Lezione 10

Postulati

della Meccanica Quantistica

Postulato 1

Principio di sovrapposizione

- Lo stato di un sistema quantistico, in un determinato istante di tempo, è descritto da un vettore $|\psi\rangle$, di uno spazio di Hilbert.

- Q è una grandezza fisica che vale q_1 quando il sistema è nello stato $|\psi_1\rangle$ e q_2 quando il sistema è nello stato $|\psi_2\rangle$. Ipotizziamo, al momento $q_1 \neq q_2$. Se, quando il sistema è nello stato $|\psi\rangle$, Q può assumere il valore q_1 o q_2, allora $|\psi\rangle$ si esprime come come combinazione lineare di $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$.
Generalizzazione a tutti i possibili valori che Q può assumere.

- In meccanica classica lo stato è determinato conoscendo le $2s$ variabili composte da coordinate ed impulsi generalizzati q_j e p_j. Numeri reali. - In Fisica classica il principio di sovrapposizione genera valori intermedi. Ad esempio per il campo elettrico, vettoriale, $\mathbf{E}$ si ha che

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_1}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E_2}(\mathbf{r},t)$$

e il valore del modulo è

$$|\mathbf{E_1}(\mathbf{r},t) - \mathbf{E_2}(\mathbf{r},t)| \leq |\mathbf{E}(\mathbf{r},t)| \leq \mathbf{E_1}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E_2}(\mathbf{r},t)$$

In Meccanica Quantistica si ha sempre solo il valore q_1 oppure q_2 con appropriata probabilità, ma non si hanno mai valori intermedi di Q.

-Non tutte le grandezze fisiche che caratterizzano il sistema sono contemporaneamente conoscibili con incertezza arbritraria.
Esempio posizione ed impulso.
Misure ideali.

Postulato 2

Postulato sugli osservabili

- Le grandezze che caratterizzano un sistema fisico (osservabili) sono descritte da operatori hermitiani che operano su stati nello spazio di Hilbert. I possibili risultati della misura di un osservabile sono i suoi autovalori.

- Alcuni osservabili hanno solo valori continui $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ altri solo discreti (momento angolare), altri misti (energia).

Postulato 3

Postulato sugli autovettori

- Gli autovettori di un operatore hermitiano Q, relativo alla grandezza fisica q, corrispondono a stati fisici in cui Q ha un valore definito coincidente con l'autovalore corrispondente.

- Può presentarsi il caso che lo stesso autovettore $|\lambda\rangle$ sia autovettore di più di un'osservabile, autovalori λ per una e ω per l'altra. Le due quantità osservabili devono essere compatibili.
Momento angolare, energia. $|\lambda, \omega\rangle$.

- Se $|\lambda\rangle$ è autostato di una o più osservabili, allora $c\,|\lambda\rangle$ con $c \in \mathbb{C}$ è ancora autostato delle stesse osservabili.

- $|\psi\rangle$ è definito a meno di una costante.
Normalizzazione da definire.
$|\psi\rangle$ e $e^{i\phi}\,|\psi\rangle$ hanno la stessa norma, quindi rappresentano lo stesso stato.

- Se $|\psi\rangle$ è un generico vettore dello spazio di Hilbert, una misura di Q produce un insieme di autovalori q_n e autovettori collegati $|q_n\rangle$.
Esistono degli scalari c_n tali che

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n \, |q_n\rangle$$

(principio di sovrapposizione).
Poiché i $|q_n\rangle$ sono ortogonali posso definire la norma in modo che

$$\langle q_n | q_m \rangle = \delta_{mn}$$

$\left\{ \, |q_n\rangle \, \right\}$ deve essere un insieme completo.

Degenerazione

$|q_n;\alpha\rangle$ dove α è un indice s volte degenere. Questi autostati formano una base ortonormale nel sottospazio s.

$$|q_n\rangle = \sum_{\alpha=1}^{s} d_{n,\alpha}\,|q_n, s_\alpha\rangle$$

$$|\psi\rangle = \sum_{n,\alpha} a_{n,\alpha}\,|q_n, s_\alpha\rangle$$

n e α indicano i numeri quantici che caratterizzano lo stato.

