldots, x_n$ è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

I numeri $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sono detti *coefficienti* e $b_i \in \mathbb{K}$ *termini noti*. Se $b_i = 0$ $\forall i$ il sistema si dice *omogeneo*.

In forma matriciale:

$$AX = B,$$

dove $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ è la matrice dei coefficienti, X è la colonna delle incognite e B quella dei termini noti, cioè

$$X^T = (x_1, \ldots, x_n)\,, \qquad B^T = (b_1, \ldots, b_n)\,.$$

I problemi fondamentali che si presentano sono:

1. <u>esistenza</u> delle soluzioni o compatibilità del sistema (aspetto **qualitativo**);

2. determinazione del <u>numero</u> delle soluzioni (aspetto **quantitativo**);

3. <u>calcolo esplicito</u> di tutte le eventuali soluzioni (aspetto **computazionale**).

Una **soluzione** del sistema è una n-pla $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ che soddisfi simultaneamente tutte le sue equazioni.

Problema 1 (qualitativo). Esso è risolto completamente dal *Teorema di Rouché-Capelli*:

$$\text{il sistema è compatibile} \Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A}),$$

dove $\tilde{A} = (A, B)$ è la *matrice completa* del sistema.

Esempio. Il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è incompatibile. Infatti $1 = rg(A) \neq rg(\tilde{A}) = 2$.

Problema 2 (quantitativo). Se $rg(A) = rg(\tilde{A}) = p$. Si hanno i seguenti casi:

$$\begin{array}{ll} p = n & \text{una sola soluzione,} \\ p < n & \infty^{n-p} \text{ soluzioni,} \end{array}$$

Con '∞^{n-p} soluzioni' si intende che le infinite soluzioni dipendenti da $n - p$ parametri in $\mathbb{K}$.

Osservazione. Ne segue che se $p = m < n$ (*sistema normale*) il sistema è sempre compatibile.

N. B. *La risoluzione di un sistema compatibile di rango p si riconduce sempre a quella di un sistema di p equazioni in p incognite (con matrice dei coefficienti non singolare): basta considerare come parametri le $n-p$ incognite, i cui coefficienti non concorrano a formare il minore di rango p.*

Problema 3 (computazionale). Si tratta dunque di risolvere un sistema con $n = m$ e $\det A \neq 0$ (**sistema di Cramer**):

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Il Teorema di Cramer ci dà l'espressione esplicita delle soluzioni:

$$x_k = \frac{det(A^{(k)})}{det(A)},$$

dove $A^{(k)}$ è la matrice ottenuta da A sostituendo alla k-esima colonna di A la colonna dei termini noti.

Nota: sistemi omogenei. I sistemi *omogenei*, ossia sistemi del tipo

$$(*) \quad AX = O,$$

ammettono *sempre* la soluzione nulla $X = O$. Siamo perciò interessati alle soluzioni non nulle, dette anche *autosoluzioni* o *soluzioni proprie*.

Se X' è una soluzione di $(*)$, allora $\lambda X'$ è una soluzione $\forall\lambda$; se X' e X'' sono soluzioni di $(*)$, allora anche $X'+X''$ è una soluzione. Chiaramente $rg(A) = rg(\tilde{A})$, e se $p = rg(A)$ allora le soluzioni sono ∞^{n-p}.

Ad ogni sistema lineare non omogeneo $AX = B$ si può associare il sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

Si osservi che se X_0 è una soluzione particolare di $AX = B$ e $\tilde{X}$ la soluzione generica di $AX = 0$, allora $\tilde{X} + X_0$ è la soluzione generica di $AX = B$; infatti

$$A(\tilde{X} + \tilde{X}_0) = A\tilde{X} + A\tilde{X}_0 = O + B = B.$$

Esempi.

1) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ A & 0 \\ & 2 \end{array}\right).$$

Poiché $\det(A) = -4 \neq 0$, il sistema è di Cramer, e quindi ammette un'unica soluzione.

Applicando il metodo risolutivo dei sistemi di tipo Cramer:

$$x = \frac{|A^{(1)}|}{|A|} = 0, \; y = \frac{|A^{(2)}|}{|A|} = 1, \; z = \frac{|A^{(3)}|}{|A|} = 0,$$

per cui, $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ è l'unica soluzione del sistema.

2) Risolviamo il sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y - z = 0 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{matrix} \right).$$

Poiché $p = rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2$ il sistema è compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni ($n - p = 3 - 2 = 1$). Esso corrisponde al sistema di tipo Cramer

$$\begin{cases} 2y = z \\ 2x = 6 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t + 3 \\ (y = t) \\ z = 2t \end{cases}$$

Il secondo sist. (di Cramer) ha l'unica soluzione $(x, z) = (-3t + 3, 2t)$ (dipendente dal param. t). Quindi, il sistema dato ha per soluzioni $(x, y, z) = (-3t + 3, t, 2t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Altro metodo: Il sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y-z=0 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$$

che ha come soluzione generale
$(x,y,z)=(h,-1/3\,h,-1/3\,h)$. Una soluzione particolare di $(*)$, ottenuta ad esempio ponendo $z=0$, è $(3,0,0)$. Quindi, *tutte* le soluzioni di $(*)$ sono date da

$$(x,y,z)=(h+3,-1/3\,h,-1/3\,h), \qquad h\in\mathbb{R}.$$

Ponendo $t=-1/3\,h$, ci si rende conto immediatamente che gli insiemi

$$\{(-3t+3,t,2t) \mid t\in\mathbb{R}\} \quad \text{e}$$

$$\left\{\left(h+3,-\frac{1}{3}h,-\frac{2}{3}h\right) \mid t\in\mathbb{R}\right\}$$

coincidono.

3) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-2y+2z=7 \end{cases}$$

Ovviamente,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A}=\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix} \end{array}\right).$$

Poiché $p=rg(A)=1\neq 2=rg(\tilde{A})$, il sistema NON è compatibile.

Esempi ed Esercizi.

1) Verificare che la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

è ortogonale, per ogni valore reale di θ. Ripetere per

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

2) Trovare A^{-1} e B^{-1}, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Trovare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, il rango delle seguenti matrici A e B. Determinare in particolare i valori reali di k per cui le matrici A e B sono invertibili:

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 3 & 1+k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-k & 3 & -1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & -k & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Discutere il seguente sistema, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, e risolverlo nei casi in cui è compatibile.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ 2x - \lambda z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizi di riepilogo

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0,$$

calcolare $2A - 3B$, A^2, B^T, AB, BA.

2) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolarne tutti i possibili prodotti a due a due.

3) Risolvere il sistema lineare $AX = B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4) Dire se le seguenti matrici sono invertibili. In caso affermativo, trovarne l'inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -\mu \\ \mu - 1 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

6) Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\mu \\ 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

7) Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 0, \\ x - 2z - t = -1. \end{cases}$$

8) Verificare che i seguenti sistemi lineari sono equivalenti (hanno le stesse soluzioni):

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + y - 4z = 5, \\ x + 3y - 7z = 0, \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} x - z = 3, \\ y - 2z = -1. \end{cases}$$

9) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare e risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + kz = k, \\ 2y + z = 0, \\ kx + z = k. \end{cases}$$

Richiami sulle relazioni di equivalenza

Definizione. Una *relazione* $\mathcal{R}$ su un insieme A è un sottoinsieme S di $A \times A$. Se $a, b \in A$, si scrive

$$a \, \mathcal{R} \, b \Leftrightarrow (a, b) \in S \, .$$

Una *relazione di equivalenza* in A è una relazione, di solito indicata con il simbolo $\sim$, tale che, $\forall a, b, c \in A$, valgono le seguenti proprietà:

1. $a \sim a$ (proprietà riflessiva)
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (proprietà simmetrica)
3. $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (proprietà transitiva).

Dati $\sim$ una relazione di equivalenza e $a \in A$, si chiama *classe di equivalenza* individuata da a l'insieme

$$[a] = \{x \in A \mid x \sim a\} \, .$$

Le classi di equivalenza dividono l'insieme A in sottoinsiemi mutuamente disgiunti. L'insieme formato dalle classi di equivalenza si chiama *insieme quoziente* di A e si indica $A/\sim$.

Esempio. Sia $\mathcal{R}$ l'insieme delle rette dello spazio (o del piano) euclideo. La relazione

$r \sim s \quad \Leftrightarrow \quad r \equiv s$ o r, s complanari e $r \cap s = \emptyset$

è una relazione di equivalenza (detta *parallelismo*). La classe di equivalenza $[r]_\sim$ è la *direzione* individuata dalla retta r.

Vettori dello spazio ordinario

Lo spazio V_3

Sia S_3 lo spazio della geometria euclidea. Ogni segmento di estremi A e B individua due segmenti orientati AB e BA aventi orientazioni opposte; ciò è espresso scrivendo che

$$AB = -BA.$$

Nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio introduciamo la seguente relazione di equivalenza, detta di *equipollenza*

$$AB \sim CD \Leftrightarrow \begin{array}{l} (1) AB \text{ è parallelo a } CD, \\ (2) \|AB\| = \|CD\|, \\ (3) AB, CD \text{ sono equiversi.} \end{array}$$

Le classi di equivalenza si chiamano *vettori*. Il vettore $\vec{u}$ individuato da $\vec{AB}$, è anche individuato da un qualsiasi altro segmento ad esso equipollente (come $\vec{CD}$). Il rappresentante $\vec{AB}$ di un vettore $\vec{u}$ si dice *vettore $\vec{u}$ applicato in A* e si indica $(\vec{u}, A)$. Si usa anche la notazione $\vec{u} = B - A$.

I segmenti AA, BB, ..., individuano il vettore nullo $\vec{0}$.

Un vettore non nullo è individuato dalla direzione, dal verso e dal modulo. $\mathbf{V}_3$ denota l'insieme dei vettori liberi dello spazio e con $\mathbf{S}_3$ i punti dello spazio. Fissato un punto $O \in \mathbf{S}_3$, ad ogni punto $P \in \mathbf{S}_3$ si può associare un unico vettore $\vec{u} \in \mathbf{V}_3$, ponendo $\vec{u} = \vec{OP}$, e viceversa.

Somma di vettori. Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori. Se si considerano i rappresentanti indicati $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - B$, poniamo

$$\vec{u} + \vec{v} = C - A$$

(che non dipende dai rappresentanti scelti).

Proprietà:

1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + (\vec{v}) + \vec{w}$ (associativa)

2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativa)

3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (elemento neutro)

4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (inverso rispetto alla somma)

Se consideriamo rappresentanti opportuni $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AD}$, allora $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$ è la diagonale del parallelogramma di lati AB e AD, in accordo con quanto si studia in Fisica.

Differenza di vettori: Per definizione, poniamo $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. Se $\vec{u}=B-A$ e $\vec{v}=C-A$, allora $\vec{u}-\vec{v}=B-C$.

Prodotto di un numero reale per un vettore

Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbf{V_3}$. Vogliamo definire $\lambda\vec{u}$.

1. Se $\lambda = 0$, oppure $\vec{u}=\vec{0}$, poniamo $\lambda\vec{u}=\vec{0}$.

2. Se $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, il vettore $\lambda\vec{u}$ ha direzione coincidente con $\vec{u}$, verso concorde con quello di $\vec{u}$ se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$, e inoltre
$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|.$$

Il numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è detto *scalare*.

