Lezione 13

Momenti Angolari

Momento angolare (orbitale) classico

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad ; \quad \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ zp_x - xp_z \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & [L_x, L_y] = [(yp_z - zp_y), (zp_x - xp_z)] = (yp_z - zp_y)(zp_x - xp_z) - (zp_x - xp_z)(yp_z - zp_y) \\ = \; & yp_z zp_x - yp_z xp_z - zp_y zp_x + zp_y xp_z - (zp_x yp_z - zp_x zp_y - xp_z yp_z + xp_z zp_y) \\ = \; & [yp_z, zp_x] + [zp_y, xp_z] = y[p_z, z]p_x + p_y[z, p_z]x = y(-i\hbar)p_x + p_y(i\hbar)x \\ = \; & i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z \end{aligned}$$

dove ho considerato che $[x_j, p_k] = 0$ e $[x_i, p_i] = i\hbar$.

In generale

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

$i = 1, 2, 3 \equiv x, y, z$

Definisco momento angolare $\mathbf{J}$ un operatore vettoriale le cui componenti commutano secondo la regola

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$$

$$\begin{aligned}
[J_z, J_x^2] &= J_zJ_x^2 - J_x^2J_z = J_zJ_xJ_x - J_xJ_xJ_z \\
&= (i\hbar J_y + J_xJ_z)J_x - J_x(-i\hbar J_y + J_zJ_x) \\
&= i\hbar(J_yJ_x + J_xJ_y) \\
[J_z, J_y^2] &= -i\hbar(J_yJ_x + J_xJ_y) \\
[J_z, J_z^2] &= 0
\end{aligned}$$

Quindi

$$[J_z, \mathbf{J}^2] = [J_z, J_x^2 + J_y^2 + J_z^2] = 0$$

Si può dimostrare che $\mathbf{J}^2$ commuta anche con J_x e J_y.

Definisco i due operatori.

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad ; \quad J_- = J_x - iJ_y \quad ; \quad J_+ = J_-^+$$

$$\begin{aligned}
[J_z, J_+] &= [J_z, J_x] + i[J_z, J_y] = i\hbar J_y + i(-i\hbar J_x) = \hbar J_+ \\
[J_z, J_-] &= [J_z, J_x] - i[J_z, J_y] = i\hbar J_y - i(-i\hbar J_x) = -\hbar J_- \\
[J_+, J_-] &= [(J_x + iJ_y), (J_x - iJ_y)] \\
&= [J_x, J_x] - i[J_x, J_y] + i[J_y, J_x] + [J_y, J_y] \\
&= -i(i\hbar J_z) + i(-i\hbar J_z) = 2\hbar J_z \\
[\mathbf{J}^2, J_+] &= [\mathbf{J}^2, J_-] = 0
\end{aligned}$$

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \quad ; \quad J_y = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$$

$$
\begin{aligned}
J_+J_- &= (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 - i[J_x, J_y] \\
&= J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z = \mathbf{J}^2 - J_z^2 + \hbar J_z \\
J_-J_+ &= (J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 + i[J_x, J_y] \\
&= J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z = \mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z
\end{aligned}
$$

Sommando le due equazioni

$$
J_+J_- + J_-J_+ = 2(\mathbf{J}^2 - J_z^2) \Longrightarrow \mathbf{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2
$$

Gli autovalori di $\mathbf{J}^2$ sono positivi definiti, o zero.

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\mathbf{J}^2|\psi\rangle &= \langle\psi|J_x^2|\psi\rangle + \langle\psi|J_y^2|\psi\rangle + \langle\psi|J_z^2|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|J_xJ_x|\psi\rangle + \langle\psi|J_yJ_y|\psi\rangle + \langle\psi|J_zJ_z|\psi\rangle \\
&= |J_x\,|\psi\rangle\,|^2 + |J_y\,|\psi\rangle\,|^2 + |J_z\,|\psi\rangle\,|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Possono essere espressi come $j(j+1)\hbar^2$ con $j \geq 0$.

Considero una componente che commuta con $\mathbf{J}^2$, ad esempio J_z.
Gli autovalori di J_z sono tradizionalmente indicati come $m\hbar$.

Indico come $|j,m\rangle$ gli autostati comuni a $\mathbf{J}^2$ e J_z, trascurando gli altri numeri quantici che definiscono completamente lo stato, relativi agli altri osservabili che formano, con il momento angolare, un insieme completo di osservabili compatibili.