- Continuo

$$|\psi\rangle = \sum_{n,\alpha} a_{n,\alpha}\,|q_n, s_\alpha\rangle + \int d\lambda c_\lambda\,|\lambda\rangle$$

I coefficienti

$$\langle q_m, s_\beta|\psi\rangle = \sum_{n,\alpha} a_{n,\alpha} \langle q_m, s_\beta|q_n, s_\alpha\rangle = \sum_{n,\alpha} a_{n,\alpha}\delta_{m,n}\delta_{\beta,\alpha} = a_{m,\beta}$$

$$|\psi\rangle = \sum_{n,\alpha} \langle q_n, s_\alpha|\psi\rangle |q_n, s_\alpha\rangle = \sum_{n,\alpha} |q_n, s_\alpha\rangle \langle q_n, s_\alpha|\psi\rangle$$

$$\sum_{n,\alpha} |q_n, s_\alpha\rangle \langle q_n, s_\alpha| = I$$

$f(Q)$ funzione di Q

$$f(Q) = \sum_{n,\alpha} f(q_n) |q_n, s_\alpha\rangle \langle q_n, s_\alpha|$$

Rappresentazione spettrale.

Generalizzazione al continuo.

Postulato 4

Riduzione del vettore di stato

Se il sistema si trova nello stato descritto da $|\psi\rangle$ e si effettua la misura sull'osservabile Q, si ottiene l'autovalore q_k con probabilità

$$\mathcal{P}(q_k) = \sum_{\alpha} |\langle q_k, s_\alpha|\psi\rangle|^2$$

dove $|q_k, s_\alpha\rangle$ sono autovettori di Q con autovalore q_k normalizzati a 1 $(\langle q_k, s_\alpha|q_j s_\beta\rangle = \delta_{k,j}\delta_{\alpha,\beta})$ e degeneri nell'osservabile s.

Subito dopo la misura il sistema di trova in uno degli stati $|q_k, s_\alpha\rangle$

- Togliendo la degenerazione ho che

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |q_k\rangle \longrightarrow c_k = \langle q_k|\psi\rangle$$

Ampiezza di probabilità di trovare q_k nella misura di Q, se il sistema si trova in $|\psi\rangle$.

Continuo

$$|\psi\rangle = \int d\lambda\, c(\lambda)\, |\lambda\rangle \quad ; \quad \langle\lambda'|\psi\rangle = \int d\lambda\, c(\lambda)\, \langle\lambda'|\lambda\rangle$$

$$\langle\lambda'|\lambda\rangle = \delta(\lambda' - \lambda)$$

Distribuzione delta di Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' f(\lambda')\delta(\lambda - \lambda') = f(\lambda)$$

Fisica Classica

N repliche dello stato ($N \to \infty$).

Misuriamo q_1 con frequenza f_1, q_2 con frequenza f_2, ecc.

Già prima della misura lo stato conteneva q_1 con frazione f_1, ecc.

Meccanica Quantistica

Lo stato $|\psi\rangle$ è descritto da $\sum_k c_k |q_k\rangle$ le cui frequenze sono $f_k = |c_k|^2$.

Si può preparare lo stato effettuando una misura di Q e selezionando solo quegli eventi che hanno un autovalore specifico q_1 (ad esempio l'energia).

Dalla definzione di probabilità, passando dalle frequenze alle probabilità abbiamo

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_k \mathcal{P}(q_k) = \sum_k |c_k|^2 = \sum_k |\langle q_k|\psi\rangle|^2 \\ &= \sum_k \langle\psi|q_k\rangle \langle q_k|\psi\rangle = \langle\psi| \left(\sum_k |q_k\rangle \langle q_k| \right) |\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle \end{aligned}$$

La normalizzazione a 1 è conseguenza del postulato.

Dopo la misura $|\psi\rangle \longrightarrow |q_k\rangle$
Riduzione del vettore di stato.
Collasso del vettore di stato, funzione d'onda.

Ripetendo la misura prima che il sistema interagisca il risultato non cambia.

