

“Sapienza” Università di Roma



Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di laurea in Fisica
Anno Accademico 2007-2008

Tesi di Laurea Specialistica

Proprietà di trasporto della materia nucleare β -stabile

Relatori:

Dott. Omar Benhar

Prof.ssa Valeria Ferrari

Candidato:

Arianna Carbone

Indice

Introduzione	1
1 Stelle di neutroni	5
1.1 Formazione delle stelle di neutroni	5
1.2 Struttura delle stelle di neutroni	8
2 Materia Nucleare e Forze Nucleari	13
2.1 Proprietà empiriche della materia nucleare	13
2.2 Interazione nucleone-nucleone	15
2.3 Teoria a molti corpi non relativistica	22
2.3.1 Teoria della base correlata	22
2.3.2 Formalismo dell'espansione in clusters	25
2.4 Il potenziale effettivo	26
2.5 Energia di legame della materia nucleare	29
3 Teoria di Landau e proprietà di trasporto per liquidi normali di Fermi	33
3.1 Teoria di Landau	34
3.1.1 Quasiparticelle	34
3.1.2 Parametri di Landau	37
3.2 Proprietà di trasporto	39
3.2.1 Equazione di Boltzmann-Landau	40

3.2.2	Equazione del moto per fluidi viscosi	44
3.2.3	La viscosità per un liquido normale di Fermi	48
4	Viscosità di superficie nel core esterno di una stella di neutroni	55
4.1	Condizioni di β stabilità	55
4.2	Liquido normale di Fermi a più componenti	57
4.3	Probabilità di scattering	59
4.4	Calcolo della viscosità	61
	Conclusioni	65
	Appendici	70
A	Relazioni angolari utilizzate	71
B	Probabilità di transizione	73
C	Calcolo della sezione d'urto NN	77
	Bibliografia	81

Introduzione

Lo studio delle proprietà di trasporto della materia nucleare è un punto di partenza necessario per descrivere in maniera quantitativa molte proprietà importanti della materia ad altissima densità presente all'interno delle *stelle di neutroni*. Ad esempio, la *conducibilità termica* è collegata al tempo di raffreddamento in cui le stelle raggiungono un equilibrio termico; la *viscosità*, come vedremo in dettaglio, contribuisce a smorzare l'instabilità causata dall'emissione di onde gravitazionali da parte delle stelle; la *conducibilità elettrica* è rilevante per la dissipazione ohmica dei campi magnetici interni alle stelle.

Nel 1970 Chandrasekhar scoprì che l'emissione di onde gravitazionali da parte di stelle rotanti poteva causarne l'instabilità [1, 2]. La radiazione gravitazionale (GR) viene emessa quando una perturbazione, interna o esterna, eccita uno dei modi di oscillazione non radiale propri della stella. Nelle stelle non rotanti l'effetto dell'emissione di GR è dissipativo, e tende a smorzare le oscillazioni della stella. Nelle stelle rotanti però la situazione può cambiare drasticamente. Sul finire degli anni settanta, Friedman e Schutz [3] provarono che il fenomeno descritto da Chandrasekhar è tale da rendere instabile qualsiasi stella rotante composta da materia con le caratteristiche di un fluido perfetto.

Il meccanismo che porta a questa instabilità, chiamata instabilità CFS, può essere illustrato in modo semplice. Se un modo si propaga in direzione opposta a quella di rotazione della stella (vista dal sistema di riferimento che ruota insieme al fluido), l'emissione di GR ne riduce l'ampiezza in modo tale da conservare il momento angolare,

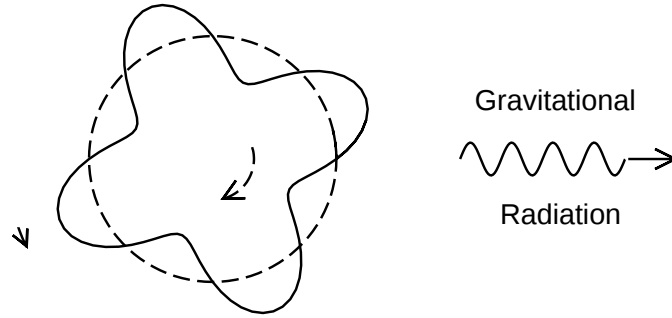


Figura 1: Rappresentazione schematica di un modo di oscillazione (linea continua) che ruota in direzione opposta a quella della stella (linea tratteggiata). Se forzato a ruotare solidalmente con essa il modo è reso instabile dall'emissione di radiazione gravitazionale.

(Fig.1). Se però la stella ruota abbastanza rapidamente, i modi, per effetto del trascinamento, possono essere forzati a muovere nella stessa direzione di rotazione della stella. In questo caso la conservazione del momento angolare richiede che l'ampiezza del modo aumenti, innescando così l'instabilità.

Negli ultimi anni, numerosi studi hanno avuto per oggetto l'instabilità dei cosiddetti modi r , la cui forza di richiamo è la forza di Coriolis. Andersson [4] e Friedman e Morsink [5] hanno dimostrato che tutti i modi r sono resi instabili dall'emissione di GR in tutte le stelle rotanti composte da fluidi ideali; inoltre Lindblom, Owen e Morsink [6] hanno dimostrato che questo tipo di instabilità può essere abbastanza forte da dominare i processi dissipativi, anche per stelle lentamente rotanti.

I processi dissipativi interni alle stelle, come la viscosità, tendono a smorzare, e al limite sopprimere totalmente, i modi che possono divenire instabili a causa dell'emissione di GR. Per esempio, la viscosità attenua le perturbazioni che producono grandi gradienti di velocità in un fluido. Di conseguenza, la conoscenza della viscosità è un elemento essenziale per lo studio della stabilità delle stelle rotanti.

Il formalismo che permette di calcolare il primo coefficiente di viscosità (o viscosità di superficie) della materia composta da neutroni, protoni ed elettroni, è stato sviluppato

negli anni settanta da Flowers e Itoh [8]. Nel loro approccio, basato sulla teoria di Landau dei liquidi di Fermi normali, la probabilità di diffusione nucleone-nucleone dovuta alle interazioni forti è modellata usando le sezioni d'urto misurate nel vuoto, e quindi ignorando le modificazioni dovute alla presenza del mezzo nucleare.

Recentemente, Benhar e Valli [10] hanno proposto un approccio in cui gli effetti del mezzo nucleare sono inclusi tramite un potenziale effettivo, dipendente dalla densità, ottenuto utilizzando il formalismo della teoria a molti corpi nucleare [9, 10]. L'applicazione di questo schema alla materia di neutroni pura ha mostrato che gli effetti trascurati nei lavori preesistenti [8, 11] sono molto importanti. La riduzione della sezione d'urto neutrone-neutrone nel mezzo nucleare, causata dall'effetto di schermo dovuto alle correlazioni dinamiche tra le particelle, provoca un aumento della viscosità che raggiunge quasi un ordine di grandezza a densità pari al doppio della densità centrale dei nuclei atomici.