Proprietà:

1) $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$,

2) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$,

3) $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$,

4) $1\vec{u} = \vec{u}$.

Dipendenza lineare

I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente dipendenti* se e solo se esiste una n-pla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tale che

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}.$$

Se ad esempio $\lambda_n \neq \vec{0}$, allora

$$\vec{v}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \vec{v}_1 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \vec{v}_{n-1},$$

cioè, $\vec{v}_n$ 'dipende' da $\vec{v}_1$, ..., $\vec{v}_{n-1}$. Più precisamente, $\vec{v}_n$ è <u>combinazione lineare</u> di $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}$. In generale, un vettore $\vec{v}$ è *combinazione lineare* di $\vec{v}_1$, ..., $\vec{v}_n$ con coefficienti $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ se

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n\,.$$

Indipendenza lineare: I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente indipendenti* se e solo se *non* sono linearmente dipendenti, cioè

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \;\Rightarrow\; \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Chiaramente **vale sempre** (sia per vettori indipendenti che dipendenti)

$$\lambda_i = 0 \;\forall i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}\,.$$

Significato geometrico: Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbf{V}_3$. Allora

$$\begin{array}{rcl} \vec{v}_1 \text{ dipendente} & \Leftrightarrow & \vec{v}_1 = \vec{0} \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ dipendenti} & \Leftrightarrow & \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ paralleli} \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ dipendenti} & \Leftrightarrow & \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ complanari.} \end{array}$$

$n \geq 4$ **vettori di $\mathbf{V}_3$ sono sempre dipendenti**. Quindi, *in $\mathbf{V}_3$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è* 3.

Nell'insieme $\mathbf{V}_2$ dei vettori del piano, il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 2.

Nell'insieme $\mathbf{V}_1$ dei vettori della retta, il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 1.

Si dice perciò che la **dimensione** della retta è 1 ed una sua base è data da un vettore non nullo $\{\vec{v}_1\}$; la dimensione del piano è 2 ed una sua base è data da 2 vettori indipendenti $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$; la dimensione dello spazio è 3 ed una sua base è data da 3 vettori indipendenti $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base di $\mathbf{V}_3$. Allora, per ogni $\vec{v}$, $\{\vec{v}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sono dipendenti, e

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3.$$

La terna di numeri $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ è univocamente individuata, e λ_1, λ_2, λ_3 sono dette le *coordinate* di $\vec{v}$ nella base $\mathcal{B}$. Naturalmente, nella base $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 & \text{ha coordinate} & (1,0,0), \\ \vec{e}_2 & \text{ha coordinate} & (0,1,0), \\ \vec{e}_3 & \text{ha coordinate} & (0,0,1). \end{array}$$

Vediamo ora come condizioni vettoriali si traducano in problemi scalari tramite le coordinate. Siano

$$\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \qquad \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \qquad \vec{w}(w_1, w_2, w_3).$$

Allora:

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} au_1 + bv_1 + cw_1 = 0 \\ au_2 + bv_2 + cw_2 = 0 \\ au_3 + bv_3 + cw_3 = 0. \end{cases}$$

Si consideri

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Se $rg(A) = p$, allora p è il massimo numero di vettori indipendenti in $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Naturalmente, $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$, e $\lambda\vec{u}=(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

Se consideriamo il riferimento cartesiano affine $\mathcal{R}(Oxyz)$ associato a $\mathcal{B}$ tale che $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ siano i vettori unità sugli assi si ha, con l'usuale simbolismo,

$$\vec{e}_1=\vec{i}, \quad \vec{e}_2=\vec{j}, \quad \vec{e}_3=\vec{k},$$
$$u_1=u_x, \quad u_2=u_y, \quad u_3=u_z.$$

Se $P_i(x_i, y_i, z_i)$ per $i=1,2$, allora

$$\vec{P_1P_2}=\vec{OP_2}-\vec{OP_1}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

Esercizi.

1) Dati i vettori $\vec{v}(1,2,3)$, $\vec{w}(1,1,1)$ e $\vec{v}_1(1,-1,0)$, $\vec{v}_2(0,1,1)$, $\vec{v}_3(2,2,4)$.

a) Si possono scrivere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$? Se sì, trovare i coefficienti della combinazione lineare.

b) $\vec{v}_2$ è combinazione lineare di $\vec{w}, \vec{v}_1, \vec{v}_3$?

2) Si consideri $\mathbf{V}_2$ ed una sua base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, i vettori

$$\vec{v}_1 = (1-t)\vec{e}_1 + t\vec{e}_2, \qquad \vec{v}_2 = t\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

costituiscono una base di $\mathbf{V}_2$?

3) Siano dati i seguenti vettori di $\mathbf{V}_3$ riferiti alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\begin{aligned} &\vec{v}_1 = (2-h, 4-2h, 2-h), \\ &\vec{v}_2 = (h, 3h, 2h), \\ &\vec{v}_3 = (1-h, 1-2h, h). \end{aligned}$$

1. determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\vec{w}(1-2h, 1-h, -5h)$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

2. Esaminare il caso $h = 0$.

Orientazione.

In generale, *orientare* uno spazio significa *fissare* una base ordinata di suoi vettori, e assumerla come positiva.

Una retta r si dice *orientata* se è assegnato un vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$, parallelo ad r. Tale vettore determina un verso di percorrenza su r, che **si sceglie** come positivo.

Un piano π si dice *orientato* se è assegnata una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *ordinata* di vettori paralleli a π. Tale base determina un verso di rotazione su π, quello della minima rotazione che porta $\vec{e}_1$ su $\vec{e}_2$, che **si sceglie** come positivo. Per convenzione, si sceglie il verso *antiorario* come positivo.

Lo spazio $\mathbf{V}_3$ è *orientato* se è assegnata una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *ordinata* di suoi vettori. Tale base determina una orientazione, che **si sceglie** come positiva, legata al fatto che un osservatore, posto nel semispazio determinato dal piano di $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ in cui c'è $\vec{e}_3$, vede la minima rotazione che porta $\vec{e}_1$ su $\vec{e}_2$ in senso *antiorario*.

Prodotto scalare

Il *prodotto scalare* tra due vettori è l'applicazione

$$g\colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbb{R}, \quad g(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{u}=\vec{0} \text{ o } \vec{v}=\vec{0} \\ \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Proprietà:

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$, commutatività

2. $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, omogeneità

3. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$, distributività.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ una base ortonormale di $\mathbf{V}_3$ (cioè, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sono unitari e mutuamente ortogonali); allora:

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\cdot\vec{i}=1, & \vec{j}\cdot\vec{j}=1, & \vec{k}\cdot\vec{k}=1, \\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0, & \vec{j}\cdot\vec{k}=0, & \vec{i}\cdot\vec{k}=0. \end{array}$$

Se $\vec{u} = u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$, allora si ha

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

Si osservi che se $\mathcal{B}$ non fosse ortonormale, l'espressione del prodotto scalare non sarebbe così semplice. Si vede facilmente che

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \qquad \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

Dunque, *conoscendo il prodotto scalare*, si può determinare la lunghezza di un vettore e l'angolo tra due vettori.

La *componente ortogonale* di $\vec{v}$ rispetto ad un vettore non nullo $\vec{u}$ è il <u>numero reale</u>

$$v_{\vec{u}} = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \vec{v} \cdot \hat{u} \in \mathbb{R}$$

($\hat{u}$ =versore nella direzione di $\vec{u}$.)

La *proiezione ortogonale* di $\vec{v}$ su $\vec{u}$ è il <u>vettore</u>

$$\vec{v}_{\vec{u}} = v_{\vec{u}} \, \hat{u}.$$

Prodotto vettoriale

Il *prodotto vettoriale* tra vettori è l'applicazione

$$\wedge\colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3, \quad \wedge(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}\wedge\vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \text{se } \vec{u} \parallel \vec{v} \\ \vec{w} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\vec{w}$ ha:
(i) modulo $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin\widehat{\vec{u}\vec{v}}$,
(ii) direzione perpendicolare a $\vec{u}$ e $\vec{v}$,
(iii) verso tale che la terna $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ sia equiversa a $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Proprietà:

1. $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$, <u>anticommutatività</u>,
2. $(\lambda\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, <u>omog.</u>
3. $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$, <u>distributività</u>.

Se $\mathcal{B} = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ è una base ortonormale positiva, allora

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Prodotto misto

Il *prodotto misto* di 3 vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_3$ è dato dal numero reale $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$. Considerata una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, si ha la seguente espressione analitica:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Significato geometrico dei prodotti vettoriale e misto:

- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \mathcal{A}$, area del parallelogramma costruito sui vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

- $|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \mathcal{V}$, volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Esercizi di riepilogo

1) (Rispetto ad una fissata base ortonormale $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$,) si considerino i vettori $\vec{u}=\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{w}=3\vec{j}+\vec{k}$. Provare che $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ formano una base, e trovare le componenti di $\vec{x}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ rispetto a tale base.

2) Dati i vettori $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{v}=-3\vec{j}$, $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, calcolare $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\widehat{\vec{u},\vec{v}}$, $\vec{u}\wedge\vec{v}$, l'area del triangolo di lati $\vec{u}$ e $\vec{v}$, il volume del parallelepipedo di lati $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$.

3) trovare la proiezione ortogonale del vettore $\vec{v}=(0,-3,0)$ sul vettore $\vec{u}=(1,-2,3)$.

4) Dati i vettori $\vec{a}=(1,-2,0)$ e $\vec{b}=(3,-1,-1)$,

1. Verificare che i vettori
$$\vec{u_1}=(2,1,0)\,, \qquad \vec{u_2}=\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},-2\right)\,,$$
sono perpendicolari ad $\vec{a}$.

2. Si trovino i vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ perpendicolari a $\vec{b}$ le cui componenti ortogonali ad $\vec{a}$ siano rispettivamente $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$.

5) Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, i vettori $\vec{u} = (h, h{-}1, 2)$ e $\vec{v} = (5, h, 0)$ sono perpendicolari, e per quali valori sono paralleli.

6) Dati i vettori $\vec{v_1} = (0, -1, -1)$, $\vec{v_2} = (1, 0, 2)$, trovare la giacitura $\vec{a}$ individuata da $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ (cioè un vettore perpendicolare al piano individuato da $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$).

7) Si considerino i seguenti vettori

$\vec{u} = \lambda\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\,, \quad \vec{v} = \vec{i} - \lambda\vec{j} + \vec{k}\,, \quad \vec{w} = -2\vec{i} + \mu\vec{k}\,,$

dove $\lambda\,, \mu \in \mathbb{R}$.

1. Trovare per quali valori di $\lambda\,, \mu$ esistono vettori $\vec{x}$ tali che
$$\vec{u} \wedge \vec{x} + \vec{x} \wedge \vec{v} = \vec{w}\,.$$
2. Determinare, quando possibile, le componenti di $\vec{x}$ per $\lambda = 1$.

8) Trovare i vettori di modulo 3, perpendicolari ai vettori $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

Geometria analitica del piano.

Coordinate cartesiane nel piano.