Definiamo l'operatore di proiezione $\mathtt{P}_{q_k} = |q_k\rangle\langle q_k|$

$$|\psi\rangle \to \frac{\mathtt{P}_{q_k}|\psi\rangle}{\sqrt{\mathtt{P}_{q_k}\langle\psi|\psi\rangle\,\mathtt{P}_{q_k}}} = \frac{\langle q_k|\psi\rangle\,|q_k\rangle}{\left[\langle q_k|\psi\rangle^2\right]^{1/2}} = |q_k\rangle$$

Degenerazione

Operatore di proiezione

$$\mathtt{P}_{q_k} = \sum_{\alpha} |q_k, s_\alpha\rangle \langle q_k, s_\alpha|$$

$$|\psi\rangle = \sum_k \mathtt{P}_{q_k} |\psi\rangle = \sum_{k,\alpha} |q_k, s_\alpha\rangle \langle q_k, s_\alpha|$$

Probabilità che la misura fornisca q_k

$$\mathcal{P}(q_k) = \sum_{\alpha} |\langle q_k, s_\alpha|\psi\rangle|^2$$

Valore di aspettazione

$$\langle Q \rangle = \langle \psi | Q | \psi \rangle$$

Effettuando tante misure si ottiene questo valore per l'ossevabile Q.
Le misure fatte ottengono q_k con frequenza f_k.
Definizione di valor medio

$$\begin{aligned}
\langle Q \rangle &= \sum_k q_k f_k = \sum_k q_k \mathcal{P}(q_k) = \sum_k q_k |c_k|^2 \\
&= \sum_k q_k \langle \psi | q_k \rangle \langle q_k | \psi \rangle = \sum_k \langle \psi | Q | q_k \rangle \langle q_k | \psi \rangle = \langle \psi | Q \sum_k | q_k \rangle \langle q_k | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | Q | \psi \rangle
\end{aligned}$$

Osservabili compatibili

Definizione
Due grandezze fisiche sono *compatibili* se possono essere misurate simultaneamente con precisione arbitraria.

Dopo questa misura, le osservabili Ω e Λ hanno un valore determinato.
$|\psi\rangle$ può essere scritto come combinazione lineare di autostati di Ω e Λ, che formano una base.

Due osservabili sono compatibili se ammettono un sistema completo di autostati comuni.

Il prodotto di due operatori Ω e Λ, che descrivono due osservabili compatibili, è un operatore i cui autostati sono autostati di Ω e Λ.

$$\begin{aligned} O\,|\psi\rangle &= (\Omega\Lambda)\,|\psi\rangle = (\Omega\Lambda)\sum_{k,j} a_{k,j}\,|\omega_k,\lambda_j\rangle \\ &= \Omega\sum_{k,j} a_{k,j}\lambda_j\,|\omega_k,\lambda_j\rangle = \sum_{k,j} a_{k,j}\omega_k\lambda_j\,|\omega_k,\lambda_j\rangle \end{aligned}$$

$a_{k,j}\omega_k\lambda_j$ è un numero.

Per due operatori **NON** compatibili questo non è vero.

Teorema
Se Ω e Λ rappresentano due osservabili compatibili allora gli operatori che li descrivono commutano $\Omega\Lambda = \Lambda\Omega$.

$$\Omega\Lambda\,|\omega_k,\lambda_j\rangle = \Omega\lambda_j\,|\omega_k,\lambda_j\rangle = \omega_k\lambda_j\,|\omega_k,\lambda_j\rangle$$
$$\Lambda\Omega\,|\omega_k,\lambda_j\rangle = \Lambda\omega_k\,|\omega_k,\lambda_j\rangle = \omega_k\Lambda\,|\omega_k,\lambda_j\rangle = \omega_k\lambda_j\,|\omega_k,\lambda_j\rangle$$

Si dimostra anche che se commutano sono compatibili.

- Un sistema può essere caratterizzato dagli autovettori di Ω che sono degeneri se esiste, almeno, un'altra variabile Λ compatibile.

