Lezione 9

Meccanica Ondulatoria

Schrödinger - de Broglie

Meccanica ondulatoria 1924

Luce - composta da fotoni con impulso

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Particelle con impulso p hanno un comportamento ondulatorio con

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Un'onda che attraversa un mezzo con indice di rifrazione dipendente dalla posizione $\mathbf{r}$ soddisfa l'equazione di D'Alambert

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r},t) - \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\mathbf{r},t)}{\partial^2 t} = 0$$

Per una soluzione oscillatoria nel tempo $\phi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r})e^{i\omega t}$

$$\frac{\partial^2\phi(\mathbf{r},t)}{\partial^2 t} = -\omega^2\phi(\mathbf{r},t)$$

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r},t) + \frac{n^2(\mathbf{r})\omega^2}{c^2}\phi(\mathbf{r},t) = 0 \ \ ; \ \ \nabla^2\psi(\mathbf{r})e^{i\omega t} + \frac{n^2(\mathbf{r})\omega^2}{c^2}\psi(\mathbf{r})e^{i\omega t} = 0$$

ponendo

$$\frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \ \ ; \ \ \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))}}$$

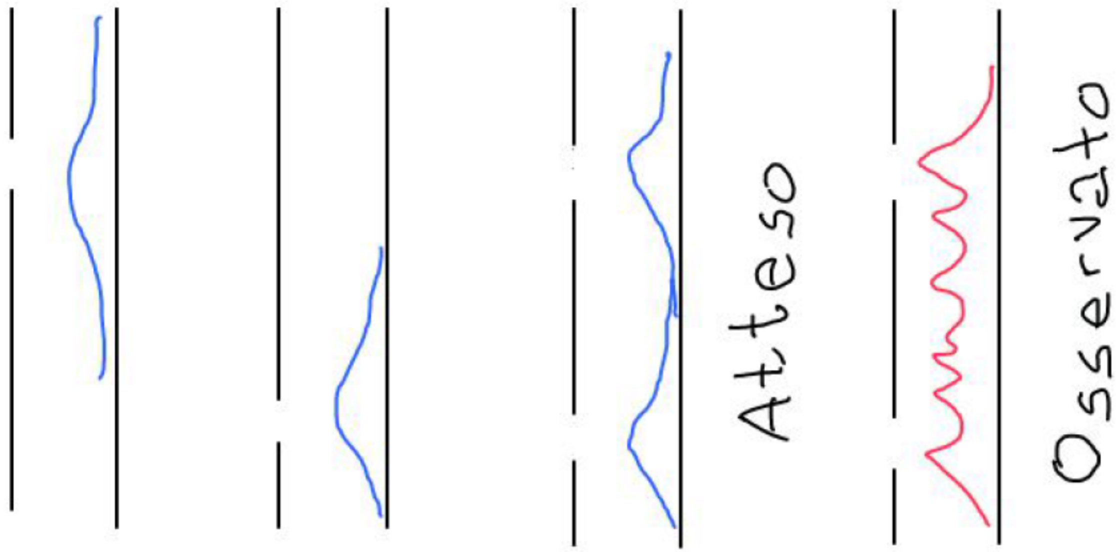
$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \frac{4\pi^2}{h^2}2m(E - V(\mathbf{r}))\psi(\mathbf{r}) = 0$$

Eq. di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \ \ ; \ \ \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$E = T + V$$

Esperimento di Davisson e Germer
o delle due fenditure



Le intensità non si sommano

$$I_{12} \neq I_1 + I_2$$

Concetto di traettoria privo di significato.

Non è possibile misurare simultaneamente con precisione arbitraria le componenti della posizione e dell'impulso sullo stesso asse.

Interferenza

$$\psi_1(\mathbf{r}) \text{ con } S_1 \;\; ; \;\; \psi_2(\mathbf{r}) \text{ con } S_2$$

$$\psi_{12}(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) + \psi_2(\mathbf{r})$$

Intensità Classicamente:

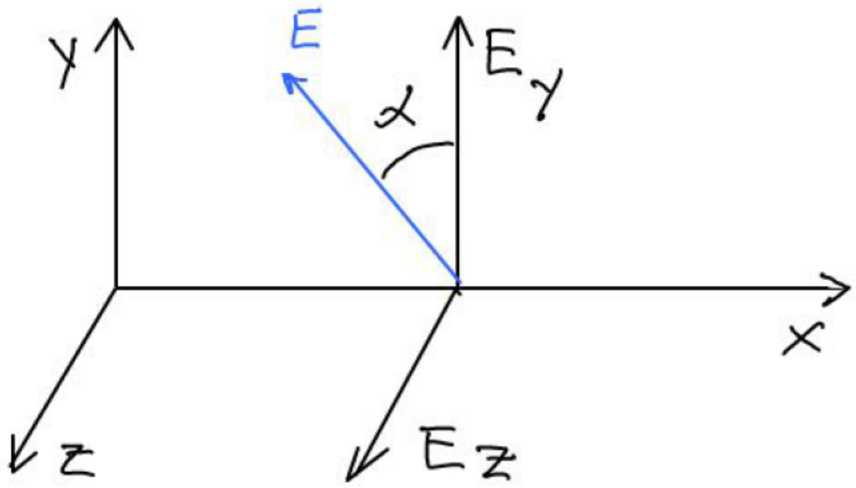
$$I(S_1 + S_2) = I(S_1) + I(S_2) = |\psi_1(\mathbf{r})|^2 + |\psi_2(\mathbf{r})|^2$$