Dimostro che $-j \leq m \leq j$.

$$\begin{aligned} |J_+ \, |j,m\rangle \, |^2 &= \langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle \geq 0 \\ |J_- \, |j,m\rangle \, |^2 &= \langle j,m|J_+J_-|j,m\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle &= \langle j,m|\mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z|j,m\rangle = [j(j+1) - m^2 - m]\hbar^2 \\ \langle j,m|J_+J_-|j,m\rangle &= \langle j,m|\mathbf{J}^2 - J_z^2 + \hbar J_z|j,m\rangle = [j(j+1) - m^2 + m]\hbar^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j(j+1) - m(m+1) &= (j-m)(j+m+1) \geq 0 \\ j(j+1) - m(m-1) &= (j-m+1)(j+m) \geq 0 \end{aligned}$$

La prima è valida per $-(j+1) \leq m \leq j$.
La seconda è valida per $-j \leq m \leq j+1$. Quindi

$$-j \leq m \leq j$$

Gli autovalori di J_z differiscono di multipli interi di $\hbar$.

a) Se $m = -j$ allora $J_- \left|j, -j\right\rangle = 0$.

$$\langle j, m | J_+ J_- | j, m \rangle = [j(j+1) - m(m-1)]\hbar^2 = \left| J_- \left|j, m\right\rangle \right|^2$$

Poiché la norma di un vettore è 0 se il vettore è nullo.

$$\left| J_- \left|j, m\right\rangle \right|^2 = 0 \Longrightarrow m = -j \quad ; \quad \text{e} \quad ; \quad m = -j \Longrightarrow \left| J_- \left|j, m\right\rangle \right|^2 = 0$$

Prova

$$J_+ J_- \left|j, m\right\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]\hbar^2 \left|j, m\right\rangle = [(j+m)(j-m+1)]\hbar^2 \left|j, m\right\rangle$$

Per $\left|j, m\right\rangle \neq 0$ le possibilità sono $j = m - 1 \rightarrow m = j + 1$ da scartare perché eccede i limiti, e la sola accettabile $m = -j$.

b) Se $m > -j$ allora $J_- |j,m\rangle \neq 0$ e più precisamente

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^2 J_- |j,m\rangle &= j(j+1)\hbar^2 J_- |j,m\rangle \equiv j(j+1)\hbar^2 |j,m-1\rangle \\
J_z J_- |j,m\rangle &= (m-1)\hbar J_- |j,m\rangle \equiv (m-1)\hbar |j,m-1\rangle
\end{aligned}$$

Prova

Poiché $\mathbf{J}^2$ e J_- commutano $J_- |j,m\rangle$ è autovettore di $\mathbf{J}^2$.

$$[\mathbf{J}^2, J_-] |j,m\rangle = 0 \;\; ; \;\; \mathbf{J}^2 J_- |j,m\rangle = J_- \mathbf{J}^2 |j,m\rangle = J_- [j(j+1)]\hbar^2 |j,m\rangle = [j(j+1)]\hbar^2 \underbrace{J_- |j,m\rangle}_{\text{autovettore}}$$

Dato che

$$[J_z, J_-] |j,m\rangle = -\hbar J_- |j,m\rangle$$

si ha

$$\begin{aligned}
J_z J_- |j,m\rangle &= J_- J_z |j,m\rangle - \hbar J_- |j,m\rangle = J_- \hbar m |j,m\rangle - \hbar J_- |j,m\rangle \\
&= \hbar(m-1) J_- |j,m\rangle \equiv \hbar(m-1) |j,m-1\rangle
\end{aligned}$$

In analogia si prova.

c) Se $m = j$ allora $J_+ |j, j\rangle = 0$.

d) Se $m < j$ allora $J_+ |j, m\rangle \neq 0$ e più precisamente

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^2 J_+ |j, m\rangle &= j(j+1)\hbar^2 J_+ |j, m\rangle \equiv j(j+1)\hbar^2 |j, m+1\rangle \\
J_z J_+ |j, m\rangle &= (m+1)\hbar J_+ |j, m\rangle \equiv (m+1)\hbar |j, m+1\rangle
\end{aligned}$$