Un sistema completo di variabili compatibili comprende tutte le grandezze funzionalmente indipendenti. Non ne esistono altre indipendenti ed incompatibili.
Osservazione massima.
(Esempio: energia, momento angolare, parità)

Prodotto Tensoriale

Un sistema fisico Σ è descritto da due insiemi di osservabili compatibili. Tutti gli operatori commutano.

$$\{A\} \equiv \{A_1, A_2, \cdots\} \quad ; \quad \{B\} \equiv \{B_1, B_2, \cdots\}$$

Ad esempio separazione fisica di due sistemi. (due particelle non interagenti).
L'insieme composto dall'unione dei due insiemi $\{A\}$ e $\{B\}$ costituisce un insieme completo di osservabili compatibili.

Lo spazio di Hilbert V del sistema Σ è caratterizzato da vettori descrivibili come

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} \, |a_\alpha, b_\beta\rangle$$

Posso considerare separatamente i sottospazi V_A e V_B. I vettori di V_A sono

$$|\psi_A\rangle = \sum_\alpha c_\alpha |a_\alpha\rangle$$

quelli di V_B

$$|\psi_B\rangle = \sum_\beta c_\beta |b_\beta\rangle$$

Prodotto tensoriale

$$|a_\alpha, b_\beta\rangle = |a_\alpha\rangle |b_\beta\rangle = |a_\alpha\rangle \otimes |b_\beta\rangle$$

$\langle a|b\rangle$ scalare, $|a\rangle \langle b|$ operatore, $|a_\alpha\rangle \otimes |b_\beta\rangle \in V = V_A \otimes V_B$ tensore.

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}\,|a_\alpha, b_\beta\rangle \longrightarrow \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}\,|a_\alpha\rangle\,|b_\beta\rangle$$

L'ultimo passaggio non è, in generale, valido.
In V ci sono vettori $|\psi_{AB}\rangle$ che non possono essere espressi come prodotto tensoriale di autostati di A e B. Ad esempio se descrivono una situazione di interazione tra A e B.

Se un operatore è separabile è valido

$$O_{AB} = O_A + O_B$$

$$O_A\,|\psi_A\rangle = A\,|\psi_A\rangle \quad ; \quad O_B\,|\psi_B\rangle = B\,|\psi_B\rangle$$

$$O_{AB}\,|\psi_{AB}\rangle = (O_A + O_B)\,|\psi_A\rangle\,|\psi_B\rangle = (A+B)\,|\psi_A\rangle\,|\psi_B\rangle$$

Operatore posizione

- Consideriamo un sistema a una dimensione x
- Continuo $x \in \mathbb{R}$
- Spazio di Hilbert di funzioni d'onda $\psi(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- Normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\psi(x) = 1$$

Operatore $\mathcal{X}\psi(x) = x\psi(x)$ $|x\rangle$ autoket di $\mathcal{X}$

$$\mathcal{X}\,|x\rangle = x\,|x\rangle \quad ; \quad \langle x|\psi\rangle = \psi(x)$$

$$\langle x|\mathcal{X}|\psi\rangle = x\psi(x) \quad \longleftrightarrow \quad \langle x|\,\mathcal{X} = \langle x|\,x$$

Postulato 5

Ipotesi sulla compatibilità delle coordinate

Le componenti delle posizioni sono grandezze fisiche compatibili.

$$\left[\mathcal{X}_j, \mathcal{X}_k\right] = 0$$

Per A particelle si ha che $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_A)$

$$\langle \Psi_\alpha | \Psi_\beta \rangle = \int_{\mathbb{R}} d\mathbf{r}_1 \, d\mathbf{r}_2 \cdots \mathbf{r}_A \Psi^*_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_A) \Psi_\beta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_A)$$

Significato di funzione d'onda nella rappresentazione dei ket.

- Sistema caratterizzato da $\Omega_1 \cdots \Omega_n$ osservabili compatibili.

Gli autostati di questi operatori formano una base:

$$\sum_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n} |\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\rangle \langle\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n| = 1$$

$$\langle\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n|\omega_1', \omega_2', \cdots, \omega_n'\rangle = \delta_{\omega_1,\omega_1'}\delta_{\omega_2,\omega_2'} \cdots \delta_{\omega_n,\omega_n'}$$

con ovvia estensione al continuo.