Con questa Tesi ci proponiamo di ampliare lo studio descritto in [10], analizzando la viscosità di un modello maggiormente realistico della materia delle stelle di neutroni. C'è infatti un ampio consenso sul fatto che, eccetto che per la crosta ed eventualmente il core più interno, una stella di neutroni sia costituita da un fluido uniforme e quasi degenere di neutroni, protoni ed elettroni, con la possibile aggiunta di una piccola percentuale di muoni, che però nel nostro studio trascureremo. A densità barionica fissata, la quantità di protoni ed elettroni presenti è determinata dalle condizioni che la materia sia elettricamente neutra e stabile rispetto ai processi di decadimento beta del neutrone e cattura elettronica, indotti dalle interazioni deboli.

Per analizzare le proprietà di trasporto del sistema che ci interessa ci siamo serviti della Teoria di Landau, che permette di descrivere le proprietà di liquidi composti di fermioni interagenti a basse temperature. La stella può essere infatti considerata a temperatura quasi nulla, poichè la sua temperatura interna stimata è $\sim 10^9$ K, ovvero dell'ordine di 100 KeV, mentre l'energia cinetica di Fermi di un nucleone alla densità di equilibrio della ma-

teria nucleare è pari a ~ 20 MeV. La Teoria di Landau si può quindi applicare in maniera diretta alla materia nucleare per ottenerne le proprietà di trasporto come la viscosità, il cui calcolo è l'obiettivo del nostro lavoro. Per effettuare questo studio bisogna necessariamente disporre di un modello dinamico che descriva come interagiscono le famiglie di particelle componenti la materia, in quanto nell'equazione del trasporto di Boltzmann, che ne descrive le distribuzioni nello spazio delle fasi, compaiono le probabilità di collisione fra le particelle stesse. Come abbiamo già anticipato, per descrivere l'interazione nucleare utilizzeremo un potenziale effettivo [9, 10], che tiene conto degli effetti del mezzo nucleare.

La Tesi è strutturata nel modo seguente.

Nel Capitolo 1 vengono descritte sommariamente le caratteristiche della struttura delle stelle di neutroni.

La prima parte del Capitolo 2 è dedicata alla descrizione delle proprietà della materia nucleare e delle interazioni tra i suoi costituenti, alla quale segue una breve introduzione al formalismo delle funzioni d'onda correlate e delle espansioni in clusters, che rappresentano gli elementi necessari per la costruzione del potenziale effettivo.

Nel Capitolo 3 viene introdotta la teoria di Landau dei liquidi di Fermi normali e la sua applicazione al calcolo delle proprietà di trasporto, dovuta ad Abrikosov e Khalatnikov.

Nel Capitolo 4 presentiamo i dettagli del calcolo della viscosità di superficie della materia nucleare β -stabile ed i risultati dei calcoli numerici effettuati.

L'Appendice A raccoglie alcune relazioni cinematiche usate nei calcoli.

L'Appendice B descrive la relazione tra la probabilità di scattering delle quasiparticelle e la sezione d'urto calcolata nel sistema del centro di massa.

L'Appendice C contiene i dettagli del calcolo della sezione d'urto nucleone-nucleone.

A meno di esplicita menzione contraria, nella Tesi abbiamo utilizzato un sistema di unità di misura in cui $\hbar = h/2\pi = c = K_B = 1$, dove h è la costante di Planck, c è la velocità della luce e K_B è la costante di Boltzmann.

Capitolo 1

Stelle di neutroni

Tutte le stelle presenti in natura seguono un processo evolutivo che dipende da alcune proprietà intrinseche, fra cui la massa iniziale, la densità e la temperatura. Le stelle di neutroni sono uno dei possibili stati finali della vita delle stelle [12, 13]. Esse sono simili a giganteschi nuclei atomici, ad altissima densità, costituiti quasi esclusivamente di neutroni, e, almeno in linea di principio, possono essere considerate come degli ottimi laboratori ideali per lo studio di un gran numero di processi fisici non osservabili sulla terra in condizioni normali.

1.1 Formazione delle stelle di neutroni

Sotto l'azione della forza di gravità le nubi di gas interstellare, formate per lo più da idrogeno molecolare, tendono a collassare dando inizio al processo di formazione delle stelle. Il collasso graduale aumenta la temperatura della stella, che sviluppa una pressione termica tale da bilanciare la contrazione gravitazionale. La temperatura del core della stella aumenta così fino al punto di innesco della fusione nucleare dell'idrogeno in elio.

Quando tutto l'idrogeno disponibile per la fusione nucleare viene esaurito la contrazione dovuta alle forze gravitazionali riprende. Nel core della stella si susseguono reazioni esotermiche di fusione dell'elio in carbonio e successivamente in ossigeno.

A questo punto si hanno due possibili esiti nell'evoluzione della stella: il primo è la formazione di una *nana bianca*, mentre il secondo è la formazione di una *stella di neutroni* o di un *buco nero*.

Nel primo caso, essendo la massa iniziale della stella relativamente piccola ($M < 4M_{\odot}$, dove $M_{\odot}$ è la massa del Sole, pari a 1.989×10^{33} g), le reazioni di fusione nucleare si arrestano, lo strato esterno è instabile e il core collassa. Le nane bianche sono stelle di densità $\sim 3 \times 10^6$ g/cm³ e raggio $\sim 2 \times 10^3$ Km. La loro stabilità è determinata dal bilanciamento fra le forze di contrazione gravitazionale e la forte pressione di degenerazione degli elettroni relativistici. Nel 1931 Chandrasekhar ha dimostrato l'esistenza di una massa limite, $M_c = 1.44 M_{\odot}$, oltre la quale le nane bianche divengono instabili rispetto al collasso gravitazionale.

All'interno di stelle la cui massa iniziale è maggiore di $4M_{\odot}$ si raggiungono invece temperature sufficientemente alte da portare il processo di nucleosintesi fino allo stadio finale, cioè alla creazione di un core di ferro, il nucleo più stabile esistente in natura. La gravità fa collassare il core, rendendo gli elettroni relativistici, tuttavia la pressione di degenerazione cresce meno rapidamente di quella gravitazionale. In questa fase si ha anche creazione di numerosi neutrini dovuta a processi β -inversi e fotoproduzione ($\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$).

Oltre all'azione delle forze gravitazionali, altri processi giocano un ruolo fondamentale nella contrazione della stella: la *neutronizzazione*, cioè la cattura elettronica da parte dei protoni, con la conseguente scomparsa di elettroni attivi nella rigenerazione della pressione di degenerazione e la comparsa di nuclei sempre più ricchi di neutroni, e la *fotodisintegrazione* del ferro, che essendo una reazione endotermica favorisce ulteriormente la contrazione della stella.