Osservato:

$$\begin{aligned} I(S_1 + S_2) &= |\psi_{12}(\mathbf{r})|^2 = |\psi_1(\mathbf{r}) + \psi_2(\mathbf{r})|^2 \\ &= |\psi_1(\mathbf{r})|^2 + |\psi_2(\mathbf{r})|^2 + \psi_1^*(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r}) + \psi_1(\mathbf{r})\psi_2^*(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Interpretazione probabilisitica.

Esperimento con fotoni polarizzati



Si preparano fotoni monocromatici polarizzati lungo $\hat{n}$.

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{n} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos\alpha\, E_0\, e^{i(kx-\omega t)} \\ \sin\alpha\, E_0\, e^{i(kx-\omega t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Con un polarizzatore lungo z passa solo l'intensità $\sin^2\alpha$ del fascio.

Interpretazione corpuscolare. Passa un fotone alla volta (Si o No).

Ripetendo molte volte l'esperienza si ha una frequenza statistica $\sin^2\alpha$.

Interpretazione

Ogni singolo fotone si trova in uno stato tale che i due possibili stati di polarizzazione siano possibili con un peso tale che la frequenza dei fotoni che passano sia $\sin^2\alpha$. Sovrapposizione polarizzazione in z e y. L'identità del singolo fotone rimane intatta. (Non così classicamente: il campo diminuisce l'intensità).

L'interazione con l'apparato di misura modifica lo stato. Il fotone dopo il polarizzatore z passa o non passa. La probabiltà che questo avvenga è legata a $\sin^2\alpha$ (passa) e $\cos^2\alpha$ (non passa).

È da escludere che i fotoni siano polarizzati lungo z per una percentuale $\sin^2\alpha$ e $\cos^2\alpha$ lungo y perché sono stati tutti preparati lungo $\hat{n}$.

Abbandono del **Determinismo**

Non possiamo prevedere con precisione arbitraria il risultato di un esperimento: probabilità.

Il disturbo arrecato dal processo di misura è grande, non prevedibile, non riducibile.

La formalizzazione richiede

1. Sovrapposizione di due stati ottenendone un altro.
2. Pesare gli stati con opportuni numeri.
3. Trasformazione di uno stato con un altro (Apparato di misura).

1. Somma di vettori.
2. Moltiplicazione di scalare per un vettore.
3. Operatori che trasformano vettori in vettori.

Nel caso della polarizzazione.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \phi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \phi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorema di Pitagora

$$\cos^2\alpha = \frac{|\phi_1|^2}{|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2} \;\; ; \;\; \sin^2\alpha = \frac{|\phi_2|^2}{|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2}$$

Prodotto scalare

$$\phi_1 = (1,0) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \phi_2 = (0,1) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Azione del processo di misura

$$P\phi = \phi_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \phi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spazi vettoriali e di Hilbert

I vettori sono rappresentati con il simbolo del $|k\rangle$, gli scalari sono numeri complessi. $\mathbb{V}$ spazio vettoriale.

1. Somma

$$|\chi\rangle = |\psi\rangle + |\phi\rangle$$

2. Moltiplicazione per uno scalare

$$|\chi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad ; \quad |\psi\rangle \in \mathbb{V}$$

3. Somma associativa ed elemento nullo.

$$|0\rangle \in \mathbb{V} \quad ; \quad |0\rangle + |\psi\rangle = |\psi\rangle \quad ; \quad |\psi\rangle - |\psi\rangle = |0\rangle$$

4. Moltiplicazione con uno scalare

$$1\,|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

$$\lambda(\mu\,|\psi\rangle) = (\lambda\mu)\,|\psi\rangle \quad ; \quad (\lambda + \mu)\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle + \mu\,|\psi\rangle$$

$$\lambda(|\psi\rangle + |\phi\rangle) = \lambda\,|\psi\rangle + \lambda\,|\phi\rangle$$