Ogni vettore $|\psi\rangle$ dello spazio di Hilbert può essere espresso in maniera univoca come

$$|\psi\rangle = \sum_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n} |\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\rangle \langle\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n|\psi\rangle$$

Da cui

$$\langle\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n|\psi\rangle = \psi(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$$

è la funzione d'onda espressa nelle variabili ω.

L'insieme delle componenti di $|\psi\rangle$ lungo ∞^n assi dello spazio di Hilbert.

La scelta delle variabili compatibili può non essere univoca.
Ad esempio $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$. Consideriamo gli osservabili Λ e Ω con

$$[\Lambda, \Omega] \neq 0 \longrightarrow \phi(\omega) = \langle\omega|\psi\rangle \quad \xi(\lambda) = \langle\lambda|\psi\rangle$$

due diverse funzioni d'onda in rappresentazione ω e λ.
Come passare da una rappresentazione all'altra

$$\begin{aligned}
\phi(\omega) &= \langle\omega| \left(\sum_\lambda |\lambda\rangle \langle\lambda|\right) |\psi\rangle = \sum_\lambda \langle\omega|\lambda\rangle\, \xi(\lambda) \\
\xi(\lambda) &= \langle\lambda| \left(\sum_\omega |\omega\rangle \langle\omega|\right) |\psi\rangle = \sum_\omega \langle\omega|\lambda\rangle^* \,\phi(\omega)
\end{aligned}$$

Per $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$ questo corrisponde a trasformata ed antitrasformata di Fourier.

È possibile usare una rappesentazione matriciale.
Ω ha solo uno spettro discreto $\psi_i = \langle \omega_i | \psi \rangle$.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

i ket della base sono

$$(\omega_k)_i = \langle \omega_i | \omega_k \rangle = \delta_{i,k} \;\; ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \Lambda\,|\chi\rangle \quad ; \quad \langle\omega_k|\psi\rangle = \langle\omega_k|\Lambda\sum_i |\omega_i\rangle\,\langle\omega_i|\chi\rangle \equiv \psi_k$$

$$\psi_k = \sum_i \Lambda_{k,i}\,\langle\omega_i|\chi\rangle \equiv \sum_i \Lambda_{k,i}\chi_i \quad ; \quad \langle\omega_k|\Lambda|\omega_i\rangle = \Lambda_{k,i}$$

elemento di matrice.

- Matrice prodotto data dal prodotto delle matrici.

$$(AB)_{m,n} = \langle\omega_m|AB|\omega_n\rangle = \langle\omega_m|A\sum_k |\omega_k\rangle\,\langle\omega_k|B|\omega_n\rangle = \sum_k A_{m,k}B_{k,n}$$

$$\Lambda\,|\lambda\rangle = \lambda_n\,|\lambda\rangle \quad ; \quad \langle\omega_n|\Lambda|\lambda\rangle = \lambda\,\langle\omega_n|\lambda\rangle$$

$$\langle\omega_n|\Lambda|\lambda\rangle = \langle\omega_n|\Lambda\sum_k |\omega_k\rangle\,\langle\omega_k|\lambda\rangle = \sum_k \delta_{n,k}\lambda_{n,k}\,\langle\omega_k|\lambda\rangle$$

In caso di spettro continuo $\delta_{n,k} \to \delta(n-k)$.

Nel caso di due rappresentazioni con osservabili Λ e Ω non compatibili $[\Lambda, \Omega] \neq 0$ e $\psi_n = \langle \omega_n | \psi \rangle$ e $\phi_n = \langle \lambda_n | \psi \rangle$
Passaggio da una rappresentazione all'altra con una matrice unitaria.

$$\sum_k |\lambda_k\rangle \langle \omega_k | \omega_n \rangle = \sum_k |\lambda_k\rangle \, \delta_{n,k} = |\lambda_n\rangle \quad ; \quad \sum_k |\lambda_k\rangle \langle \omega_k | = \mathcal{U}$$

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^+ = \sum_k |\lambda_k\rangle \langle \omega_k | \sum_n |\omega_n\rangle \langle \lambda_n| = \sum_{k,n} |\lambda_k\rangle \langle \lambda_n| \, \delta_{k,n} = I$$

Elementi di $\mathcal{U}$ nella base $|\omega_k\rangle$

$$\mathcal{U}_{i,j} = \langle \omega_k | \mathcal{U} | \omega_j \rangle = \langle \omega_k | \sum_l |\lambda_l\rangle \langle \omega_l | \omega_j \rangle = \langle \omega_k | \lambda_j \rangle$$

Si può esprimere $\mathcal{U} = e^{iA}$ con A hermitiano.