Quando la massa del core supera il limite di Chandrasekhar, il core collassa in un tempo dell'ordine della frazione di secondi, fino a raggiungere la densità tipica dei nuclei atomici. A questo punto esso si comporta come un nucleo atomico di dimensioni gigan-

tesche, composto quasi esclusivamente di neutroni, che resiste all'ulteriore compressione producendo una violenta onda d'urto elastica. La *supernova* che origina da questa esplosione è una stella la cui luminosità supera quella solare di un fattore $\sim 10^9$, per poi diminuire nuovamente a un fattore $\sim 10^2$ in qualche mese. Abbiamo quindi a che fare con una nube di gas prodotta nell'esplosione, una *nebulosa*, al cui centro si trova ciò che resta, una *stella di neutroni*. Se al contrario l'esplosione fallisce, la stella collassa ulteriormente dando vita a un *buco nero*.

Già due anni dopo la scoperta del neutrone, dovuta a Chadwick nel 1932, Baade e Zwicky suggerirono la possibilità che una stella compatta costituita da questo nuovo tipo di particella potesse trovarsi nei resti dell'esplosione di una supernova. La loro ipotesi era basata sulla convinzione che l'unico meccanismo in grado di produrre esplosioni stellari visibili per settimane, capaci di proiettare nello spazio una quantità di materia pari a molte masse solari a velocità di migliaia di chilometri al secondo, fosse il collasso del nucleo centrale di una stella di massa sufficientemente elevata.

Molti anni prima della scoperta delle pulsars, Oppenheimer, Volkoff e Tolman [14, 15], stimolati dall'ipotesi di Baade e Zwicky, hanno effettuato il primo calcolo delle proprietà di equilibrio di una stella di neutroni nell'ambito della teoria delle relatività generale. I risultati di questo studio hanno dimostrato che la massa di una stella formata da neutroni non interagenti non può superare il valore $\sim 0.8M_\odot$. Questo valore della massa è però incompatibile con quello ottenuto dalle misure sperimentali, $\sim 1.4 M_\odot$. Questa discrepanza può essere spiegata solo dalla presenza di una pressione di origine dinamica, dovuta alle interazioni forti fra i nucleoni.

Dovettero comunque passare 34 anni dalla formulazione dell'ipotesi di Baade e Zwicky, prima che Hewish e la sua studentessa Bell [16] intercettassero da Cambridge le prime pulsars, cioè sorgenti di onde radio periodiche di eccezionale regolarità, posizionate fuori dal sistema solare. Questi sistemi furono subito identificati come stelle di neutroni in

rapidissima rotazione che emettono fasci di onde radio dai poli magnetici. La prima evidenza della connessione tra pulsars e supernovæ venne poco dopo, dalla scoperta di due pulsars, posizionate tra i resti della supernova Vela e al centro della nebulosa del Granchio. Nel corso degli anni '70 furono scoperte circa altre 250 pulsars, e oggi se ne conoscono circa 1100.

Le osservazioni astronomiche ci dicono che le stelle di neutroni possiedono una massa di poco maggiore della massa del Sole contenuta all'interno di un volume di raggio di circa 10 Km. In queste condizioni la densità della materia è paragonabile a quella dei nuclei atomici, cioè dell'ordine di 10^{14} g/cm³, ovvero 100 milioni di tonnellate per centimetro cubo.

1.2 Struttura delle stelle di neutroni

Come abbiamo già detto, la materia all'interno delle stelle di neutroni può essere considerata a temperatura nulla perchè, a temperature $\sim 10^9$ K ~ 100 KeV e densità $\sim 10^{14}$ g/cm³, l'energia termica è molto minore dell'energia cinetica di Fermi dei nucleoni (~ 10 MeV). Inoltre la materia è considerata trasparente ai neutrini perchè il cammino libero medio dei neutrini che si ottiene dai calcoli teorici è molto maggiore del raggio tipico di una stella di neutroni (~ 10 Km).

Possiamo rappresentare schematicamente la struttura interna di una stella come in Fig. 1.1. Descriveremo ora brevemente la struttura della materia presente nei diversi strati che si succedono muovendosi dall'esterno, cioè dalla regione a densità più bassa, verso il centro.

- **crosta esterna** ha uno spessore di ~ 0.3 Km e una densità che varia tra un valore superficiale $\rho \sim 10^7$ g/cm³ fino a $\rho \sim 4 \times 10^{11}$ g/cm³, all'interfaccia con la crosta interna; in questa regione la materia è costituita da un reticolo di nuclei atomici immersi in un gas di elettroni. È in questo strato della stella che avviene il fenomeno

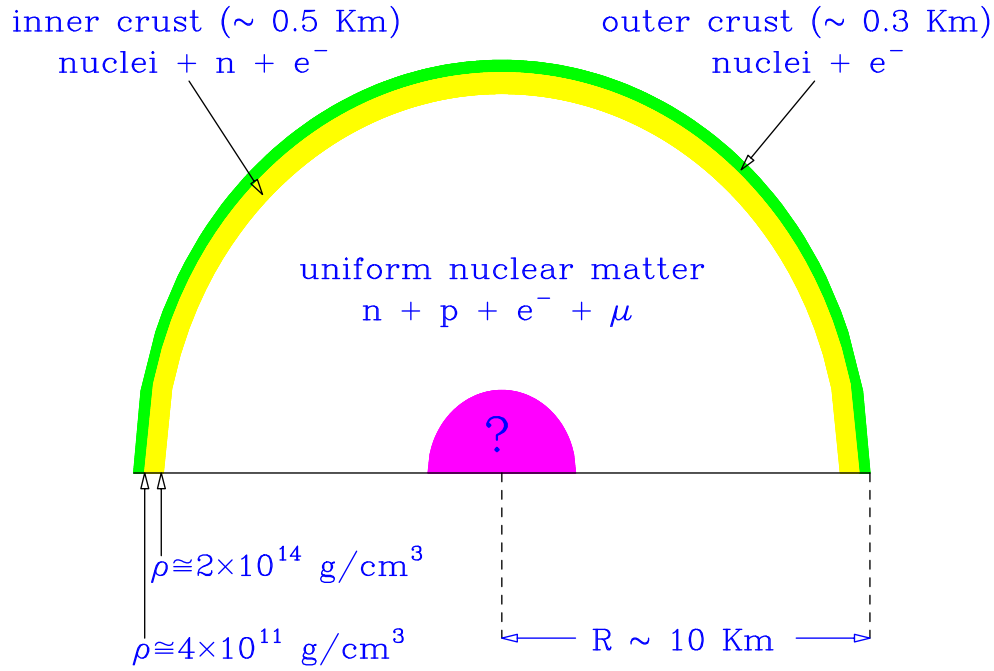


Figura 1.1: Struttura interna di una stella di neutroni.