Prodotto scalare

$$(|\psi\rangle\,, |\phi\rangle) \equiv \langle\psi|\phi\rangle$$

Poprietà

$$|\phi\rangle\,, |\psi\rangle \in \mathbb{V} \;\; ; \;\; \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\langle\phi|\,(\lambda\,|\psi\rangle) = \lambda\,\langle\phi|\psi\rangle \;\; ; \;\; \langle\phi|\,(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = \langle\phi|\psi_1\rangle + \langle\phi|\psi_2\rangle$$

$$\langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle$$

$$(\lambda\,|\phi\rangle\,, |\psi\rangle) = \lambda^*\,\langle\phi|\psi\rangle \;\; ; \;\; (\langle\phi_1| + \langle\phi_2|)\,|\psi\rangle = \langle\phi_1|\psi\rangle + \langle\phi_2|\psi\rangle$$

$$\langle\phi|\phi\rangle \geq 0 \;\; ; \;\; \langle\phi|\phi\rangle = 1(\text{normalizzazione}) \;\; ; \;\; \text{se}\,\langle\phi|\phi\rangle = 0 \Rightarrow |\phi\rangle = 0$$

Ortogonalità $\langle\phi|\psi\rangle = 0$.

Disuguaglianza di Schwartz

$$|\langle\phi|\psi\rangle| \leq \sqrt{|\langle\phi|\phi\rangle|}\,\sqrt{|\langle\psi|\psi\rangle|}$$

Dimostrazione

$$\lambda = \frac{\langle\psi|\phi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \;\; ; \;\; |\chi\rangle = |\phi\rangle - \lambda\,|\psi\rangle$$

$$\begin{aligned}
0 \;\; &\leq \;\; \langle\chi|\chi\rangle = \left[\langle\phi| - \lambda^*\langle\psi|\right]\left[|\phi\rangle - \lambda\,|\psi\rangle\right] = \langle\phi|\phi\rangle - \lambda^*\langle\psi|\phi\rangle - \lambda\,\langle\phi|\psi\rangle + |\lambda|^2\,\langle\psi|\psi\rangle \\
&= \;\; \langle\phi|\phi\rangle - \frac{\langle\phi|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\langle\psi|\phi\rangle - \frac{\langle\psi|\phi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\langle\psi|\phi\rangle + \frac{|\langle\psi|\phi\rangle|^2}{|\langle\psi|\psi\rangle|^2}\langle\psi|\psi\rangle \\
&= \;\; \langle\phi|\phi\rangle + \frac{|\langle\psi|\phi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} - 2\frac{|\langle\psi|\phi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \langle\phi|\phi\rangle - \frac{|\langle\psi|\phi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}
\end{aligned}$$

Sottospazio vettoriale W di V: se è chiuso per operazioni di somma tra vettori e prodotto con scalari.

$$\forall \left|\psi\right\rangle \text{ e } \left|\phi\right\rangle \in W \text{ e } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \;;\; \lambda \left|\psi\right\rangle + \mu \left|\phi\right\rangle \in W$$

Vettori linearmente indipendenti se

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \left|\psi_k\right\rangle = 0 \text{ solo se } a_k = 0 \;\; (k = 1, \cdots, m)$$

Questo insieme di vettori forma una base.
Se $\langle\psi_k|\psi_l\rangle = \delta_{kl}$ la base è ortonormale.
Gram-Schmidt
Ogni vettore può essere espresso come combinazione lineare dei vettori della base.
Esiste lo spazio dei bra $\langle\psi|$ che è duale a quello dei ket, e ha, quindi le stesse proprietà.

Gram-Schmidt

$$|e_1\rangle = \frac{|f_1\rangle}{\sqrt{\langle f_1|f_1\rangle}}$$

$$|e_2'\rangle = |f_2\rangle - |e_1\rangle \langle e_1|f_2\rangle$$

Ortogonale

$$\langle e_1|e_2'\rangle = \langle e_1|f_2\rangle - \langle e_1|e_1\rangle \langle e_1|f_2\rangle = 0$$

$$|e_2\rangle = \frac{|e_2'\rangle}{\sqrt{\langle e_2'|e_2'\rangle}}$$

$$|e_3'\rangle = |f_3\rangle - |e_1\rangle \langle e_1|f_3\rangle - |e_2\rangle \langle e_2|f_3\rangle$$

Operatori lineari

$$Q(\lambda|\psi\rangle + \mu|\phi\rangle) = \lambda Q|\psi\rangle + \mu Q|\phi\rangle$$

Cosidererò solo operatori lineari.