Un **riferimento ortonormale cartesiano** del piano è individuato da una base ortonormale (positiva) $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ dei vettori del piano, e da un punto O scelto come origine del riferimento. Il riferimento si indica con $RC(O, x, y)$.

Sia P un punto del piano.

$$P(x, y) \Leftrightarrow \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Fissare un riferimento $RC(O, x, y)$ permette quindi di stabilire *corrispondenze biunivoche* tra i punti del piano, i vettori del piano e le coppie di $\mathbb{R}^2$.

Assi coordinati:
asse x: retta per O e parallela a $\vec{i}$. Ha equazione $y = 0$.
asse y: retta per O e parallela a $\vec{j}$. Ha equazione $x = 0$.

Dati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ del piano,

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

è il vettore posizione di P_2 rispetto a P_1. La *distanza* tra P_1 e P_2 è quindi data da:

$$d(P_1, P_2) = \|\vec{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Il *punto medio* del segmento $\overline{P_1P_2}$ è il punto M di coordinate

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2},\right).$$

Retta del piano.

Due punti P_1, P_2 non coincidenti individuano una retta r del piano:

$$P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{P_1P_2}.$$

Posto $P_i(x_i, y_i)$, $P(x, y)$, il parallelismo si può esprimere in due modi:

a) Equazione cartesiana di una retta del piano:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante, si ha l'*equazione cartesiana della retta:*

$$r : ax + by + c = 0, \qquad (a, b) \neq (0, 0).$$

(a, b) rappresenta un vettore (non nullo) perpendicolare alla retta r. Di conseguenza, $(b, -a)$ rappresenta un vettore parallelo a r.

b) Equazioni parametriche di una retta del piano:

$$\overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{P_1P_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} = t\,\overrightarrow{P_1P_2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1) = x_1 + lt \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) = y_1 + mt \end{cases}$$

che sono dette *equazioni parametriche della retta*. (l, m) sono le coordinate di un vettore parallelo ad r, e si dicono *parametri direttori* della retta.

Eliminando t, si perviene all'equazione cartesiana.

Esempio. Troviamo le equazioni parametriche e cartesiana della retta passante per $P_1(1,0)$ e $P_2(1,1)$. Si ha $\vec{P_1P_2} = (0,1)$, dunque

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$$

da cui l'equazione cartesiana $x = 1$.

Mutue posizioni di due rette.

Due rette r ed s del piano sono (1) **incidenti**, (2) **parallele e distinte**, oppure (3) **coincidenti**. Per studiarne la mutua posizione, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Risulta:

$$\text{sist. incompatibile} \Leftrightarrow rg(A) \neq rg(\tilde{A}) \;\Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset,$$
$$\text{sist. compatibile} \Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A}) \;\Leftrightarrow r \cap r' \neq \emptyset.$$

Inoltre:

$$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow 1 \text{ soluzione} \quad \Leftrightarrow r \cap r' = \{P_0\},$$
$$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \infty^1 \text{soluzioni} \qquad \Leftrightarrow r \equiv r'.$$

Ponendo

$$r \parallel r' \Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset \quad \text{oppure} \quad r \equiv r',$$

possiamo dire che

$$r \parallel r' \Leftrightarrow (b, -a) \sim (b', -a') \Leftrightarrow (a, b) \sim (a', b'),$$

dove '$\sim$' sta per 'è proporzionale a'.

Ortogonalità di due rette.

Due rette r ed r' sono perpendicolari se e solo se tali sono i loro parametri direttori. Quindi:

$$\begin{aligned} r \perp r' \quad &\Leftrightarrow \quad (l,m) \perp (l',m') \\ &\Leftrightarrow \quad (l,m)\cdot(l',m') = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a,b)\cdot(a',b') = 0. \end{aligned}$$

Esempi ed esercizi.

- Le rette $x-y=1$ e $3x-3y=1$ sono parallele; le rette $x+2z=1$ e $3x+6z=3$ sono parallele e coincidenti.

- Le rette $x-2y=1$ e $4x+2y=1$ sono perpendicolari.

Angoli tra due rette.

Date due rette orientate r ed r' e $\vec{r}$, $\vec{r'}$ due vettori concordemente orientati con r ed r', risulta

$$\cos\widehat{rr'} = \cos\widehat{\vec{r}\vec{r'}} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} = \frac{ll'+mm'}{\sqrt{l^2+m^2}\sqrt{l'^2+m'^2}}.$$

Se, invece, le due rette non sono orientate, l'angolo $\widehat{rr'}$ può assumere due valori tra loro supplementari:

$$\cos\widehat{rr'} = \pm\frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} = \pm\frac{ll'+mm'}{\sqrt{l^2+m^2}\sqrt{l'^2+m'^2}}.$$

Fasci di rette.

Siano r ed r' due rette. Se $r \cap r' = \{A\}$, si chiama *fascio di rette proprio* la totalità delle rette del piano passanti per A, che si dice *centro* del fascio proprio. Se $r \parallel r'$, la totalità delle rette del piano parallele ad r (o ad r') costituisce il *fascio di rette improprio* individuato dalla direzione di r (e di r').

Se $r\colon ax + by + c = 0$ e $r'\colon a'x + b'y + c' = 0$, il fascio è rappresentato da

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0,$$

al variare dei parametri omogenei λ e μ, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Se $\lambda \neq 0$, ponendo $k = \mu/\lambda$, il fascio è rappresentato dall'equazione

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0,$$

che mostra come le rette di un fascio siano ∞^1.

Si osservi che nell'equazione precedente, al variare di k in $\mathbb{R}$, la retta r' non è rappresentata; essa si può pensare ottenuta per $k = \pm\infty$.

Esercizio: Determinare il fascio di rette del piano, di centro $A(-1, 1)$, ed il fasci di rette del piano parallele a $r: 2x - 3y = 1$.

Distanze.

Geometricamente, la distanza di un punto P da una retta r, è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su r. Per determinare H, si trova la retta per P e perpendicolare ad r e la si interseca con r.

In termini analitici, se $P(x_0, y_0)$ ed $r : ax+by+c = 0$, risulta:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dati due punti distinti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, la *retta assiale del segmento* AB è il luogo dei punti del piano, equidistanti da A e B. La sua equazione (necessariamente di I grado) è

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

Distanza di due rette parallele r, r': è la distanza tra r ed un qualsiasi punto di r'.

Circonferenza.

Chiamiamo *circonferenza* l'insieme $\mathcal{C}$ dei punti P del piano tali che $\|\vec{CP}\| = R$, dove C è un punto fisso detto *centro* e R un numero reale positivo detto *raggio*. Se $C(\alpha, \beta)$ e $P(x, y)$, da $\|\vec{CP}\| = R$ segue:

$$\mathcal{C} : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

che dà l'equazione cartesiana di una circonferenza generica. Equivalentemente:

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

dove $\delta = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$. Viceversa, ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza di centro (α, β), dove $\alpha = -a$, $\beta = -b$, e raggio $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, dove però:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c > 0 \Rightarrow &\quad \text{circonferenza ordinaria,} \\ a^2 + b^2 - c = 0 \Rightarrow &\quad \text{circonferenza di raggio nullo,} \\ a^2 + b^2 - c < 0 \Rightarrow &\quad \text{circonferenza immaginaria.} \end{aligned}$$

Esempio:

Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$, avente come punti diametralmente opposti $A(3, 0)$ e $B(1, 1)$.

Esempi ed esercizi.

1) Determinare le rette del piano che soddisfano le seguenti condizioni:

1. r : passante per $A(1,-2)$ e parallela al vettore $\vec{u} = (3,2)$.

2. s : passante per $A(1,-2)$ e $B(2,2)$.

3. t : passante per $A(1,-2)$ e perpendicolare al vettore $\vec{u} = (3,2)$.

2) Trovare il punto A', simmetrico di $A(1,1)$ rispetto alla retta $r : 2x + 4y + 1 = 0$.
(Ripetere per $A(0,0)$ ed $r : x - 3y + 2 = 0$).

3) Dati i punti $A(1,-1)$, $B(-2,3)$ e la retta $r : x - y + 3 = 0$, trovare

1. i punti $P \in r$ tali che $d(A,P) = d(A,B)$,

2. il punto $Q \in r$ tali che $d(A,Q) = d(B,Q)$,

3. l'equazione dell'asse del segmento AB.

4) Data la retta $r : x - 3y + 2 = 0$, trovare i punti dell'asse delle x, aventi distanza 3 da r. (Ripetere per l'asse y).

5) Studiare la mutua posizione delle seguenti coppie di rette:

1. $r : x + y - 2 = 0$, $s : 2x - 1 = 0$,

2. $r : x + y - 2 = 0$, $s : 4x + 4y - 3 = 0$,

3. $r : 2x + ky + 1 = 0$, $s : x - y + 1 = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

6) Determinare gli angoli formati dalle seguenti coppie di rette:

1. $r : x + 3y - 1 = 0$, $s : 2x + y + 5 = 0$,

2. $r : x + y - 5 = 0$, $s : x = 1 - t, y = 2 + t$,

7) Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$:

1. di centro $A(2, 1)$ e raggio 2,

2. di centro $B(0, -2)$ e passante per $P(3, 1)$,

3. di centro $C(1, -3)$ e tangente ad $r : x - y + 3 = 0$,

4. di centro $E(1, 1)$, e secante la retta $s : x - y + 2 = 0$ in una corda di lunghezza 2.

8) Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$, tangente ad $r : x + y + 3 = 0$ in $A(1, -4)$ e passante per l'origine.

9) Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$, passante per $A(1, -1)$ $B(0, 2)$ e $D(-1, 3)$.

10) Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$, passante per $A(1, 2)$, $B(-1, -2)$ ed avente centro sulla retta $r : x = 2 + t, y = 1 - t$. Trovare poi la retta tangente a $\mathcal{C}$ in A, e le rette tangenti a $\mathcal{C}$ e passanti per il punto $D(10, 0)$.

11) Determinare le equazioni delle bisettrici delle rette

$$r : x - 1 = 0\,, \qquad s : x + 2y - 1 = 0\,.$$

(*Suggerimento*: si ricordi che se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ sono i vettori unitari associati alle rette, allora $\vec{r} + \vec{s}$ e $\vec{r} - \vec{s}$ danno le direzioni delle bisettrici.)

12) Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per l'origine O ed è tangente nel punto $P(1, 2)$ alla retta

$$r : \; x - y + 1 = 0\,.$$

CONICHE

Il piano euclideo ampliato

Su $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ (insieme delle terne non nulle di numeri reali), la relazione $\sim$ (*proporzionalità*), definita da

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$$
$$\iff \exists t \in \mathbb{R} - \{0\} : (y_1, y_2, y_3) = (tx_1, tx_2, tx_3)$$

è una rel. di equivalenza. L'insieme quoziente

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}}{\sim}$$

si chiama *piano proiettivo (numerico reale)*.

Sia $p : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni terna ordinata $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ associa la sua classe di equivalenza.

Sia $\sum$ l'insieme delle rette del piano euclideo Π. La relazione di *parallelismo* $\mathcal{P}$:

$$r\mathcal{P}s \iff r||s$$

è una relazione d'equivalenza su $\sum$. Rette parallele hanno la stessa direzione. L'insieme quoziente

$$i_\infty = \frac{\sum}{\mathcal{P}}$$

si chiama insieme delle *direzioni* del piano euclideo Π.