della *neutronizzazione*. Al crescere della densità cresce il potenziale chimico degli elettroni, e quindi il processo di cattura elettronica può diventare energeticamente favorito. Il risultato è la presenza di nuclei sempre più ricchi in neutroni. La neutronizzazione si arresta quando non ci sono più stati di energia negativa disponibili all'interno dei nuclei, e i neutroni cominciano ad occupare stati di energia positiva, dando luogo al fenomeno del *neutron drip*. La densità alla quale si manifesta il neutron drip segna il confine fra crosta esterna e crosta interna;

- **crosta interna** ha uno spessore di ~ 0.5 Km e una densità che varia fra i valori $\rho \sim 4 \times 10^{11}$ g/cm³ e $\rho \sim 1.4 \times 10^{14}$ g/cm³. In questa regione la materia è costituita da nuclei atomici ricchi di neutroni, immersi in un gas di elettroni e neutroni. Per densità $\rho < 4 \times 10^{12}$ g/cm³ la pressione è dovuta principalmente al gas di elettroni, mentre per densità $\rho > 4 \times 10^{12}$ g/cm³ i neutroni danno il contributo maggiore.

Nella crosta interna la materia si presenta in due stati di aggregazione: uno particolarmente ricco di protoni chiamato *Proton Rich Matter* (PRM) e l'altro che consiste invece di un gas di neutroni, chiamato appunto *Neutron Gas* (NG). In entrambe le fasi è sempre presente il gas di elettroni, che garantisce la neutralità elettrica della materia. Per densità $4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3 < \rho < 0.35\rho_0$, dove con ρ_0 ci riferiamo alla densità centrale tipica di un nucleo atomico, pari a $2.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, lo stato di minima energia è costituito da ammassi sferici di nuclei, ovvero sferette di PRM, circondati da un gas di elettroni e neutroni; al crescere della densità, per $0.35\rho_0 < \rho < 0.5\rho_0$, queste sferette si fondono a formare barre sottili e, successivamente a formare strati di PRM che si alternano a strati di NG, per densità $0.5\rho_0 < \rho < 0.56\rho_0$. La comparsa di queste strutture è dovuta al complicato meccanismo di equilibrio tra interazioni nucleari, di volume e di superficie, ed elettrostatiche;

- **core esterno** per $\rho > 0.56\rho_0$ non si ha più separazione fra i due diversi stati della materia, PRM e NG, e lo stato fondamentale si presenta come un fluido omogeneo di neutroni, protoni ed elettroni in equilibrio rispetto al decadimento beta e alla cattura elettronica. Per densità sufficientemente elevate il potenziale chimico degli elettroni può superare la massa a riposo del muone ($m_\mu = 105 \text{ MeV}$) rendendo quindi energeticamente favorita la creazione di muoni. Lo stato fondamentale della materia consiste quindi di un fluido omogeneo di neutroni, protoni, elettroni e muoni. Il numero dei leptoni è ovviamente quello necessario per mantenere la neutralità elettrica. Il rapporto fra il numero di particelle cariche e i neutroni è $\lesssim 10\%$, e quindi la pressione interna è dovuta in gran parte ai neutroni. Come abbiamo già detto, questa pressione è di natura dinamica e origina dall'interazione forte fra i neutroni, caratterizzata da forze molto repulsive a corto raggio.
- **core interno** nella parte più interna della stella la densità raggiunge valori molto

maggiori di quella tipica dei nuclei atomici. Non appena i potenziali chimici di neutrone ed elettrone raggiungono valori pari alla massa a riposo di adroni più pesanti, come la Σ^- ($M_{\Sigma^-} = 1197$ MeV), cioè per densità dell'ordine di $\sim 2\rho_0$, la produzione di queste particelle tramite interazioni deboli dei nucleoni è energeticamente favorita. Si possono inoltre verificare transizioni a stati eccitati dei nucleoni, e il neutrone può decadere attraverso i processi in cui si formano i mesoni π o K , i quali, essendo bosoni, possono dare luogo ad un condensato di Bose-Einstein. Infine, si suppone che a densità particolarmente elevate la materia transisca ad uno stato completamente diverso, in cui i quark che costituiscono gli adroni sono deconfinati.

Capitolo 2

Materia Nucleare e Forze Nucleari

Come abbiamo precedentemente accennato, l'interazione forte fra i nucleoni gioca un ruolo fondamentale nel determinare la struttura delle stelle di neutroni. Il nostro studio verte in particolare sulla zona del core esterno della stella, in cui la materia si presenta come un fluido omogeneo di neutroni, protoni ed elettroni, con la possibile aggiunta di una piccola percentuale di muoni, che noi però trascureremo. Ci proponiamo di studiare la dinamica della materia nucleare uniforme e in equilibrio rispetto al decadimento β . Per effettuare uno studio di questo tipo è ovviamente necessario descrivere le interazioni fra le varie famiglie di particelle. In questo Capitolo ci occupiamo di definire in maniera consistente il modello di interazione nucleare che abbiamo utilizzato, rimandando ad un Capitolo successivo la discussione delle interazioni di tipo elettromagnetico.

2.1 Proprietà empiriche della materia nucleare

La materia nucleare può essere immaginata come un nucleo di dimensioni gigantesche, con un certo numero di protoni e neutroni che interagiscono esclusivamente mediante le forze nucleari. La comprensione quantitativa della struttura e della dinamica della materia nucleare è indispensabile per poter costruire modelli realistici della materia all'interno delle stelle di neutroni.

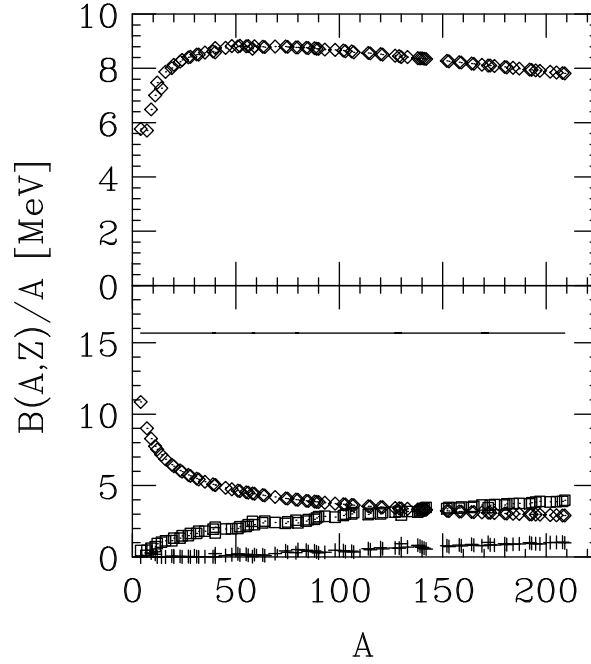


Figura 2.1: Pannello superiore: Dipendenza dal numero di massa A dell'energia di legame per nucleone dei nuclei stabili. Pannello inferiore: Dipendenza dal numero di massa A dei termini di volume (linea continua), superficie (rombi), coulombiano (quadrati), e di simmetria (croci) dell'Eq.(2.1).