Ho dimostrato

$j \geq 0$; $-j \leq m \leq j$; $J_- |j, -j\rangle = 0$; $J_+ |j, j\rangle = 0$

Applico l'operatore J_- un numero intero p di volte, iterativamente, ad un vettore $|j,m\rangle$. Ad esempio per $p=2$.

$$\begin{aligned} J_z(J_-)^2\,|j,m\rangle &= J_zJ_-J_-\,|j,m\rangle \\ &= (J_-J_z-\hbar J_-)J_-\,|j,m\rangle = J_-[(m-1)\hbar-\hbar]J_-\,|j,m\rangle \\ &= (m-2)\hbar J_-^2\,|j,m\rangle \equiv (m-2)\hbar\,|j,m-2\rangle \end{aligned}$$

In generale

$$J_z(J_-)^p\,|j,m\rangle = (m-p)\hbar\,|j,m-p\rangle$$

La sequenza deve terminare con $m-p=-j$ perché $J_-\,|j,-j\rangle = 0$.

Supponiamo che $-j<m-p<-j+1$, applicando J_- avrei

$$J_zJ_-(J_-)^p\,|j,m\rangle = J_zJ_-\,|j,m-p\rangle = \underbrace{(m-p-1)}_{<-j}\hbar\,\underbrace{J_-\,|j,m-p\rangle}_{\neq 0}$$

quindi impossibile.

Il discorso si ripete per J_+ che implica che esiste un numero q intero positivo tale che $m + q = j$. Sottraggo i due numeri

$$m + q - (m - p) = p + q = 2j$$

dato che p e q sono interi j è intero o semi-intero.

Riassunto

a) $\mathbf{J}$ è un momento angolare, cioè $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$
b) $\mathbf{J}^2$ e J_z hanno autovettori comuni, cioè $[\mathbf{J}^2, J_z] = 0$.
c) $\mathbf{J}^2$ ha autovalori $j(j+1)\hbar^2$ dove j è un numero postivo, intero o semi-intero. Lo zero è incluso.
d) J_z ha autovalori $m\hbar$. Fissato j i possibili valori di m sono i $2j+1$ valori compresi tra $-j$ e j separati in unità di $\hbar$. Tutti i valori sono presenti una volta definito j.

Il valore di j è intero o semi-intero a seconda del sistema fisico considerato. Per lo stesso sistema fisico i valori di j sono solo interi oppure semi-interi, non si conoscono situazioni in cui i due tipi di autovalori si mischiano.

Momento angolare orbitale

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Coordinate polari sferiche

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

$$L_z = -ih \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \right]$$

Definiamo gli autostati comuni come $Y_{l,\mu}(\theta,\phi)$ (Armoniche sferiche).

$$\begin{aligned} L_z Y_{l,\mu}(\theta,\phi) &= \hbar\mu Y_{l,\mu}(\theta,\phi) \\ \mathbf{L}^2 Y_{l,\mu}(\theta,\phi) &= \hbar^2 l(l+1) Y_{l,\mu}(\theta,\phi) \end{aligned}$$

Considero $Y_{l,\mu}(\theta,\phi) = \Theta_{l,\mu}(\theta)\Phi_{l,\mu}(\phi)$

$$L_z Y_{l,\mu}(\theta,\phi) = -i\frac{\partial}{\partial\phi}\Theta_{l,\mu}(\theta)\Phi_{l,\mu}(\phi) = \hbar\mu\Theta_{l,\mu}(\theta)\Phi_{l,\mu}(\phi)$$

$$\Phi_{l,\mu}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\mu\phi} \longrightarrow \int_0^{2\pi} d\phi\, e^{i\mu\phi}e^{-i\mu'\phi} = \delta_{\mu,\mu'}2\pi$$

Poiché $\Phi_{l,\mu}(\phi) = \Phi_{l,\mu}(\phi+2\pi)$ ho $\Phi_{l,\mu}(0) = \Phi_{l,\mu}(2\pi) = e^{i\mu 2\pi} = 1$ valido $\forall\mu \in -l \leq \mu \leq l$.

In particolare $\mu = l$ quindi, poiché μ è intero $\Longrightarrow l$ intero.