Definizione. Si chiama *piano euclideo ampliato* l'insieme $\bar{\Pi} = \Pi \cup i_\infty$, in cui si aggiungono ai punto del piano euclideo Π, le direzioni delle rette del piano stesso.

Il legame tra il piano proiettivo ed il piano euclideo ampliato con le direzioni, è chiarito dal seguente

Teorema. Esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e $\bar{\Pi} = \Pi \cup i_\infty$.

Dim. Sia $\mathcal{R}(O, x, y)$ un riferimento affine su Π. Si consideri l'applicazione:

$$k : \Pi \cup i_\infty \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),$$

definita da

$$\begin{array}{lll} \forall & P(x, y) \in \Pi : & k(P) = p(x, y, 1), \\ \forall & R_\infty \in i_\infty : & k(R_\infty) = p(b, -a, 0), \end{array}$$

dove $r : ax + by + c = 0$ è una retta che rappresenta la direzione R_∞ (NB: $l = b$ e $m = -a$ sono parametri direttori della retta r).

k è una corrispondenza biunivoca (ad ogni elemento in $\Pi \cup i_\infty$, k fa corrispondere uno ed un solo elemento di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e viceversa). $\square$

L'applicazione k si chiama *sistema di coordinate omogenee* associato al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$.

Se $P \in \Pi \cup i_\infty$ e $k(P) = p(x_1, x_2, x_3)$, la terna ordinata (x_1, x_2, x_3) si chiama *terna delle coordinate omogenee* di P; si osservi che (tx_1, tx_2, tx_3), per ogni $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, è ancora terna di coordinate omogenee di P.

Se P è un punto del piano euclideo Π, allora le sue coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) hanno $x_3 \neq 0$; le coordinate cartesiane di P sono $(x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3})$. Se P è una direzione, per le coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) di P si ha sempre $x_3 = 0$.

Le *rette* del piano euclideo ampliato $\bar{\Pi}$ sono i_∞ ed i sottoinsiemi del tipo $r \cup R_\infty$ (r = retta del piano euclideo, R_∞ direzione definita dalla retta r). La retta i_∞ si chiama *retta impropria*, una retta del tipo $r \cup R_\infty$ si chiama *retta propria* e si indica semplicemente con r.

Fissato su $\bar{\Pi}$ un sistema di coordinate omogenee:

$$k : \bar{\Pi} = \Pi \cup i_\infty \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

associato ad un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$,

- la retta impropria i_∞ è rappresentata dalla equazione $x_3 = 0$.

- La retta propria $r \cup R_\infty$, di equazione cartesiana $r : ax + by + c = 0$, è rappresentata dall'equazione lineare omogenea:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \qquad (a, b) \neq (0, 0).$$

Si osservi che $t(ax_1 + bx_2 + cx_3) = 0$, con $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, è ancora equazione in coordinate omogenee della retta r.

Vale perciò la seguente.

Proposizione. Rispetto ad un fissato sistema di coordinate omogenee, una retta del piano euclideo ampliato Π è il luogo dei punti P, le cui coordinate omogenee $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \neq (0, 0, 0)$ sono tutte e sole le soluzioni di un'equazione omogenea di primo grado:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Vale inoltre la seguente

Proposizione. Due rette distinte del piano euclideo ampliato hanno esattamente un punto in comune ("all'infinito" se le rette sono parallele, o una delle due è la retta impropria).

Complessificazione del piano euclideo ampliato.

Sia $\mathcal{R}(O,x,y)$ un riferimento affine sul piano euclideo Π. Il piano euclideo Π si dice *complessificato*, e si indica con $\Pi^{\mathbb{C}}$, quando il campo di variabilità delle coordinate cartesiane è il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

Un punto $P(x,y)$, con $x,y \in \mathbb{C}$, si dice *punto complesso*. Il *punto coniugato* di $P(x,y)$ è il punto $\bar{P}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$. I punti di Π, o *punti reali*, sono i punti per cui $P=\bar{P}$.

Una *retta complessa* è il luogo dei punti di $\Pi^{\mathbb{C}}$, le cui coordinate omogenee complesse sono le soluzioni (in $\mathbb{C}^2$) di un'equazione algebrica del tipo $ax+by+c=0$, con $a,b,c \in \mathbb{C}$ ed $(a,b) \neq (0,0)$.

Quando $a,b,c \in \mathbb{R}$, la retta si chiama *retta reale* di $\Pi^{\mathbb{C}}$.

Sia $r : ax+by+c=0$ una retta di $\Pi^{\mathbb{C}}$; la *retta complessa coniugata* di r è la retta $\bar{r}$ di $\Pi^{\mathbb{C}}$ di equazione $\bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c}=0$. Ovviamente, r è reale se e solo se $r=\bar{r}$, e quindi se $P \in r$ anche il complesso coniugato di P appartiene ad r.

Si osservi che $r \cap \bar{r} = \{1 \ punto\ reale\}$ oppure $= \emptyset$.

Anche $\Pi^{\mathbb{C}}$ si può ampliare con i punti impropri, considerando l'insieme $\sum^{\mathbb{C}}$ delle rette di $\Pi^{\mathbb{C}}$ con la relazione di parallelismo $\mathcal{P}$. L'insieme quoziente

$$i_\infty = \frac{\sum^{\mathbb{C}}}{\mathcal{P}}$$

si chiama *insieme delle direzioni* di $\Pi^{\mathbb{C}}$.

In modo analogo al caso reale si definisce il *piano proiettivo complesso*, considerando nell'insieme $\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$ la relazione di equivalenza $\sim$:

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$$
$$\iff \exists t \in \mathbb{C} - \{0\} : (y_1, y_2, y_3) = (tx_1, tx_2, tx_3).$$

L'insieme quoziente:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}}{\sim}$$

si chiama *piano numerico proiettivo complesso*.

Fissato sul piano euclideo Π un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$, l'applicazione

$$k : \overline{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

così definita: se $P(x,y) \in \Pi^{\mathbb{C}}$, si pone $k(P) = p(x, y, 1)$; se $R_\infty \in i_\infty$ è la direzione definita da una retta $r : ax+by+c = 0$, allora $k(R_\infty) = p(b, -a, 0)$; (detta *sistema di coordinate omogenee*) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ e $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

L'insieme $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ prende il nome di *estensione complessa del piano euclideo ampliato con i punti impropri*.

Analogamente al caso reale: le *rette* di $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ sono i_∞ ed i sottoinsiemi del tipo $r \cup R_\infty$, dove r è una retta di $\Pi^{\mathbb{C}}$ ed R_∞ il suo punto improprio.

Rispetto ad un sistema di coordinate omogenee k assegnato, le rette di $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_\infty$ sono rappresentate da equazioni lineari omogenee del tipo
$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

La retta impropria i_∞ ha equazione $x_3 = 0$.

I punti impropri $I_\infty(1, i, 0)$ e $J_\infty(1, -i, 0)$ sono detti *punti ciclici*. Una retta propria passante per un punto ciclico si chiama *retta isotropa*.

Fissato un punto proprio $P_0(x_0, y_0)$, vi sono due rette isotrope passanti per esso, di equazione

$$y - y_0 = \pm i(x - x_0).$$

Definizione e classificazione proiettiva

Si dice *conica* l'insieme $\mathcal{C}$ dei punti del piano $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}}$, le cui coordinate omogenee sono soluzioni di un'equazione omogenea di secondo grado, ossia del tipo:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 \\ &+2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \end{aligned}$$

dove a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ sono numeri reali non tutti nulli.

Posto $a_{ij} = a_{ji}$, per ogni $i, j = 1, 2, 3$, l'equazione si scrive nella forma compatta

$$\mathcal{C} : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0.$$

Posto $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$, si ottiene l'equazione di $\mathcal{C}$ in coordinate non omogenee:

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

detta *equazione cartesiana* di $\mathcal{C}$ rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ fissato. La matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

si chiama *matrice (dell'equazione) della conica* $\mathcal{C}$.

La conica $\mathcal{C} : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0$ si dice *generale* (o *non degenere*) se il polinomio che ne determina l'equazione è irriducibile (in $\mathbb{R}$), si dice *degenere* se tale polinomio è decomponibile nel prodotto di due polinomi di primo grado.
In particolare, $\mathcal{C}$ è *semplicemente degenere* se tali polinomi sono distinti, *doppiamente degenere* se tali polinomi coincidono.

La suddivisione delle coniche in generali, semplicemente degeneri e doppiamente degeneri costituisce la *classificazione proiettiva* delle coniche, in quanto tale classificazione è invariante per trasformazioni proiettive.

Esempi: $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$ è generale, $\mathcal{C}_2 : x^2 - 2xy = 0$ è semplicemente degenere, $\mathcal{C}_3 : x^2 + y^2 - 2xy = 0$ è doppiamente degenere.

Teorema: Se A è la matrice associata alla conica $\mathcal{C}$, allora:

- $\mathcal{C}$ è generale $\Leftrightarrow$ $rg(A) = 3$
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ non contiene rette,
- $\mathcal{C}$ è sempl. degenere $\Leftrightarrow$ $rg(A) = 2$
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ è formata da due rette distinte,
- $\mathcal{C}$ è dopp. degenere $\Leftrightarrow$ $rg(A) = 1$
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ è formata da due rette coincidenti.

Il rango di A è invariante per cambiamenti di riferimento (si dice pertanto che $rg(A)$ è un *invariante* della conica).

Classificazione affine. Invarianti.

Sia $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica *generale*. Rispetto a $\mathcal{C}$, una retta $r : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ del piano

è *secante* se $r \cap \mathcal{C} =$\{due punti reali e distinti\}.

è *tangente* se $r \cap \mathcal{C} =$\{due punti reali e coincidenti\}.

è *esterna* se $r \cap \mathcal{C}=$\{due punti compl. coniugati\}.

Consideriamo ora il caso in cui $r = i_\infty : x_3 = 0$ è la retta impropria. Allora, $r \cap \mathcal{C}$ corrisponde alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \end{cases}$$

Sia Δ il discriminante dell'equazione di II grado. Posto

$$D_{33} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\Delta,$$

D_{33} è un'invariante *affine* della conica (cioè, non dipende dal sistema di riferimento affine).

Definizione. Se $D_{33} > 0$ (i_∞ è esterna a $\mathcal{C}$), la conica $\mathcal{C}$ si chiama *ellisse; se $D_{33} < 0$ (i_∞ è secante $\mathcal{C}$), $\mathcal{C}$ si chiama* iperbole; se $D_{33} = 0$ (i_∞ è tangente a $\mathcal{C}$), $\mathcal{C}$ si chiama *parabola.*

La suddivisione delle coniche generali in ellissi, parabole ed iperboli, sulla base dei loro punti all'infinito, si chiama *classificazione affine*.

Una *circonferenza* è una ellisse con $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$.

Se $\mathcal{C}$ è un'iperbole, i suoi punti $R_\infty(l, m, 0)$, $S_\infty(l', m', 0)$ di intersezione con la retta impropria si dicono *direzioni asintotiche*.