Il gran numero di dati sperimentali ottenuti dalle misure effettuate delle masse nucleari permette di stabilire alcune proprietà empiriche della materia nucleare. L'energia di legame di nuclei di numero di massa A è definita come la differenza fra la somma delle masse dei nucleoni costituenti il nucleo e la massa misurata del nucleo stesso. La dipendenza dell'energia di legame $B(Z, A)$ dal numero di protoni Z e dal numero di massa A è ben descritta dalla formula semiempirica [17]

$$B(Z, A) = a_V A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{4A} - \lambda a_p \frac{1}{A^{1/2}} . \quad (2.1)$$

I primi due termini sono definiti *energia di volume* ed *energia di superficie* e descrivono il contributo delle interazioni forti, rispettivamente, all'interno del nucleo e sulla sua superficie. Il terzo termine, detto *coulombiano* tiene conto della repulsione elettrostatica

presente fra i protoni all'interno del nucleo. Il quarto termine è definito *energia di simmetria* e mostra come i nuclei che presentano numero uguale di neutroni e protoni sono energeticamente favoriti. L'ultimo termine è detto *energia di pairing*, e descrive il fatto che i nuclei pari-pari, ovvero con numero di neutroni $A - Z$ e numero di protoni Z entrambi pari, sono più stabili rispetto ai nuclei pari-dispari e dispari-dispari.

La Fig. 2.1 mostra come per numero di massa $A \geq 12$ l'energia di legame per nucleone di nuclei stabili si attesti intorno al valore ~ 8.5 MeV, fornendoci un valore empirico di questa energia. Nella parte inferiore della Fig. 2.1 è illustrato l'andamento in funzione del numero di massa A dei singoli termini che compongono la (2.1).

Il coefficiente del termine lineare in A , a_V , che si ottiene nel limite $A \rightarrow \infty$ con $Z = A/2$, rappresenta l'energia di legame della materia nucleare simmetrica (SNM). La densità di equilibrio della SNM, ρ_0 , può essere dedotta dalla saturazione delle densità nucleari, misurata dagli esperimenti di diffusione elastica di elettroni, all'aumentare del numero di massa A , come illustrato in Fig. 2.2.

Le proprietà empiriche della SNM all'equilibrio sono

$$\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3} \quad , \quad \frac{E}{A} = -15.7 \text{ MeV} . \quad (2.2)$$

2.2 Interazione nucleone-nucleone

Basandosi sui dati sperimentali disponibili è possibile fare alcune semplici considerazioni sulle proprietà delle forze nucleari.

Per prima cosa, come abbiamo anticipato nella Sezione precedente, si osserva una *saturazione* della densità nucleare, illustrata nella Fig.2.2. Questa osservazione suggerisce che i nucleoni non possano addensarsi oltre un certo limite, per cui l'interazione deve essere fortemente repulsiva per distanze inferiori a un raggio r_c , ovvero

$$v(\mathbf{r}) > 0 \quad , \quad |\mathbf{r}| < r_c . \quad (2.3)$$

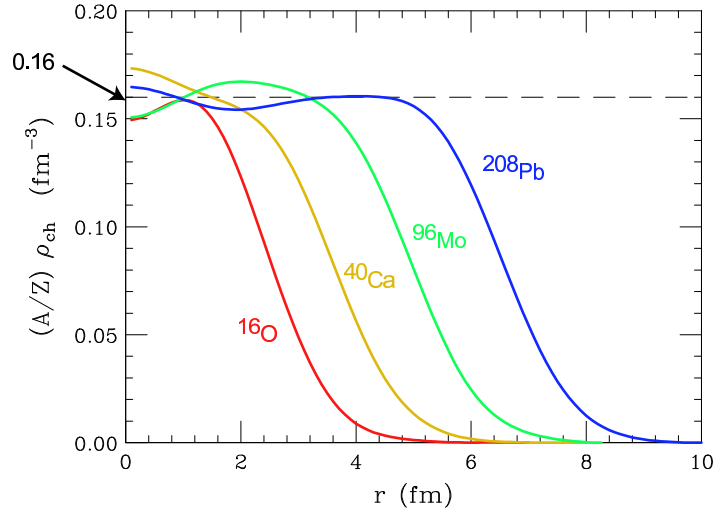


Figura 2.2: Andamento della densità di carica nucleare in funzione della distanza r dal centro del nucleo per vari valori di numero di massa A .

Inoltre, dal fatto che l'energia di legame rimane pressoché inalterata per tutti i nuclei con numero atomico $A \geq 12$, deduciamo che l'interazione nucleare ha un raggio d'azione finito, ovvero che

$$v(\mathbf{r}) = 0 \quad , \quad |\mathbf{r}| > r_0 . \quad (2.4)$$

Un'altra osservazione molto importante è quella che i nuclei *speculari*, cioè quei nuclei che hanno stesso numero di massa ma carica elettrica che differisce per una unità, hanno spettri energetici praticamente identici, a meno di piccole correzioni di origine elettromagnetica; questo ci dice che l'interazione nucleare è indipendente dalla carica elettrica. In realtà le caratteristiche dei nuclei speculari sono la manifestazione di una simmetria più ampia, quella dello spin isotopico, che permette di descrivere protone e neutrone come due stati di una stessa particella, il nucleone, caratterizzata dal numero quantico $t = 1/2$, che può essere trattato come un momento angolare quantistico. In questo formalismo, protone e neutrone corrispondono ai due valori possibili della proiezione di t , cioè $t_3 = \pm 1/2$. Una coppia di due nucleoni è caratterizzata dall'isospin totale T e dalla sua proiezione M_T .

Gli stati possibili, che denotiamo $|T, M_T\rangle$, sono

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= |p, p\rangle , \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle + |np\rangle) , \\ |1, -1\rangle &= |nn\rangle , \\ |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle - |np\rangle) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Le interazioni tra i nucleoni godono della proprietà detta *invarianza isotopica*. Esse dipendono solo dal valore di T , e non da quello della sua proiezione. Per esempio, le forze agenti tra due protoni o tra un protone ed un neutrone accoppiati simmetricamente nello stato $|1, 0\rangle$ sono identiche.

Esiste un unico stato legato di due nucleoni, il nucleo di deuterio (2H), o deutone, formato da un protone e un neutrone con $T = 0$ e spin totale $S = 1$. Ciò implica che l'interazione nucleare, oltre a dipendere dalla distanza $\mathbf{r}$ fra le particelle interagenti e dall'isospin T , dipende anche da S . Il nucleo di deuterio presenta un momento di quadrupolo elettrico non nullo, il che dimostra che la sua distribuzione di carica non ha simmetria sferica. Quindi, l'interazione tra protone e neutrone non è centrale, cioè dipende anche dall'orientazione della distanza fra le due particelle.