Poiché la normalizzazione delle armoniche sferiche richiede

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \; Y^*_{l,\mu}(\theta,\phi) Y_{l',\mu'}(\theta,\phi) = \delta_{l,l'}\delta_{\mu,\mu'}$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \; \Theta^*_{l,\mu}(\theta) \Theta_{l',\mu}(\theta) = \delta_{l,l'}$$

Da prima

$$-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Phi_{l,\mu}(\phi) = -\mu^2\Phi_{l,\mu}(\phi)$$

Quindi

$$\mathbf{L}^2 Y_{l,\mu}(\theta,\phi) = \hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\mu^2 - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right] Y_{l,\mu}(\theta,\phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{l,\mu}(\theta,\phi)$$

Considerando solo la parte dipendente da Θ

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + l(l+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta) = 0$$

Soluzioni di questa equazione sono i polinomi di Legendre $P_l(x)$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

con x reale e $x \in [-1,1]$.

$P_l(1) = 1$; $P_l(-1) = (-1)^l$; $P_o(x) = 1$; $P_1(x) = x$; $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

Polinomi associati di Legendre.

$$P_l^\mu(x) = (1-x^2)^{\mu/2}\frac{d^\mu}{dx^\mu}P_l(x) = (\sin\theta)^\mu \frac{d^\mu}{d(\cos\theta)^\mu}P_l(\cos\theta)$$

$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2}$

$$\int_{-1}^{1} dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}$$

$$\int_{-1}^{1} dx P_l^\mu(x) P_{l'}^\mu(x) = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+\mu)!}{(l-\mu)!}\delta_{l,l'}$$

Armoniche sferiche

$$Y_{l,\mu}(\theta,\phi) = (-1)^\mu \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-\mu)!}{(l+\mu)!}\right]^{1/2} P_l^\mu(\cos\theta) \;\; e^{i\mu\phi}$$

Ortonormalità

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \; Y^*_{l,\mu}(\theta,\phi) Y_{l',\mu'}(\theta,\phi) = \delta_{l,l'}\delta_{\mu,\mu'}$$

Completezza

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\mu=-l}^{l} Y^*_{l,\mu}(\theta,\phi) Y_{l,\mu}(\theta',\phi') = \frac{\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')}{\sin\theta}$$

$$\sum_{\mu=-l}^{l} Y^*_{l,\mu}(\theta_1,\phi_1) Y_{l,\mu}(\theta_2,\phi_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\theta)$$

dove θ è l'angolo compreso tra le direzioni θ_1,ϕ_1 e θ_2,ϕ_2.

$$Y^*_{l,\mu}(\theta,\phi) = (-1)^\mu Y_{l,-\mu}(\theta,\phi)$$

Armoniche sferiche: qualche valore

$$Y_{0,0} = \frac{1}{4\pi}$$

$$Y_{1,0} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\theta$$

$$Y_{1,1} = -\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta e^{i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$Y_{2,1} = -\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$$

$$Y_{2,2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta e^{i2\phi}$$

Spin

Fenomenologia

Esperimenti di Stern e Gerlach.

Identificazione di una direzione privilegiata distrugge l'omogeintà spaziale.

Non c'è più la degenerazione sull'asse z.

Si osservano $2l+1$ differenti livelli energetici. (ATTESO)

Si identifica un numero pari di livelli (OSSERVATO)

Con $l=0$ due linee.

Ipotesi di momento angolare intrinseco semi-intero associato all'elettrone.

Non c'è analogo classico.

Caso di spin 1/2.

$$\mathbf{S} \quad ; \quad [S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$$

$\chi_{\frac{1}{2},s}$ autofunzione di S_z e $\mathbf{S}^2$.

$$S_z\chi_{\frac{1}{2},s} = s\hbar\chi_{\frac{1}{2},s} \quad \text{con} \quad s = \pm\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{S}^2\chi_{\frac{1}{2},s} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2\chi_{\frac{1}{2},s} = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_{\frac{1}{2},s}$$

$$\chi_{\frac{1}{2},s} \equiv \chi_{\pm\frac{1}{2}} \quad ; \quad \chi_{\frac{1}{2}} \equiv |\uparrow\rangle \quad ; \quad \chi_{-\frac{1}{2}} \equiv |\downarrow\rangle$$

Rappresentazione matriciale $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$. Matrici di Pauli.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hermitiane

$$\mathrm{tr}(\sigma_i) = 0 \quad ; \quad \det(\sigma_i) = -1 \quad ; \quad \sigma_i^2 = I \quad ; \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z = I \quad ; \quad (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