Se il riferimento $\mathcal{R}(O, x, y)$ è ortonormale, allora

$$ll' + mm' = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_{11} + a_{22} = 0.$$

Quindi, le direzioni asintotiche dell'iperbole sono perpendicolari se e solo se $T := a_{11} + a_{22} = 0$. In questo caso, si dice che $\mathcal{C}$ è un' *iperbole equilatera*.

I tre numeri $rg(A)$ (inv. proiettivo), D_{33} (inv. affine) e T (inv. metrico) si dicono gli **invarianti della conica** $\mathcal{C}$.

Polarità definita da una conica

Sia $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale.
Due punti $P(x_1, x_2, x_3)$ e $Q(x'_1, x'_2, x'_3)$ del piano ampliato si dicono *coniugati rispetto a* $\mathcal{C}$ se le loro coordinate omogenee verificano la relazione

$$\sum a_{ij}x_ix'_j = 0.$$

Ovviamente, P è coniugato a Q se e solo se Q è coniugato a P. Inoltre, P è *autoconiugato* se e solo se $P \in \mathcal{C}$.

Fissato $P_0(x^o_1, x^o_2, x^o_3)$ un punto del piano, il luogo dei punti coniugati a P_0 ha equazione

$$\sum a_{ij}x^o_ix_j = 0,$$

ovvero:

$$\begin{pmatrix} x^o_1 & x^o_2 & x^o_3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

dove A è la matrice associata alla conica $\mathcal{C}$. *Tale equazione rappresenta sempre una retta*. Infatti, si ponga

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}x^o_1 + a_{12}x^o_2 + a_{13}x^o_3, \\ u_2 &= a_{12}x^o_1 + a_{22}x^o_2 + a_{23}x^o_3, \\ u_3 &= a_{13}x^o_1 + a_{23}x^o_2 + a_{33}x^o_3. \end{aligned}$$

Essendo $(x^o_1, x^o_2, x^o_3) \neq (0, 0, 0)$ e $rg(A) = 3$, si conclude facilmente che $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$.

La retta

$$p_{P_0} : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

si chiama *retta polare* di P_0 rispetto alla conica $\mathcal{C}$. P_0 si chiama *polo* della retta p_{P_0}.

Quando $P_0 \in \mathcal{C}$, la retta polare p_{P_0} coincide con la retta t, tangente in P_0 alla conica. Più precisamente:

$$P_0 \in \mathcal{C} \quad \Longleftrightarrow \quad p_{P_0} = t.$$

Valgono i seguenti importanti risultati.

Teorema. *L'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Pi}^{\mathbb{C}} & \to & \sum^{\mathbb{C}} \cup i_\infty \\ P & \mapsto & p_P \end{array}$$

è una corrispondenza biunivoca, detta **polarità definita dalla conica** *(generale) $\mathcal{C}$.*

Teorema di reciprocità. *Siano $\mathcal{C}$ una conica generale, P e Q due punti del piano, p_P e p_Q le rette polari di P e Q rispetto a $\mathcal{C}$. Allora:*

$$P \in p_Q \quad \Longleftrightarrow \quad Q \in p_P.$$

Dim. Sia $\mathcal{C} : a_{ij}x_ix_j = 0$ e siano $P(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ e $Q(y_1^o, y_2^o, y_3^o)$ due punti del piano. L'equazione della polare di Q è $\sum_i (\sum_j a_{ij} \overset{o}{y}_j) x_i = 0$. Pertanto:

$$\begin{aligned} P \in p_Q & \Longleftrightarrow \textstyle\sum_i (\sum_j a_{ij} y_j^o) x_i^o = 0 \\ & \Longleftrightarrow \textstyle\sum_j (\sum_i a_{ij} x_i^o) y_j^o = 0 \quad \Longleftrightarrow Q \in p_P \qquad \square \end{aligned}$$

Data una conica generale $\mathcal{C}$, un punto $P \notin \mathcal{C}$ del piano si dice

- *esterno* a $\mathcal{C}$ se le tangenti condotte da P alla conica sono reali e distinte;

- *interno* a $\mathcal{C}$ se le tangenti condotte da P alla conica sono complesse coniugate.

Per costruire la polare di un punto P rispetto ad una conica $\mathcal{C}$ si procede nel modo seguente.

-) Se P è esterno alla conica $\mathcal{C}$, si mandano da P le tangenti alla conica. Detti T_1 e T_2 i punti di contatto, la polare di P è la retta congiungente i punti T_1 e T_2.

-) Se P è interno alla conica, si considerano due rette distinte r ed s passanti per P. Si si costruisce il polo R della retta r ed il polo S della retta s, e la polare di P è la retta passante per i punti R ed S.

Centro di una conica.

Si chiama *centro* di una conica generale $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_i x_j = 0$, *il polo della retta impropria*.

La parabola, essendo tangente alla retta impropria, ha come centro un punto improprio, invece l'ellisse e l'iperbole hanno centro proprio. Per questo motivo, la parabola è detta conica *senza centro*, l'ellisse e l'iperbole *coniche a centro*.

Nel caso dell'ellisse o dell'iperbole, il centro si determina nel seguente modo: si considerano i punti impropri $X_\infty(1, 0, 0)$ dell'asse delle x e $Y_\infty(0, 1, 0)$ dell'asse delle y, del riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ prefissato, e si scrivono le equazioni delle rispettive polari:

$$\begin{cases} p_{X_\infty} : a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ p_{Y_\infty} : a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases}$$

Poichè $X_\infty \in i_\infty = p_C$ e $Y_\infty \in i_\infty = p_C$, per il teorema di reciprocità si ha che $C \in p_{X_\infty}$ e $C \in p_{Y_\infty}$, ossia $\{C\} = p_{X_\infty} \cap p_{Y_\infty}$. Quindi, *le coordinate di C sono la soluzione del precedente sistema*.

(Tale sistema è compatibile poiché, essendo $\mathcal{C}$ una ellisse o una iperbole, si ha $D_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$).

Diametri di una conica.

Si chiama *diametro* di una conica generale $\mathcal{C}$ ogni retta propria passante per il centro.

Da tale definizione, data una retta propria d, scaturisce subito che

d è diametro $\Leftrightarrow$ il polo di d è un punto improprio.

Dim. Se $d = p_Q$, allora:

$$\begin{aligned} C \in d = p_Q \quad &\Leftrightarrow \quad Q \in p_C = i_\infty \\ &\Leftrightarrow \quad Q \ \text{ è } \ \text{punto improprio.} \qquad \square \end{aligned}$$

Il polo di un diametro d, essendo un punto all'infinito, definisce una direzione, detta *direzione coniugata* a d.

In una parabola, poiché il centro è un punto improprio, tutti i diametri sono paralleli.

Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro. Se d e d' sono diametri coniugati rispetto a $\mathcal{C}$, allora ogni corda parallela a d è bisecata da d' (cioè incontra d' nel suo punto medio). In particolare, *il centro C di $\mathcal{C}$ è centro di simmetria della conica.*

Asintoti di un'iperbole.

Si chiamano *asintoti* di una iperbole $\mathcal{C}$ i diametri passanti per i punti impropri di $\mathcal{C}$.

Siano $\mathcal{C}$ un'iperbole, R_∞ ed S_∞ punti impropri di $\mathcal{C}$, r ed s due rette aventi direzioni rispettivamente R_∞ ed S_∞. Allora:

r ed s sono asintoti
$\Leftrightarrow$ r ed s sono tangenti a $\mathcal{C}$ nei suoi punti impropri.

Per determinare le *equazioni degli asintoti* di una iperbole $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$, si trovano prima i punti R_∞ ed S_∞ di intersezione della conica $\mathcal{C}$ con la retta impropria i_∞. Le loro coordinate sono soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Equivalentemente, i parametri direttori degli asintoti sono le soluzioni dell'equazione omogenea:

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0.$$

Esempio: Per l'iperbole $\mathcal{C} : x^2 - 4y^2 + x - y + 1 = 0$, tale equazione si scrive

$$l^2 - 4m^2 = 0,$$

le cui soluzioni $(-2, 1)$ e $(2, 1)$ sono i parametri direttori degli asintoti. Le coordinate del centro sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} p_{X_\infty} : x + \frac{1}{2} = 0, \\ p_{Y_\infty} : 4y + \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Quindi, il centro è $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$, e gli asintoti a_1 e a_2 hanno equazioni

$$a_1 : \frac{x+\frac{1}{2}}{-2} = \frac{y+\frac{1}{8}}{1}, \qquad a_2 : \frac{x+\frac{1}{2}}{2} = \frac{y+\frac{1}{8}}{1}.$$

Assi di una conica.

Fissato un riferimento <u>ortonormale</u> $\mathcal{R}(O, x, y)$, sia $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale.
Un diametro d di $\mathcal{C}$ si dice *asse* se è perpendicolare alla sua direzione coniugata. Si può provare che gli assi sono di una conica sono i suoi assi di simmetria.

Per determinare gli assi distinguiamo i seguenti casi:

Caso I: $\mathcal{C}$ è una ELLISSE o IPERBOLE.

Siano $d = p_{D'_\infty}$ e $d' = p_{D_\infty}$ due diametri coniugati di $\mathcal{C}$, con $D_\infty(l, m, 0)$ e $D'_\infty(l', m', 0)$ (esistono, perchè $\mathcal{C}$ è a centro). Essendo d e d' coniugati, risulta:

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + l'm) + a_{22}mm' = 0.$$

Ma d è asse se e solo se $D_\infty \perp D'_\infty$, ossia, $ll' + mm' = 0$.

Perciò, l'equazione precedente diventa:

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0.$$

Si osservi che essendo $\Delta = (a_{22}-a_{11})^2+4a_{12}^2 \geq 0$, tale equazione ammette soluzioni reali. quindi, *gli assi di una conica a centro sono rette reali.*

Si osservi che $\Delta = 0$ se e solo se $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$. In tal caso, l'equazione degli assi è identicamente soddisfatta, ossia, *ogni diametro è un asse*. In tal caso, $\mathcal{C}$ è una *circonferenza.*

Vale inoltre la seguente caratterizzazione: *$\mathcal{C}$ è una circonferenza se e solo se $\mathcal{C}$ passa per i punti ciclici.*

Se $\Delta > 0$ (quindi $\mathcal{C}$ è iperbole o ellisse, ma non circonferenza) allora $\mathcal{C}$ ha due assi reali e distinti, i cui parametri direttori sono le soluzioni dell'equazione precedente.

Esempio: trovare gli assi di

$$\mathcal{C} : x^2 - 4y^2 + x - y + 1 = 0.$$

La conica $\mathcal{C}$ ha centro $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$. L'equazione $a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0$ in questo caso diventa $(-4-1)lm = 0$, le cui soluzioni sono: $(\varrho, 0, 0)$ e $(0, \varrho, 0)$, con $\varrho \neq 0$. Posto $\varrho = 1$, si ha: $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Quindi, gli assi sono le rette di equazioni

$$x = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{1}{8},$$

cioè le rette per C e parallele rispettivamente all'asse delle y e all'asse delle x.

Caso II: $\mathcal{C}$ è una PARABOLA.