Oltre a conoscere le proprietà del deutone, disponiamo di un esteso database di phase shifts (recentemente rianalizzati e catalogati dal gruppo di Nijmegen [18]) misurati in esperimenti di scattering nucleone-nucleone (NN) a energie al di sotto della soglia di produzione di pioni, che forniscono preziose informazioni complementari sulla natura dell'interazione nucleare.

La prima descrizione teorica dell'interazione NN fu proposta da Yukawa nel 1935. Egli ipotizzò che l'interazione avvenisse tramite lo scambio di una particella, la cui massa si poteva stimare considerando il range d'interazione, r_0 , secondo la relazione

$$r_0 \sim \frac{1}{\mu} . \quad (2.6)$$

Ponendo $r_0 \sim 1$ fm si ottiene in questo modo una massa $\mu \sim 200$ MeV ($1\text{fm}^{-1}=197.3$ MeV). L'ipotesi di Yukawa fu verificata nel 1947, quando fu effettivamente osservata nei raggi cosmici la presenza di una particella, chiamata poi mesone π o *pione*, la cui massa era pari a circa 140 MeV. Il pione si presenta in tre stati di carica elettrica, ed è quindi un tripletto di spin isotopico. Gli esperimenti mostrano che esso è una particella pseudoscalare di spin 0, con parità intrinseca negativa. Per conoscere il potenziale che agisce fra due nucleoni, a seguito dello scambio di un pione, si deve calcolare l'ampiezza di diffusione NN partendo dalla lagrangiana di interazione relativistica

$$L_I = -ig\Psi\gamma_5(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi})\Psi \quad (2.7)$$

e farne poi il limite non relativistico. Nella (2.7), g è una costante di accoppiamento, Ψ è il campo del nucleone, $\boldsymbol{\tau}$ è l'operatore di spin isotopico e $\boldsymbol{\phi}$ è definito in termini dei campi scalari pionici, ovvero $\phi_1 = (\pi^+ + \pi^-)/\sqrt{2}$, $\phi_2 = i(\pi^+ - \pi^-)/\sqrt{2}$ e $\phi_3 = \pi^0$.

Si ottiene così

$$\begin{aligned} v_\pi &= \frac{g^2}{4m^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \\ &= \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{m_\pi^3}{4m^2} \frac{1}{3} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \left\{ \left[(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + S_{12} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} \right) \right] \frac{e^{-x}}{x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi}{m_\pi^3} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \right\} , \end{aligned} \quad (2.8)$$

dove $x = m_\pi |\mathbf{r}|$, e

$$S_{12} = \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) , \quad (2.9)$$

gli operatori $\boldsymbol{\sigma}_i$ e $\boldsymbol{\tau}_i$ ($i=1,2$) descrivono spin e isospin dei due nucleoni e $\mathbf{r}$ è la distanza relativa. Il termine che contiene l'operatore S_{12} tiene conto della natura non centrale delle forze nucleari.

Il potenziale descritto dalla (2.8) descrive accuratamente solo la parte a lungo raggio dell'interazione nucleare ($|\mathbf{r}| > 1.5$ fm); per tenere conto anche della parte a medio e

corto raggio bisogna considerare processi in cui si ha lo scambio di due o più pioni, o di particelle adroniche più pesanti, come i mesoni ρ e ω , inoltre maggiore è la densità della materia, maggiore è la probabilità che i nucleoni si sovrappongano. In queste condizioni, l'interazione dovrebbe essere descritta a partire dai gradi di libertà dei costituenti dei nucleoni stessi, cioè quark e gluoni.

Per descrivere l'interazione NN a tutte le distanze si utilizzano potenziali fenomenologici del tipo:

$$v(ij) = \sum_{ST} [v_{TS}(r_{ij}) + \delta_{S1} v_{tT}(r_{ij}) S_{12}] P_{2S+1} \Pi_{2T+1} , \quad (2.10)$$

in cui è chiaramente visibile la dipendenza da spin e isospin, S e T , e la presenza di termini non centrali. Gli operatori P_{2S+1} e Π_{2T+1} proiettano sugli stati NN con S e T definiti. Per grandi valori della distanza interparticellare il potenziale (2.10) si riduce a quello dell'Eq.(2.8).

Effettuando un cambiamento di base si può riscrivere il potenziale nucleare secondo lo sviluppo

$$v(ij) = \sum_{n=1}^6 v^{(n)}(r_{ij}) O_{ij}^{(n)} , \quad (2.11)$$

dove i sei operatori O_{ij}^n sono scelti in maniera da riprodurre tutte le proprietà del deutone precedentemente descritte, ovvero

$$O_{ij}^{n \leq 6} = [1, (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j), S_{ij}] \otimes [1, (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j)] . \quad (2.12)$$

Per descrivere inoltre lo scattering NN in onda S e P (cioè in stati di momento angolare pari a, rispettivamente, 0 e 1) è necessario includere due ulteriori operatori dipendenti dal momento angolare orbitale totale $\mathbf{L}$

$$O_{ij}^{n=7,8} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \otimes [1, (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j)] . \quad (2.13)$$

Il potenziale che fornisce la migliore descrizione dei phase shifts del database di Nijmegen, chiamato potenziale Argonne v_{18} [19], contiene il contributo di 18 operatori, che tengono

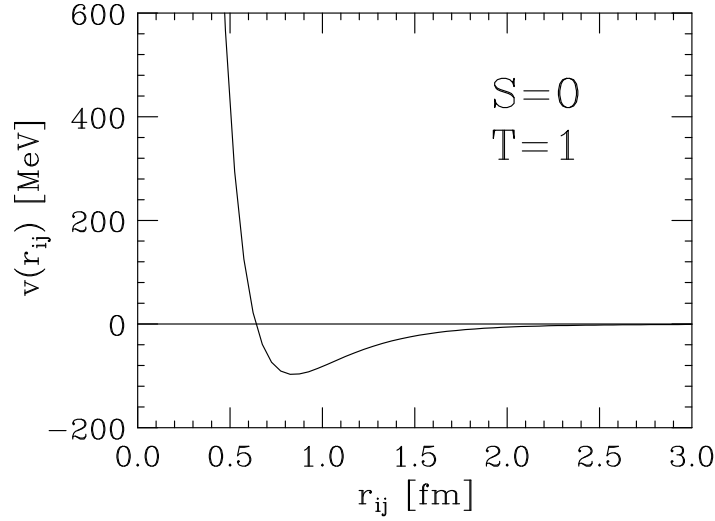


Figura 2.3: Dipendenza radiale del potenziale NN che descrive l'interazione fra due nucleoni in uno stato di momento angolare relativo $L = 0$ e spin e isospin totali $S = 0$ e $T = 1$.

conto anche dei piccoli effetti della rottura di simmetria di carica, dovuta alla differenza di massa tra protone e neutrone e tra pioni neutri e carichi.