Somma

$$(Q+R)|\psi\rangle = Q|\psi\rangle + R|\psi\rangle$$

Prodotto

$$(QR)|\psi\rangle = Q(R)|\psi\rangle = QR|\psi\rangle$$

Definizione

$$Q^k = Q \cdot Q \cdot Q \cdots Q \;\; ; \;\; k \in \mathbb{I} \;\; ; \;\; P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$$

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Commutatore e anticommutatore

$$[R, Q]_{\pm} := RQ \pm QR$$

Preferisco la notazione

$$[R, Q] = RQ - QR \ ; \ \{R, Q\} = RQ + QR$$

Proprietà

$$[F, G] = -[G, F] \ ; \ [G, \lambda] = 0 \ ; \ [F, F] = 0$$

$$[F_1 + F_2, G] = [F_1, G] + [F_2, G]$$

$$[F_1 F_2, G] = F_1[F_2.G] + [F_1, G]F_2$$

$$[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0$$

Operatore inverso

$$Q^{-1}Q = I = QQ^{-1}$$

$$e^{\lambda R} Q e^{-\lambda R} = Q + \lambda[R, Q] + \frac{\lambda^2}{2!}[R, [R, Q]] \cdots$$

Definizione degli operatori sullo spazio duale

$$\langle\psi|Q|\phi\rangle$$

indica che Q può agire sia su $|\phi\rangle$ sia su $|\psi\rangle$. Operatore aggiunto

$$\langle\psi|\, Q \quad \longleftrightarrow \quad Q^{+}\, |\psi\rangle$$

$$\langle\psi|Q|\phi\rangle = \Big(\, |\psi\rangle \,, Q\, |\phi\rangle \,\Big) = \Big(Q^{+}\, |\psi\rangle \,, |\phi\rangle\Big)$$

$$(RQ)^{+} = Q^{+}R^{+} \;\; ; \;\; \langle\psi|Q|\phi\rangle^{*} = \langle\phi|Q^{+}|\psi\rangle$$

Operatore unitario

$$UU^{+} = U^{+}U = I; \;\; \longleftrightarrow \quad U^{-1} = U^{+}$$

Autovalori e autovettori

Per $|\lambda\rangle \neq |0\rangle$ e $\lambda \neq 0$

$$Q\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle$$

$|\lambda\rangle$ autovettore relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Ogni autovettore $c\,|\lambda\rangle$ con $c \in \mathbb{C}$, parallelo a $|\lambda\rangle$ è autovettore di Q.
- Più autostati di Q **non paralleli tra loro** ma aventi lo stesso autovalore sono detti degeneri.
- L'insieme degli autovettori di degenerazione s relativi ad un autovalore forma un sottopazio vettoriale di dimensione s.
- L'insieme degli autovalori di un operatore è detto spettro che può essere discreto o continuo.

Soluzione del problema gli autovalori

$$Q\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle \quad \longrightarrow \quad \det ||Q - \lambda I|| = 0$$

Operatori hermitiani

Definizione

$$Q = Q^+$$

Gli autovalori di operatori hermitiani sono reali

$$\lambda = \frac{\langle\lambda|Q|\lambda\rangle}{\langle\lambda|\lambda\rangle} = \frac{\langle\lambda|Q^+|\lambda\rangle}{\langle\lambda|\lambda\rangle} = \frac{\langle\lambda|Q|\lambda\rangle^*}{\langle\lambda|\lambda\rangle} = \lambda^*$$

Autovettori di un operatore hermitiano appartenenti ad autovalori differenti sono ortogonali.

$$Q\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle \quad ; \quad Q\,|\gamma\rangle = \gamma\,|\gamma\rangle$$

moltiplicando a sinistra per $\langle\gamma|$ e $\langle\lambda|$

$$\langle\gamma|Q|\lambda\rangle = \lambda\,\langle\gamma|\lambda\rangle \quad ; \quad \langle\lambda|Q|\gamma\rangle = \gamma\,\langle\lambda|\gamma\rangle$$

Sottraggo al complesso coniugato della prima la seconda equazione membro a membro

$$\begin{aligned} \langle\gamma|Q|\lambda\rangle^* - \langle\lambda|Q|\gamma\rangle &= \lambda^*\,\langle\gamma|\lambda\rangle^* - \gamma\,\langle\lambda|\gamma\rangle \\ \langle\lambda|Q^+|\gamma\rangle - \langle\lambda|Q|\gamma\rangle &= \langle\lambda|Q|\gamma\rangle - \langle\lambda|Q|\gamma\rangle = 0 = (\lambda-\gamma)\,\langle\lambda|\gamma\rangle \end{aligned}$$

$\lambda \neq \gamma$ per ipotesi $\longrightarrow \langle\lambda|\gamma\rangle = 0$

Prodotto esterno

$$P := |f\rangle \langle g| \quad \text{operatore}$$

$$P |\psi\rangle = |f\rangle \langle g|\psi\rangle \;\; ; \;\; \langle\psi| P = \langle\psi|f\rangle \langle g| \;\; ; \;\; P^+ = |g\rangle \langle f|$$

Operatore di proiezione

$$P^2 = P = |f\rangle \langle f| \;\; ; \;\; P^+ = P$$