Per una parabola, tutti i diametri sono paralleli, ossia hanno la stessa direzione.
Sia D_∞ il punto improprio della parabola $\mathcal{C}$. Per definizione, l'*asse* di $\mathcal{C}$ è la polare del punto D'_∞ che definisce la *direzione ortogonale* a D_∞.

Esempio: Trovare l'asse della parabola

$$\mathcal{C} : x^2 - 2xy + y^2 - x = 0.$$

Il punto improprio D_∞ della parabola si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{C} : x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 = 0, \\ i_\infty : x_3 = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $D_\infty(1, 1, 0)$. Il punto improprio che definisce la direzione ortogonale a D_∞ è allora $D'_\infty(-1, 1, 0)$. Quindi, l'asse a di $\mathcal{C}$ è la polare di D'_∞, di equazione $4x_1 - 4x_2 - x_3 = 0$ (in coordinate non omogenee, $a : 4x - 4y - 1 = 0$).

Vertici di una conica.

Si chiama *vertice* di una conica generale $\mathcal{C}$ ogni punto *proprio e reale* V, di intersezione di $\mathcal{C}$ con un suo asse a.

In una parabola c'è un solo vertice. Nell'iperbole ce ne sono due e appartengono ad uno stesso asse. Nell'ellisse ci sono quattro vertici.

Siano $\mathcal{C}$ una conica generale, V un suo vertice e t la retta tangente in V a $\mathcal{C}$. Allora, t è perpendicolare all'asse passante per V.

Equazioni canoniche.

In un opportuno sistema di riferimento ortonormale, l'equazione di una conica generale si scrive in una forma particolarmente semplice. Distinguiamo i seguenti casi:

a) Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro, di equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

in un riferimento cartesiano $RC(O, x, y)$. Nel nuovo riferimento $RC'(O', x', y')$, tale che
a) $O' = C$ sia il centro di $\mathcal{C}$, e
b) gli assi del riferimento siano gli assi di $\mathcal{C}$,

l'equazione si riduce alla forma

$$Lx'^2 + My'^2 + N = 0.$$

Il modo più semplice per trovare i coefficienti L, M, N, consiste nell'usare gli invarianti della conica. Infatti, L, M, N possono determinarsi risolvendo il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} LMN = det(A), \\ LM = D_{33}, \\ L + M = T. \end{cases}$$

In base alle diverse possibilità per il segno di L, M, N, si può scrivere l'equazione canonica in uno dei seguenti modi standard:

I) $\dfrac{x'^{\,2}}{a^2}+\dfrac{y'^{\,2}}{b^2}=1$ (ellisse a punti reali);

II) $\dfrac{x'^{\,2}}{a^2}+\dfrac{y'^{\,2}}{b^2}=-1$ (ellisse a punti immaginari);

III) $\dfrac{x'^{\,2}}{a^2}-\dfrac{y'^{\,2}}{b^2}=\pm 1$ (iperbole).

b) Sia $\mathcal{C}$ una parabola. In un sistema di riferimento cartesiano $RC'(O',x',y')$, tale che
a) $O'=V$ sia il vertice di $\mathcal{C}$, e
b) gli assi del riferimento siano l'asse e la tangente nel vertice di $\mathcal{C}$,

l'equazione di $\mathcal{C}$ si riduce alla forma

$$\alpha y'^{\,2}+2\beta x'=0$$

da cui segue la scrittura standard

$$y'^{\,2}=2px',$$

dove $p=-2\beta/\alpha$. Usando gli invarianti della conica, i coefficienti α,β si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -\alpha\beta^2 = det(A), \\ (0 = D_{33}), \\ \alpha = T. \end{cases}$$

Fuochi di una conica. Eccentricità.

Siano $\mathcal{R}(O, x, y)$ un riferimento <u>ortonormale</u> e $\mathcal{C}$ una conica generale (a punti reali). Si chiama *fuoco* di $\mathcal{C}$ un punto *proprio e reale*, tale che le tangenti condotte da esso alla conica siano le rette isotrope.

Il centro di $\mathcal{C}$ è un fuoco se e solo se $\mathcal{C}$ è una circonferenza. (Una circonferenza ha un solo fuoco, che coincide con il centro.)

Una conica a punti reali, a centro e che non sia una circonferenza, ha due fuochi distinti, che appartengono ad uno stesso asse detto **asse focale**. *Una parabola ha un solo fuoco, che appartiene all'asse della parabola.*

Sia $\mathcal{C}$ una conica generale a punti reali. Si chiama *direttrice* della conica $\mathcal{C}$ una retta (propria e reale) *polare di un fuoco*.

Per ogni punto $P \in \mathcal{C}$, il rapporto delle distanze di P da un fuoco e dalla relativa direttrice è costante.

Il rapporto delle distanze di $P \in \mathcal{C}$ da un fuoco e dalla relativa direttrice si chiama *eccentricità* di $\mathcal{C}$, e si indica con e.

Si può dimostrare che: un'ellisse ha eccentricità $e < 1$; un'iperbole ha eccentricità $e > 1$; una parabola ha eccentricità $e = 1$.

Per un'ellisse, la somma delle distanze di un suo punto dai fuochi è costante, ed uguale alla misura dell'asse focale (lunghezza del segmento di estremi V_1, V_2, i vertici sull'asse contenente i fuochi).

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Per un'iperbole, il valore assoluto della differenza delle distanze di un punto dell'iperbole dai fuochi è uguale alla misura dell'asse focale:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

E' facile trovare i fuochi e l'eccentricità di una conica scritta in forma canonica.

Per l'**ELLISSE**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a \geq b > 0$, posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, i fuochi hanno coordinate $F(\pm c, 0)$, l'eccentricità è $e = \frac{c}{a} < 1$ e le direttrici sono le rette $x = \pm\frac{a}{e}$.

Per l'**IPERBOLE**: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > 0$ e $b > 0$, posto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, i fuochi hanno coordinate $F(\pm c, 0)$, l'eccentricità è $e = \frac{c}{a} > 1$ e le direttrici sono le rette $x = \pm\frac{a}{e}$.

Per la **PARABOLA**: $y^2 = 2px$, il fuoco ha coordinate $F(\frac{p}{2}, 0)$, l'eccentricità è $e = 1$ e la direttrice d è la retta $x + \frac{p}{2} = 0$.

Studio di una conica.

Sia fissato un sistema $RC(O,x,y)$. **Studiare** una assegnata conica $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_i x_j = 0$ vuol dire:

a) Classificarla dal punto di vista proiettivo ed affine.

b) Trovarne assi, centro, (eventuali) asintoti.

c) Trovarne l'equazione canonica.

d) Scrivere l'equazione canonica in modo standard, e trovare vertici, fuochi, eccentricità, direttrici.

Esercizi:

1) Studiare $\mathcal{C} : 3x^2 - 2xy - 2x + 2y + 3 = 0$.

2) Studiare $\mathcal{C} : 2x^2 + 4y^2 + 4xy + 6x + 1 = 0$.

3) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica
$\mathcal{C}_k : x^2 + y^2 + 2kxy + 2ky + 1 = 0$.

a) Classificare $\mathcal{C}_k$ dal punto di vista proiettivo e affine.
b) Per $k = 1$, studiare $\mathcal{C}_1$.

4) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica
$\mathcal{C}_k : x^2 + ky^2 + 4kxy + 2(k-1)y = 0$.

a) Classificare $\mathcal{C}_k$ dal punto di vista proiettivo e affine.
b) Per $k = 3$, studiare $\mathcal{C}_3$.

5) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica
$\mathcal{C}_k : 3x^2 - 2kxy - 2x + 2y + 3 = 0$.

a) Classificare $\mathcal{C}_k$ dal punto di vista proiettivo e affine.

b) Per $k = 1$, studiare $\mathcal{C}_1$.

Geometria analitica dello spazio

Un **riferimento ortonormale cartesiano** dello spazio è individuato da una base ortonormale positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ dei vettori dello spazio, e da un punto O scelto come origine del riferimento. Il riferimento si indica con $RC(O, x, y, z)$.

Sia P un punto dello spazio.

$$P(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Un riferimento $RC(O, x, y, z)$ permette quindi di stabilire *corrispondenze biunivoche* tra i punti di S_3, i vettori di $\mathbf{V}_3$ e le terne di $\mathbb{R}^3$.

Assi coordinati:

asse x: retta per O e parallela a $\vec{i}$. Ha equazioni $y = z = 0$.

asse y: retta per O e parallela a $\vec{j}$. Ha equazioni $x = z = 0$.

asse z: retta per O e parallela a $\vec{k}$. Ha equazioni $x = y = 0$.

Piani coordinati:

piano xy: piano degli assi x ed y. Ha equazione $z = 0$.

piano xz: piano degli assi x e z. Ha equazione $y = 0$.

piano yz: piano degli assi y e z. Ha equazione $x = 0$.

Dati due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dello spazio,

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

è il vettore posizione di P_2 rispetto a P_1. La *distanza* tra P_1 e P_2 è quindi data da:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \|\vec{P_1P_2}\| \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}$$

Il *punto medio* del segmento $\bar{P_1P_2}$ è il punto M di coordinate

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Piani.

Tre punti P_1, P_2, P_3 non allineati individuano un piano α dello spazio:

$$P \in \alpha \Leftrightarrow \vec{P_1P}, \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3} \quad \text{dipendenti.}$$

Posto $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $P(x, y, z)$, la dipendenza lineare si può esprimere in due modi:

a) Equazioni parametriche di un piano:

$$\vec{P_1P} = u\vec{P_1P_2} + v\vec{P_1P_3}, \qquad u, v \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + u(x_2 - x_1) + v(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + u(y_2 - y_1) + v(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + u(z_2 - z_1) + v(z_3 - z_1) \end{cases}$$

b) Equazione cartesiana di un piano:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante, si ha l'*equazione cartesiana del piano:*

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

I parametri (a, b, c) si chiamano *coefficienti di giacitura* del piano e rappresentano le coordinate di un vettore (non nullo) perpendicolare al piano. Infatti, considerando il vettore $\vec{n} = (a, b, c)$ uscente da $P_0 \in \alpha$, si ha

$$\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0 \qquad \forall P \in \alpha$$

da cui

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

che rappresenta il piano per P_0 con coefficienti di giacitura (a, b, c).

Esempio. Dati i punti $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(1, 1, 1)$, $P_3(1, 0, 1)$ troviamo le equazioni parametriche e cartesiana del piano. Si ha $\vec{P_1P_2} = (0, 1, 1)$, $\vec{P_1P_3} = (0, 0, 1)$, dunque

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = u \\ z = u + v \end{cases},$$

da cui l'equazione cartesiana $x = 1$.

Mutue posizioni di due piani.

Siano α ed α' due piani. Volendo studiare la loro mutua posizione, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Risulta

$$\text{sist. incomp.} \Leftrightarrow rg(A) \neq rg(\tilde{A}) \quad \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = \emptyset,$$
$$\text{sist. comp.} \Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A}) \quad \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' \neq \emptyset.$$

Inoltre

$$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni } \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = r,$$
$$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \infty^2 \text{ soluzioni } \qquad \Leftrightarrow \alpha \equiv \alpha',$$

dove r è una retta. Ponendo

$$\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = \emptyset \quad \text{oppure} \quad \alpha \equiv \alpha'$$

possiamo dire che

$$\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow (a, b, c) \sim (a', b', c'),$$

dove '$\sim$' sta per 'è proporzionale a'.