Nel nostro lavoro abbiamo utilizzato il potenziale chiamato v'_8 , che si ottiene dal potenziale Argonne v_{18} trascurando tutti gli operatori O_{ij}^n con $n > 8$. Questa scelta è giustificata dai risultati di [10], che hanno evidenziato come i coefficienti di viscosità della materia neutronica pura calcolati usando i potenziali v'_8 e v_{18} siano molto simili.

L'andamento del potenziale NN in uno stato di momento angolare relativo $L = 0$ e spin e isospin totali pari a $S=0$ e $T=1$ è mostrato in Fig.2.3. Si osserva chiaramente come il core repulsivo a corto raggio, causato dallo scambio di mesoni pesanti o a processi che coinvolgono direttamente i costituenti dei nucleoni, è seguito da una regione intermedia attrattiva, dovuta in gran parte allo scambio di due pioni; infine, per grandi distanze interparticellari domina il meccanismo di scambio di un pione.

La presenza del core repulsivo è di fondamentale importanza poichè, come detto in precedenza, esso gioca un ruolo primario nel determinare la stabilità delle stelle di

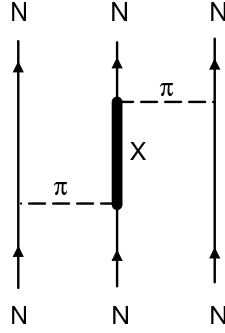


Figura 2.4: Rappresentazione schematica del processo di scambio di due pioni nell'interazione fra tre nucleoni; la linea marcata rappresenta lo stato eccitato di un nucleone.

neutroni.

I potenziali come Argonne v_{18} riproducono tutte le proprietà osservate degli stati di due nucleoni, sia legati che di scattering. Essi possono poi essere usati per risolvere l'equazione di Schrödinger che determina lo stato di un sistema non-relativistico con $A > 2$. Tuttavia, seguendo questa procedura, si scopre che per riprodurre l'energia di legame di un sistema a tre nucleoni è necessario includere nell'hamiltoniana un potenziale a tre corpi. Questo viene generalmente scritto nella forma

$$V_{ijk} = V_{ijk}^{2\pi} + V_{ijk}^N, \quad (2.14)$$

dove il primo termine rappresenta il processo di scambio di due pioni mentre il secondo, repulsivo, è puramente fenomenologico. Il processo dominante nell'interazione fra tre nucleoni è quello relativo allo scambio di due pioni associato all'eccitazione di un nucleone nello stato intermedio del processo, come mostrato schematicamente in Fig.2.4.

Per sistemi con $A > 3$ è ancora possibile ottenere soluzioni dell'equazione di Schrödinger con approcci stocastici, come i metodi Variational Monte Carlo (VMC) e Green Function Monte Carlo (GFMC) [20]. Quest'ultimo è stato utilizzato con successo per descrivere lo stato fondamentale e i primi stati eccitati di sistemi con $A \leq 8$. L'ottimo accordo tra i risultati del metodo GFMC e i dati sperimentali dimostra che l'approccio non-relativistico

discusso in questo capitolo, in cui la dinamica è determinata dall'analisi delle proprietà di sistemi di due e tre nucleoni, ha notevole potere predittivo.

2.3 Teoria a molti corpi non relativistica

La teoria nucleare a molti corpi non relativistica (*nuclear many-body theory*, o NMBT) fornisce una cornice teorica consistente nell'ambito della quale è possibile descrivere proprietà rilevanti della materia nucleare a partire dal modello dinamico descritto nella Sezione precedente. L'argomento alla base dell'approssimazione non relativistica, ovviamente, si basa sull'osservazione che l'energia tipica di un nucleone alle densità da noi considerate è di gran lunga minore della massa del nucleone stesso.

Secondo la NMBT la materia nucleare è composta da nucleoni puntiformi, descritti dall'hamiltoniana

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{j>i=1}^A v_{ij} + \dots, \quad (2.15)$$

che comprende il termine cinetico, il potenziale a due corpi e possibili potenziali a più corpi rappresentati dai puntini di sospensione. Lo studio di questo sistema è molto difficile a causa della presenza del core fortemente repulsivo del potenziale v_{ij} , che rende l'approccio di tipo perturbativo molto problematico. Il valore degli elementi di matrice di v_{ij} tra stati del sistema non interagente risulta infatti essere molto grande, o addirittura divergente. La strategia utilizzata per aggirare questa difficoltà consiste nel sostituire agli stati del gas di Fermi (FG) dei nuovi stati *correlati*, che incorporano gli effetti non perturbativi dovuti al core del potenziale.

2.3.1 Teoria della base correlata

Nella teoria della base correlata (*Correlated Basis Function*, o CBF) vengono considerati come base per rappresentare il sistema un set di stati che si ottengono dagli stati

del gas di Fermi (FG) attraverso la trasformazione

$$|n\rangle = \frac{F|n_{\text{FG}}\rangle}{\langle n_{\text{FG}}|F^\dagger F|n_{\text{FG}}\rangle^{1/2}} . \quad (2.16)$$

L'operatore F , che agendo sullo stato $|n_{\text{FG}}\rangle$ genera la struttura di correlazione indotta dall'interazione NN, si scrive nella forma

$$F(1, \dots, N) = \mathcal{S} \prod_{j>i=1}^N f_{ij} , \quad (2.17)$$

dove $\mathcal{S}$ è l'operatore di simmetrizzazione che tiene conto del fatto che in generale

$$[f_{ij}, f_{ik}] \neq 0 . \quad (2.18)$$

La struttura delle *funzioni di correlazione* f_{ij} deve ricalcare quella del potenziale NN. Si utilizza quindi l'espressione (si confronti con l'Eq.(2.11))

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^6 f^n(r_{ij}) O_{ij}^n , \quad (2.19)$$

in cui abbiamo incluso solamente i primi sei operatori descritti nella Sezione precedente, che come abbiamo già ricordato sono sufficienti per riprodurre le caratteristiche principali del deutone. Le parti radiali della funzione di correlazione, cioè le $f^n(r_{ij})$ vengono calcolate sfruttando il principio variazionale di Ritz, ovvero minimizzando il valor medio dell'hamiltoniana nello stato fondamentale della base correlata

$$\langle H \rangle = \langle 0|H|0 \rangle \geq E_0 , \quad (2.20)$$

imponendo come condizioni al contorno che $f^n \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0$ e che per $r \rightarrow \infty$ solamente la $f^1(r)$ tenda ad uno, mentre tutte le altre si annullino.