Consideriamo un qualsiasi operatore B nella rappresentazione $|\lambda\rangle$ può essere espresso nelle due rappresentazioni come $\mathcal{U}^{+}B\,\mathcal{U}$ dove

$$
\begin{aligned}
\langle\lambda_n|B|\lambda_m\rangle &= \langle\lambda_n|\sum_k |\lambda_k\rangle\,\langle\omega_k|\mathcal{U}^{+}B\,\mathcal{U}\sum_j |\omega_j\rangle\,\langle\lambda_j|\lambda_m\rangle \\
&= \sum_k \delta_{n,k}\sum_k \delta_{j,m}\,\langle\omega_k|\mathcal{U}^{+}B\,\mathcal{U}|\omega_j\rangle = \langle\omega_n|\mathcal{U}^{+}B\,\mathcal{U}|\omega_m\rangle
\end{aligned}
$$

Ovviamente si può considerare la trasformazione sugli stati $|\lambda\rangle = \mathcal{U}\,|\omega\rangle$.

Invarianti per trasformazioni unitarie.
a) Hermiticità di un operatore.
b) Spettro.
c) Relazioni algebriche tra operatori.

$$\Omega_1 \pm \Omega_2 \;\;;\;\; \Omega_1\Omega_2 \;\;;\;\; \Omega^n$$

d) $[A,B] = C$ in ogni rappresentazione.
e) Traccia.

Riassunto

1) **Principio di sovrapposizione**
Lo stato di un sistema quantistico è descritto da un vettore $|\psi\rangle$ dello spazio di Hilbert.

2) **Postulato sulle osservabili**
Le grandezze fisiche osservabili di un sistema sono descritte da operatori che agiscono sui vettori $|\psi\rangle$ dello spazio di Hilbert.

3) **Postulato degli autovalori**
I risultati della misura corrispondono agli autovalori dell'operatore hermitiano che descrive l'osservabile. Gli autovettori sono gli stati in cui l'osservabile ha un valore ben definito.
Se lo stato di un sistema non è autostato dell'osservabile, non si può prevedere con certezza il risultato della misura.

4) **Principio di riduzione, o collasso dello stato.**

La probabilità di ottenere il valore q_k dell'osservabile Q di un sistema descritto da $|\psi\rangle$ è:

$$\mathcal{P}(q_k) = \sum_s |\langle q_k s|\psi\rangle|^2$$

dove s è la degenarazione.

Dopo la misura lo stato il sistema si trova nello stato descritto dall'autostato di Q

$$|q_k\rangle = \sum_s |s, q_k\rangle$$

5) **Osservabili compatibili**

Quantità osservabili che possono essere osservate simultaneamente con precisione arbitraria sono dette compatibili. Gli operatori hermitiani che le descrivono commutano.

6) **Osservazione massima**
Esiste un numero massimo di osservabili compatibili indipendenti. La misura contemporanea di tutte queste osservabili è detta misura massima.
Gli autovettori corrispondenti ad una osservazione massima costituiscono un sistema ortonormale completo e formano una base nello spazio di Hilbert.
Qualsiasi ket può essere espresso come combinazione lineare degli autovettori del sistema.

7) **Rappresentazione**
È possibile descrivere lo stato per il tramite delle sue componenti sulla base $\langle \omega_1, \cdots, \omega_N | \psi \rangle = \psi(\omega_1, \cdots, \omega_N)$ (funzione d'onda).
Ci sono rappresentazioni alternative generate da osservabili non compatibili. Si passa da una rappresentazione all'altra con trasformazioni unitarie.