Esempi ed esercizi.

a) I piani $x - y + 2z = 1$ e $3x - 3y + 6z = 1$ sono paralleli; i piani $x - y + 2z = 1$ e $3x - 3y + 6z = 3$ sono paralleli e coincidenti.

b) Il piano perpendicolare al vettore $(1, -1, 2)$ e uscente dal punto $(3, -1, 5)$ è

$$1(x - 3) + (-1)(y + 1) + 2(z - 5) = 0.$$

Retta

Due punti $P_1 \neq P_2$ individuano una retta r:

$$P \in r \Leftrightarrow \vec{P_1P}, \vec{P_1P_2} \text{ dipendenti.}$$

La dipendenza lineare si può esprimere nei seguenti modi:

Equazioni cartesiane di una retta:

$$rg \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

che si può porre nella forma

$$r\colon \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

(*equazioni cartesiane della retta*). Quindi, r si può scrivere come intersezione di due piani

$$\alpha\colon ax+by+cz+d = 0, \qquad \alpha'\colon a'x+b'y+c'z+d' = 0,$$

e tali che

$$rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

N.B,: r non determina univocamente i piani α ed α': due altri piani *distinti* passanti per r (ce ne sono ∞^1) individuano la stessa retta.

Si chiamano *parametri direttori* di r le coordinate di un arbitrario vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$ parallelo ad r.
Se $P_1, P_2 \in r$ e $P_1 \neq P_2$, allora $\vec{v} = \vec{P_1P_2}$ è parallelo ad r e quindi parametri direttori di r sono

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$$

I parametri direttori (l, m, n) di una retta *sono individuati a meno di un fattore di proporzionalità*.

Equazioni parametriche di una retta.

$$p \in r \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \vec{PP_1} = t\vec{P_1P_2},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) = x_1 + lt \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) = y_1 + mt \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) = z_1 + nt \end{cases}$$

che sono dette *equazioni parametriche della retta*.

Eliminando t si riottengono le equazioni cartesiane.

Esempi ed esercizi.

1) Trovare i parametri direttori della retta

$$r\colon \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x+y+z+3=0 \end{cases}$$

$(\vec{v}=(-3,1,2))$.

2) Verificare che le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=2 \\ z=2-\frac{t}{2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x=11-4t' \\ y=2 \\ z=t' \end{cases},$$

rappresentano la stessa retta r, trovarne i parametri direttori e le equazioni cartesiane.

Mutua posizione retta-piano.

Ad un piano α associamo il vettore $\vec{n}=(a,b,c)$, perpendicolare ad α, di coordinate i parametri di giacitura; ad una retta r associamo il vettore $\vec{r}=(l,m,n)$, parallelo ad r, di coordinate i parametri direttori. Allora:

$$r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{r}\perp\vec{n} \Leftrightarrow al+bm+cn=0,$$

$$r \text{ incidente } \alpha \Leftrightarrow \neg(\vec{r}\perp\vec{n}) \Leftrightarrow al+bm+cn\neq 0.$$

In particolare,

$$r\perp\alpha \Leftrightarrow \vec{r}\parallel\vec{n}.$$

Mutua posizione di due rette.

Due rette dello spazio r ed r', di parametri direttori $\vec{r} = (l, m, n)$ ed $\vec{r'} = (l', m', n')$ rispettivamente, possono essere

$$\begin{cases} \text{complanari} : \begin{cases} r \parallel r' \Leftrightarrow (l, m, n) \sim (l', m', n') \\ \\ r \text{ incidente } r' \Leftrightarrow r \cap r' = P_0 \end{cases} \\ \\ \text{sghembe} : \ \text{non complanari.} \end{cases}$$

Caso particolare di incidenza:

$$r \perp r' \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{r'} \Rightarrow ll' + mm' + nn' = 0.$$

Rette sghembe.

Due rette r ed r' sono *sghembe* se non esiste alcun piano che le contiene.

Ricordiamo che, se $F, F' \subset \mathbf{V}_3$, la distanza tra F ed F' è

$$\text{dist}(F, F') = \inf\{\text{dist}(P, P');\ \ P \in F, P' \in F'\}.$$

Siano $\vec{r}$ ed $\vec{r'}$ i param. dir. delle rette sghembe r, r'. Esistono e sono univocamente determinati, $R \in r$ ed $R' \in r'$, tali che $\vec{RR'} \perp \vec{r}, \vec{r'}$, e vale: $\text{dist}(r, r') = \|\vec{RR'}\|$.

Esempio: Provare che sono sghembe le due rette

$r : x - z = y - z = 0,\ r' : x - 2z - 1 = y + z - 2 = 0.$

Angoli tra rette e piani. Siano r, r' due rette orientate e $\vec{r}$, $\vec{r'}$ due vettori concordemente orientati con r ed r'. Allora

$$\cos\widehat{rr'} = \cos\widehat{\vec{r}\vec{r'}} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} =$$

$$= \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}.$$

Se le due rette non sono orientate, l'angolo $\widehat{rr'}$ assume due valori, tra loro supplementari:

$$\cos\widehat{rr'} = \pm\frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} =$$

$$= \pm\frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}.$$

Analogamente, indicate con n ed n' le rette normali rispetto ad α ed α', si ha

$$\cos\widehat{\alpha\alpha'} = \cos\widehat{\vec{n}\vec{n'}} = \frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{\|\vec{n}\|\,\|\vec{n'}\|} =$$
$$= \pm\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}},$$

$$\sin\widehat{\alpha r} = |\cos\widehat{\vec{n}\vec{r}}| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{r}|}{\|\vec{n}\|\,\|\vec{r}\|} =$$
$$\frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Fasci di piani.

Siano α ed α' due piani. Se $\alpha \cap \alpha' = r$, si chiama *fascio di piani proprio* di asse r la totalità dei piani dello spazio passanti per r, che si dice *asse* del fascio proprio.
Se $\alpha \parallel \alpha'$, i piani dello spazio paralleli ad α (o ad α') formano il *fascio di piani improprio* individuato dalla giacitura di α (e di α').

Se $\alpha\colon ax+by+cz+d = 0$ e $\alpha'\colon a'x+b'y+c'z+d' = 0$ il fascio è rappresentato da

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

al variare dei parametri omogenei λ e μ, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Se $\lambda \neq 0$, ponendo $k = \mu/\lambda$, il fascio è rappresentato dall'equazione

$$ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

che evidenzia che i piani di un fascio sono ∞^1.

Nell'equazione precedente, al variare di k in $\mathbb{R}$, il piano α' non è rappresentato; esso si può pensare ottenuto per $k = \pm\infty$. Ciò porta ad ampliare $\mathbb{R}$ in modo spontaneo, aggiungendo <u>un solo</u> punto improprio (mentre in Analisi l'ampliamento è fatto con i due punti impropri $\pm\infty$).

Esempi ed esercizi.

1) Trovare il piano passante per $A(0,2,-1)$ e per la retta

$$r\colon \begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Poiché $A \notin r$, il piano è univocamente individuato. Si considera il fascio di piani di asse r e si impone il passaggio per A del generico piano.

Il piano generico $x+2y+z+k(x-z)=0$ passa per A se $k=-3$, quindi il piano cercato è $x-y-2z=0$.

2) Si risolva l'esercizio precedente considerando il piano pass. per A e per due punti scelti di r.

3) Scrivere il fascio di rette del piano $\alpha\colon 3x-y+5z+1=0$ di centro $P_0(0,1,0)\in\alpha$.

Sia r una retta per P_0 <u>non</u> contenuta in α; ad esempio:

$$r\colon \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

L'equazione $x+kz=0$, con $k\in\mathbb{R}$, rappresenta il fascio di piani di asse r e

$$\begin{cases} x+kz=0 \\ 3x-y+5z+1=0 \end{cases}$$

rappresenta il fascio di rette richiesto.

Distanze.

In generale, la distanza tra rette, tra rette e piani, e tra piani, è sempre riconducibile alla distanza tra punti.
La distanza di un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ da un piano $\pi : ax + by + cz + d = 0 = 0$ è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su π. In termini analitici,

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dati due punti $A(x_1, y_1, z_1) \neq B(x_2, y_2, z_2)$, il *piano assiale del segmento* AB è il luogo dei punti dello spazio, equidistanti da A e B. Ha equazione:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$
$$= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$$

La distanza di un punto: ax+by+cz+d=0=0 P da una retta r dello spazio, è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su r. Per determinare H, si trova il piano per P e $\perp r$, e lo si interseca con π. **N.B.:** NON esiste una formula analitica per la distanza punto-retta nello spazio.

Distanza di due rette $r \parallel r'$: è la distanza tra r ed un qualsiasi punto di r'.

Distanza di due piani $\pi \parallel \pi'$: è la distanza tra π ed un qualsiasi punto di π'.

Distanza tra una retta r ed un piano π parallelo ad r: è la distanza tra π ed un punto di r.

Sfere e circonferenze.

Chiamiamo *sfera* l'insieme dei punti P dello spazio tali che $\|\vec{CP}\| = R$, dove C è un punto fisso e $R > 0$. Se $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e $P(x, y, z)$, da $\|\vec{CP}\| = R$ si ha

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2,$$

(equazione cartesiana di una sfera), da cui,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0,$$

dove $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$. Viceversa, ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

rappresenta una sfera Σ di centro $(\alpha = -a, \beta = -b, \gamma = -c)$, e raggio $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Si ha:

$$\begin{array}{lr} a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 & \text{sfera ordinaria,} \\ a^2 + b^2 + c^2 - d = 0 & \text{sfera di raggio nullo,} \\ a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 & \text{sfera immaginaria.} \end{array}$$

Se π è un piano, $\Sigma \cap \pi$ dà una circonferenza.

Esempio:

Trovare la sfera che ha come punti diametralmente opposti $A(3, 0, 0)$ e $B(1, 1, 1)$.

Superfici e curve

Nello spazio un piano si rappresenta con un'equazione, una retta con due equazioni. Un'equazione, ponendo un vincolo tra le incognite, riduce di uno il grado di libertà. Quindi, il piano ha dimensione 2, mentre la retta ha dimensione 1.

Chiamiamo *superficie* Σ il luogo dei punti $P(x, y, z)$ dello spazio le cui coordinate verificano un'equazione del tipo

$$f(x, y, z) = 0,$$

che è detta *equazione cartesiana* di Σ.

Se f è un polinomio, la superficie si dirà *algebrica*: le superfici algebriche di grado 1 sono i piani, quelle di grado 2 si chiamano *quadriche*.

Una superficie si può rappresentare *parametricamente* tramite equazioni del tipo

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

dove $(u, v) \in A \subset \mathbb{R}^2$. Quindi, $P(u, v) \in \Sigma$ dipende da due parametri.

Un punto P descrive una *curva* γ dello spazio se esso dipende da un solo parametro:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad t \in I \subset \mathbb{R},$$

che rappresentano le *equazioni parametriche* di γ. Eliminando il parametro si perviene (spesso con difficoltà) alle equazioni cartesiane di $\gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, dove

$$\Sigma_1 \colon f_1(x, y, z) = 0, \qquad \Sigma_2 \colon f_2(x, y, z) = 0.$$

Esempio.