Le variabili orbitali $\mathbf{p}$ e $\mathbf{r}$ commutano con $\mathbf{S}$, quindi lo spazio di Hilbert in cui lo stato globale è definito è dato dal prodotto tensoriale dello spazio legato a $\mathbf{p}$ e $\mathbf{r}$ con quello definito da $\mathbf{S}$:
$\epsilon(\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{S}) = \epsilon(\mathbf{r},\mathbf{p}) \otimes \epsilon(\mathbf{S})$. In questo spazio la funzione d'onda può essere scritta come: $\psi(\mathbf{r},\mathbf{S}) = \phi(\mathbf{r})\chi_s$.

Somma Momenti Angolari

Due momenti angolari che commutano $\mathbf{J}_1$ e $\mathbf{J}_2$: $[J_{1,i}, J_{2,i}] = 0$

Considero gli autovalori di

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 \quad ; \quad J_z = J_{1,z} + J_{2,z} \quad ; \quad \mathbf{J}^2 = (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2$$

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \equiv |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \quad ; \quad \epsilon(1,2) = \epsilon(1) \otimes \epsilon(2)$$

I vettori $|j_1, m_1\rangle$ e $|j_2, m_2\rangle$ formano una base nel sottospazio di $\epsilon(1,2)$ con dimensione $(2j_1+1)(2j_2+1)$.

È possibile utilizzare un'altra base legata agli autostati di $\mathbf{J_1}^2$, $\mathbf{J_2}^2$, $\mathbf{J}^2$, J_z e formata dagli stati $|j_1, j_2, j, m\rangle$.

Questa nuova base può essere espressa come combinazione lineare dei vettori della vecchia base. Il numero di vettori indipendenti rimane lo stesso per le due basi.

- Autovalori di $J_z = J_{1,z} + J_{2,z}$.

$J_z \left|m_1\right\rangle \left|m_2\right\rangle = (J_{1,z}+J_{2,z}) \left|m_1\right\rangle \left|m_2\right\rangle = \hbar(m_1+m_2) \left|m_1\right\rangle \left|m_2\right\rangle = \hbar m \left|m_1\right\rangle \left|m_2\right\rangle$

Quindi $m = m_1 + m_2$

- Autovalori di $\mathbf{J}^2$.

j fissato assume $-j \leq m \leq j$, $2j + 1$ valori.

Calcolo j_{max}.
Il massimo valore possibile di m è $m_{\text{max}} = j_1 + j_2$.
Poiché $m_{\text{max}} = j_{\text{max}}$ allora $j_{\text{max}} = j_1 + j_2$.

Calcolo j_{min}.

Le dimensioni del sottospazio definito da $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ sono le stesse di quelle del sottospazio $|j_1, j_2, j, m\rangle$. Uso il fatto che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

$$(2j_1+1)(2j_2+1) = \sum_{j=j_{\text{min}}}^{j_{\text{max}}} (2j+1) = \sum_{j=j_{\text{min}}}^{j_1+j_2} (2j+1)$$

$$\begin{aligned} &= \; 2\left[\sum_{j=1}^{j_1+j_2} j - \sum_{j=1}^{j_{\text{min}}-1} j\right] + \sum_{j=j_{\text{min}}}^{j_1+j_2} \\ &= \; (j_1+j_2)(j_1+j_2+1) - (j_{\text{min}}-1)(j_{\text{min}}) + (j_1+j_2) - (j_{\text{min}}-1) \end{aligned}$$

Quindi

$$j_{\text{min}}^2 = (j_1 - j_2)^2 \;\; ; \quad j_{\text{min}} = |j_1 - j_2|$$

Il risultato finale è

$$|j_1 - j_2| \le j \le j_1 + j_2$$

Coefficienti di Clebsh - Gordan

Il passaggio da una base $|j_1, j_2, j, m\rangle$ alla base $|j_1, m_1\rangle\,|j_2, m_2\rangle \equiv |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ nel sottopazio di Hilbert è una combinazione lineare dei vettori di una base con quelli dell'altra. Usando la completezza della base

$$\sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\,\langle j_1, m_1; j_2, m_2| = 1$$

si ha che

$$|j_1, j_2, j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_2, m_2; j_1, m_1\rangle\,\langle j_1, m_1; j_2, m_2|j_1, j_2, j, m\rangle$$

Il termine $\langle j_1, m_1; j_2, m_2|j_1, j_2, j, m\rangle$ è un numero e si chiama

coefficiente di Clebsh - Gordan

Un modo più comodo per indicare i coefficienti di Clebsh - Gordan è

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_1, j_2, j, m\rangle \equiv \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m\rangle$$

I coefficienti di Clebsh - Gordan sono $\neq 0$ solo se j_1, j_2 e j soddisfano la relazione triangolare $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ e se $m = m_1 + m_2$.

