Lezione 4

Dinamica relativistica

Tempo proprio τ: il tempo misurato nel sistema di riferimento a riposo. Una particella si muove con velocità $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ in un sistema di riferimento inerziale.

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}\ dt$$

Invariante per trasformazioni di Lorentz

$$dS = \sqrt{c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2}$$

nel sistema di riferimento a riposo S'

$$dS = dS' = \sqrt{c^2\ d\tau^2}$$

Per due sistemi inerziali in movimento reciproco con velocità $v = |\mathbf{v}|$

$$dt = \gamma \left(dt' + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'} dt' \right) = \gamma d\tau$$

poiché $\frac{dx'}{dt'} = 0$ nel sistema di riferimento a riposo e $t' = \tau$.

Velocità propria della particella

$$\omega^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}\left(ct, \mathbf{r}\right) \equiv \gamma\left(c, v_x, v_y, v_z\right)$$

$$\omega^\mu \omega_\mu = \gamma^2[c^2 - \mathbf{v}^2] = \gamma^2 \left[1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right] c^2 = c^2$$

Impulso

$$p^\mu = m\omega^\mu$$

La parte spaziale

$$\mathbf{p} = m\boldsymbol{\omega} = m\gamma\mathbf{v}$$

e temporale

$$p^0 = m\gamma c = \frac{1}{c} mc^2 \gamma = \frac{1}{c} mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

per $v << c$

$$p^0 \simeq \frac{1}{c} mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right) = \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots\right)$$

$$E = cp^0 = \gamma mc^2$$

Il quadimpulso

$$p \equiv \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \quad ; \quad p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2\gamma^2 c^2 - m^2\gamma^2 \mathbf{v}^2 \\ &= m^2\gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right) = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \end{aligned}$$

$$E = \gamma m c^2 \;\; ; \;\; \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \;\; ; \;\; \gamma = \frac{E}{m\, c^2} \;\; ; \;\; \mathbf{p} = \frac{E}{m\, c^2} m \mathbf{v} \to \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} c^2}{E}$$

Energia cinetica $T = E - mc^2$ Il fotone ha $m = 0$ non esiste un sistema di riferimento a riposo.
Non si può definire τ e ω^μ.
Si ha

$$E = c|\mathbf{p}|$$