Se $\Sigma \colon f(x, y, z) = 0$ e $\Sigma' \colon g(x, y, z) = 0$ sono equazioni algebriche di primo grado, esse rappresentano dei piani. Se non sono paralleli tra loro, il loro sistema rappresenta la retta $r = \Sigma \cap \Sigma'$, che è dunque una particolare curva.

Curve piane e sghembe. Una curva γ dello spazio si dice *piana* se esiste un piano che la contiene, altrimenti si dice *sghemba*.

Esempio.

Data la curva

$$\gamma\colon x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1, \quad z = 2t,$$

dimostriamo che è piana. Bisogna vedere se esiste un piano

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

tale che $ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$ per ogni t. Ora,

$$a(t^2 - 1) + b(t^2 + 1) + 2tc + d = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a + b)t^2 + 2tc + d - a + b = 0,$$

che porta (per il principio di identità dei polinomi) al sistema omogeneo

$$a + b = 0, \quad 2c = 0, \quad d - a + b = 0,$$

che ha soluzioni $c = 0$, $a = -b$, $d = -2b$. Quindi γ è piana ed è contenuta nel piano $\alpha\colon x - y + 2 = 0$.

Esercizio.

Provare che la curva γ (elica cilindrica) di equazioni parametriche

$$\gamma : x = \cos(u), \quad y = \sin(u), \quad z = u$$

è sghemba.

Superfici rigate

Una *superficie rigata* è una superficie Σ costituita da rette, formata dall'insieme dei punti appartenenti a tutta le rette (dette *generatrici*) che passano per i punti di una assegnata curva γ (detta *direttrice*), secondo una direzione assegnata per ciascun punto di γ. Una tale superficie è quindi completamente determinata a partire dalle equazioni parametriche di γ

$$\gamma\colon \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \quad u \in I,$$

e dalle direzioni delle generatrici:

$$\vec{v}(u) = (l(u), m(u), n(u)), \quad u \in I.$$

La generica generatrice sarà individuata dalle equazioni

$$\frac{x - x(u)}{l(u)} = \frac{y - y(u)}{m(u)} = \frac{z - z(u)}{n(u)},$$

e quindi,

$$\begin{cases} x = x(u) + l(u)v, \\ y = y(u) + m(u)v, \\ z = z(u) + n(u)v. \end{cases}$$

Una superficie rigata è immediatamente riconoscibile come tale a partire dalle sue equazioni parametriche, per il fatto che la dipendenza da uno dei due parametri è **di tipo lineare**.

Coni e cilindri

Sia P un punto dello spazio ed α un piano. Proiettare P su α *da un fissato punto* V vuol dire considerare il punto $P' = VP \cap \alpha$.
Proiettare P su α *secondo una direzione data* $\vec{w}$ vuol dire considerare il punto $P' = s \cap \alpha$, dove s è la retta per P parallela a $\vec{w}$.

Se P descrive una curva γ, il punto P' descrive una curva $\gamma' \subset \alpha$, che è la *proiezione* di γ.

Si chiama *cono* la superficie $\mathcal{K}$ luogo delle rette (dette *generatrici* di $\mathcal{K}$) che proiettano da un punto V (*vertice*) una curva γ, detta *direttrice* del cono.

La curva γ', proiezione di γ su α da V, è data da $\gamma' = \mathcal{K} \cap \alpha$.

Si chiama *cilindro* la superficie Γ luogo delle rette (dette *generatrici* di Γ) incidenti una curva γ ed aventi la stessa direzione individuata da un vettore $\vec{w}$.

La curva γ', proiezione di γ su α parallelamente a $\vec{w}$, è data da $\gamma' = \Gamma \cap \alpha$.

Troviamo ora le equazioni parametriche di un cono e di un cilindro. Sia

$$\gamma\colon \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Se $V(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{w}(l, m, n)$, allora

$$\mathcal{K}\colon \begin{cases} x = x_0 + v(x(u) - x_0) \\ y = y_0 + v(y(u) - y_0) \\ z = z_0 + v(z(u) - z_0), \end{cases}$$

$$\Gamma\colon \begin{cases} x = x(u) + lv \\ y = y(u) + mv \\ z = z(u) + nv. \end{cases}$$

Esempi ed esercizi.

1) Scrivere l'equazione del cilindro avente generatrici di direzione $\vec{w}(1, 1, 1)$ e passante per la curva

$$\gamma\colon \quad x = t^3, \quad y = t^3 - t, \quad z = t^2.$$

La generica generatrice ha equazioni

$$\frac{x - t^3}{1} = \frac{y - t^3 + t}{1} = \frac{z - t^2}{1} = h,$$

quindi equazioni parametriche del cilindro sono

$$\Gamma\colon \quad x = t^3 + h, \quad y = t^3 - t + h, \quad z = t^2 + h.$$

Per ottenere l'equazione cartesiana, basta eliminare i parametri t ed h

$$\Gamma\colon \quad (x - y)^3 - (x - y)^2 + z - x = 0.$$

2) Per proiettare la curva γ dell'esempio precedente sul piano yz parallelamente alla direzione individuata da $\vec{w}$, si pone $x = 0$ nelle equazioni parametriche, si ha $h = -t^3$ e quindi

$$\gamma'\colon \quad x = 0, \quad y = -t, \quad z = t^2 - t^3,$$

oppure in forma cartesiana

$$\gamma'\colon \quad x = 0, \quad z = y^2 + y^3.$$

3) Proiettare la stessa curva γ nel piano $x = y + 1$ dal punto $V(1, 1, 1)$. Si ha:

$$\mathcal{K} : \begin{cases} x = 1 + v(t^3 - 1), \\ y = 1 + v(t^3 - t - 1), \\ z = 1 + v(t^2 - 1) \end{cases} \quad \gamma' : \begin{cases} x = 1 + t^2 - \frac{1}{t}, \\ y = t^2 - \frac{1}{t}, \\ z = 1 + t - \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Superfici di rotazione

Si chiama *superficie di rotazione* la superficie generata dalla rotazione di una curva γ intorno ad una retta a, che prende il nome di *asse* della superficie.

L'asse a può essere assegnato mediante un suo punto $A(x_0, y_0, z_0)$ e i parametri direttori (l, m, n), la curva γ mediante equazioni parametriche

$$\gamma\colon \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Il generico punto $P \in \gamma$, quando γ ruota intorno ad a, descrive una circonferenza, detta *parallelo*,

$$\mathcal{P} = \tau \cap S,$$

dove τ è il piano per P e perpendicolare ad a ed S la sfera di centro A e raggio $\|\vec{AP}\|$

$$\begin{aligned} &\tau\colon l(x - x(u)) + m(y - y(u)) + n(z - z(u)) = 0, \\ &S\colon (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \\ &\qquad = (x(u) - x_0)^2 + (y(u) - y_0)^2 + (z(u) - z_0)^2. \end{aligned}$$

Se a coincide con l'asse z, le precedenti equazioni si semplificano notevolmente perché $(l, m, n) \sim (0, 0, 1)$ e si può prendere $A(0, 0, 0)$.

Esempio. Trovare la superficie Σ generata dalla rotazione intorno all'asse z della retta

$$r\colon \quad x = 1, \quad y = 2z.$$

Equazioni parametriche di r sono

$$x = 1, \quad y = 2u, \quad z = u.$$

Quindi, posto $A(0,0,0)$ e $(l,m,n) \sim (0,0,1)$,

$$\begin{aligned} \tau\colon &\quad z = u, \\ S\colon &\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1^2 + (2u)^2 + (u)^2, \end{aligned}$$

cioè

$$\mathcal{P}\colon \begin{cases} z = u, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 5u^2 \end{cases}$$

ed eliminando il parametro

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$$

che è una superficie algebrica di ordine 2, vale a dire una *quadrica*.

Coordinate cilindriche. Siano α un piano ed r una retta perpendicolare ad α (detta *asse delle quote*). Posto $O = \alpha \cap r$, consideriamo nel piano α un riferimento polare (ρ, φ) e nella retta r un riferimento cartesiano.

Se P è un punto dello spazio, consideriamo P', la sua proiezione ortogonale su α, e P'', proiezione ortogonale di P su r. Denotiamo (ρ, φ) le coordinate polari di P' in α ed h la coordinata di P'' su r. I tre numeri (ρ, φ, h), associati a P, si chiamano *coordinate cilindriche* di P.
Fuori dall'asse z, la corrispondenza tra il punto e le sue coordinate cilindriche è biunivoca.
Per $\rho = cost.$ si ottiene un cilindro rotondo intorno all'asse r di raggio c.

Spesso ad un riferimento cilindrico si fa corrispondere un riferimento cartesiano $RC(Oxyz)$ tale che r coincida con l'asse z, il semiasse positivo delle x con l'asse polare nel piano α. Allora

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi & 0 \le \varphi < 2\pi \\ y = \rho \sin \varphi & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ z = h & h \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Coordinate sferiche. Fissiamo nello spazio un riferimento polare costituito da:

un punto O detto *polo*;

una retta orientata r per O detta *asse polare*;

un semipiano α di origine r detto *senipiano polare*;

un'unità di misura per le lunghezze ed un verso positivo per le rotazioni intorno all'asse polare.

Poniamo

$\rho = \|\vec{OP}\|$ raggio vettore,

$\varphi = \widehat{\alpha\beta}$ longitudine, dove β è il piano per r e P, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$\theta = \widehat{\vec{OP}\vec{r}}$ colatitudine, $0 \leq \theta \leq \pi$ ($\psi = \pi/2 - \theta$ latitudine).

I tre numeri (ρ, φ, θ) sono detti *coordinate sferiche*. Al riferimento polare si può associare un riferimento $RC(Oxyz)$ tale che O coincida con il polo, z coincida con l'asse polare, il semiasse positivo delle x appartenga al semipiano polare e coincidano le unità di misura per i segmenti. Allora

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ z = \rho \cos\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Le coordinate si dicono *sferiche* poiché, per $\rho =$ cost, si ottengono sfere concentriche. Pertanto, per $\rho = R$, le equazioni precedenti sono equazioni parametriche della sfera di centro O e raggio R; le coordinate (φ, θ) sono *coordinate geografiche* sulla sfera.

Esercizi di riepilogo.

1) Determinare le equazioni delle bisettrici delle rette

$$r : x - 1 = y - z = 0 \,, \qquad s : y = 1 = z \,.$$

Suggerimento: si ricordi che se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ sono i *versori* associati alle rette, allora $\vec{r} + \vec{s}$ e $\vec{r} - \vec{s}$ danno le direzioni delle bisettrici.

2) Si consideri il piano α contenente il triangolo T di vertici

$$A(1,0,0), \quad B(0,\sqrt{2},1), \quad C(-1,1/\sqrt{2},1)\,.$$

1. Determinare l'angolo ϕ ($0 \le \phi \le \pi/2$) tra il piano α e il piano coordinato xy.

2. Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A e B.

3. Trovare i parametri direttori di r e quelli di giacitura di α.

4. Determinare il piano ortogonale ad $\vec{AB}$ e passante per il punto medio H di AB.