Si usa normalmente un rappresentazione in cui i coefficienti sono numeri reali.

Proprietà di completezza

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_1, j_2, j, m\rangle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_1, j_2, j', m'\rangle &= \delta_{j,j'}\delta_{m,m'} \\ \sum_{j,m} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_1, j_2, j, m\rangle \langle j_1, m_1'; j_2, m_2' | j_1, j_2, j', m'\rangle &= \delta_{m_1,m_1'}\delta_{m_2,m_2'} \end{aligned}$$

Le proprietà di simmetria sono meglio descritte usando il simbolo $3j$ di Racah

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{-j_1+j_2-m}}{\sqrt{2j+1}} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle$$

Il valore di

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix}$$

non cambia per una permutazione ciclica di due colonne, per lo scambio di due colonne si ha

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j \\ m_1 & m_1 & m \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ -m_1 & -m_2 & -m \end{pmatrix}$$

Completezza

$$\sum_{m_1,m_2}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & m' \end{pmatrix} = \frac{1}{2j+1}\delta_{j,j'}\delta_{m,m'}$$

$$\sum_{j,m}(2j+1)\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1' & m_2' & m \end{pmatrix} = \delta_{m_1,m_1'}\delta_{m_2,m_2'}$$

Parità

Operatore parità Π

$$\Pi\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \cdots, \mathbf{r}_N) = \Psi(-\mathbf{r}_1, -\mathbf{r}_2, -\mathbf{r}_3, \cdots, -\mathbf{r}_N)$$

Hermitiano

$$\langle\Psi|\Pi|\Phi\rangle = \int d\mathbf{r}_1 \cdots \int d\mathbf{r}_N \Psi^*(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N)\Phi(-\mathbf{r}_1, \cdots, -\mathbf{r}_N)$$
$$= \int d\mathbf{r}_1 \cdots \int d\mathbf{r}_N \Psi^*(-\mathbf{r}_1, \cdots, -\mathbf{r}_N)\Phi(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N) = \langle\Phi|\Pi|\Psi\rangle^* = \langle\Psi|\Pi^+|\Phi\rangle$$

Unitario

$$\Pi^2 = \mathbb{I} \;\; ; \;\; \Pi = \Pi^+ = \Pi^{-1}$$

autovalori ± 1.

$\Pi\mathbf{r} = -\mathbf{r}$	vettore polare
$\Pi\mathbf{L} = \Pi(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = -\mathbf{r}\times(-\mathbf{p}) = \mathbf{L}$	vettore assiale, pseudovettore
$\Pi(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}) = -\mathbf{r}\cdot(-\mathbf{p}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$	scalare
$\Pi(\mathbf{r}\cdot\mathbf{L}) = -\mathbf{r}\cdot\mathbf{L}$	pseudo scalare

In coordinate polari sferiche $\Pi \mathbf{r} = -\mathbf{r}$ corrisponde a

$$r \to r \;\; ; \;\; \theta \to \pi - \theta \;\; ; \;\; \phi \to \phi + \pi$$

quindi

$$\cos\theta \to -\cos\theta \;\; ; \;\; \sin\theta \to \sin\theta$$

Nei polinomi associati di Legendre

$$P_l^\mu(\cos\theta) = \sin^\mu\theta \frac{d^\mu}{d\cos^\mu\theta} P_l(\cos\theta) \;\; ; \;\; P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

$$\begin{aligned}
\Pi P_l^\mu(\cos\theta) &= (-1)^{l+\mu} P_l^\mu(\cos\theta) \\
\Pi e^{i\mu\phi} &= e^{i\mu\phi}(-1)^\mu \\
\Pi Y_{l,\mu}(\theta,\phi) &= (-1)^l Y_{l,\mu}(\theta,\phi)
\end{aligned}$$