Le funzioni radiali ottenute per la materia nucleare simmetrica alla densità di equilibrio sono mostrate in Fig. 2.5. Si osserva come per piccole distanze r fra i nucleoni interagenti la funzione di correlazione tenda a diventare molto piccola. In particolare, per coppie con

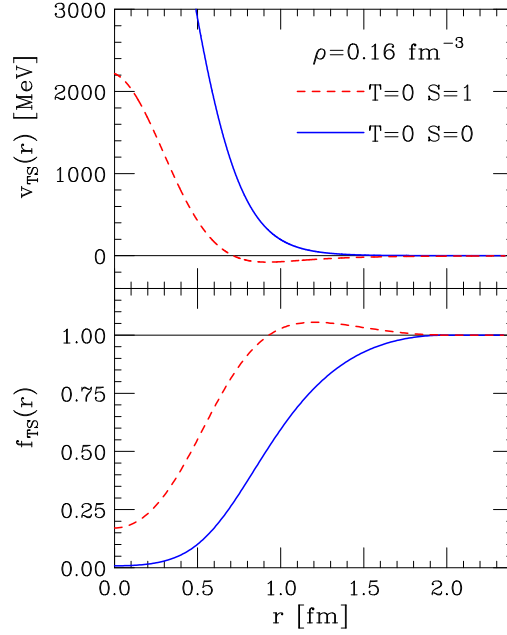


Figura 2.5: Potenziale di interazione ANL v_{18} (pannello superiore) e funzioni di correlazione f_{TS} (pannello inferiore) in funzione della distanza r fra i nucleoni.

spin e isospin totali pari a $S = 0$ e $T = 0$ la funzione si annulla totalmente, poichè il potenziale corrispondente ha un core repulsivo grande ed esteso. Nel caso in cui $S = 1$ e $T = 0$ invece, ovvero nello stato del deutone, la parte repulsiva del potenziale è meno pronunciata, e seguita da una parte attrattiva. Di conseguenza la funzione di correlazione tende ad un valore piccolo ma non nullo nell'origine, e supera l'unità a medio raggio.

Si noti che gli stati nella base correlata non sono ortogonali, ma possono essere ortogonalizzati tramite una apposita trasformazione [21]. Nella base così definita si calcolano gli elementi della matrice hamiltoniana, convenientemente posta nella forma

$$H = H_0 + H_I, \quad (2.21)$$

dove con H_0 e H_I si intendono la parte diagonale e quella non-diagonale, ovvero

$$\begin{aligned} \langle m|H_0|n\rangle &= \delta_{mn}\langle m|H|n\rangle, \\ \langle m|H_I|n\rangle &= (1 - \delta_{mn})\langle m|H|n\rangle, \end{aligned} \quad (2.22)$$

dove gli $|m\rangle$ sono gli stati della base correlata ortogonalizzati. Se le funzioni di correlazione f_{ij} sono state scelte in maniera opportuna, allora gli stati della base correlata si sovrappongono largamente con gli autostati dell'hamiltoniana H ; ne consegue che gli elementi di matrice di H_I sono piccoli, e quindi lo sviluppo perturbativo di una qualsiasi osservabile in serie di potenze di H_I è convergente.

2.3.2 Formalismo dell'espansione in clusters

A questo punto resta ancora aperto il problema di calcolare gli elementi di matrice di un operatore a molti corpi fra stati correlati.

L'operatore di correlazione F definito nella (2.17) è costruito in maniera tale che se un qualunque sottoinsieme di particelle viene portato a grande distanza dal resto del sistema esso si fattorizza secondo la

$$F(1, \dots, N) \rightarrow F_p(i_1, \dots, i_p) F_{N-p}(i_{p+1}, \dots, i_N) . \quad (2.23)$$

Questa proprietà è la base del formalismo dell'espansione in clusters [22], che consente di scrivere gli elementi di matrice di un operatore a molti corpi fra stati correlati come la somma di termini derivanti da sottosistemi isolati, contenenti un numero sempre crescente di particelle. Tralasciando la dimostrazione di questo sviluppo, diamo qui solo il risultato che abbiamo utilizzato, che permette di scrivere il valor medio dell'operatore hamiltoniano nello stato fondamentale del sistema come

$$\langle H \rangle = T_0 + (\Delta E)_2 + (\Delta E)_3 + \dots + (\Delta E)_N , \quad (2.24)$$

dove T_0 è l'energia dello stato fondamentale del gas di Fermi e $(\Delta E)_i$ rappresenta il contributo all'energia del cluster di n corpi. Benché il contributo $(\Delta E)_2$ sia quello dominante, in generale quello dei clusters con più di due nucleoni non è trascurabile. Questi contributi possono essere sommati risolvendo un sistema di equazioni integrali dette Fermi-Hyper-Netted-Chain (FHNC) [22].

2.4 Il potenziale effettivo

Definiamo ora un potenziale efficace che agisce fra due nucleoni attraverso la relazione (si confronti con la (2.24)):

$$\begin{aligned}\langle H \rangle &= \langle 0|H|0 \rangle \approx T_0 + (\Delta E)_2 \\ &= \langle 0_{FG}|T_0 + V_{\text{eff}}|0_{FG} \rangle .\end{aligned}\quad (2.25)$$

Senza riportare la dimostrazione, presentata in dettaglio in [23] diamo qui la forma esplicita del termine $(\Delta E)_2$ che, secondo la (2.25), permette di ottenere il potenziale efficace. Dalla

$$(\Delta E)_2 = \frac{A(A-1)}{2} \sum_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j} \langle \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j | v_{\text{eff}}(12) | \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j \rangle_a , \quad (2.26)$$

dove la somma è estesa agli stati occupati all'interno del mare di Fermi a la notazione $|\dots\rangle_a$ si riferisce al fatto che lo stato $|\dots\rangle$ è antisimmetrizzato, segue immediatamente che

$$V_{\text{eff}} = \sum_{i < j} v_{\text{eff}}(ij) = \sum_{i < j} f_{ij} \left[-\frac{1}{m} (\nabla^2 f_{ij}) - \frac{2}{m} (\nabla f_{ij}) \cdot \nabla + v(ij) f_{ij} \right] . \quad (2.27)$$

La (2.27) mostra chiaramente che il potenziale effettivo tiene conto dell'effetto di schermo dell'interazione nuda dovuto alle correlazioni, la cui inclusione tramite le funzioni f_{ij} dà anche origine ad un contributo puramente cinetico. Nel limite di densità nulla, l'interazione effettiva ottenuta dal formalismo CBF si riduce ad un potenziale realistico, il potenziale Argonne v'_8 , che riproduce i dati sul sistema NN.

Il confronto tra il potenziale nudo e quello effettivo, illustrato nella Fig. 2.6, mostra che quest'ultimo ha un andamento regolare, ed è quindi adeguato per effettuare calcoli di un gran numero di proprietà della materia nucleare utilizzando la teoria delle perturbazioni ad ordine basso nella base del FG.

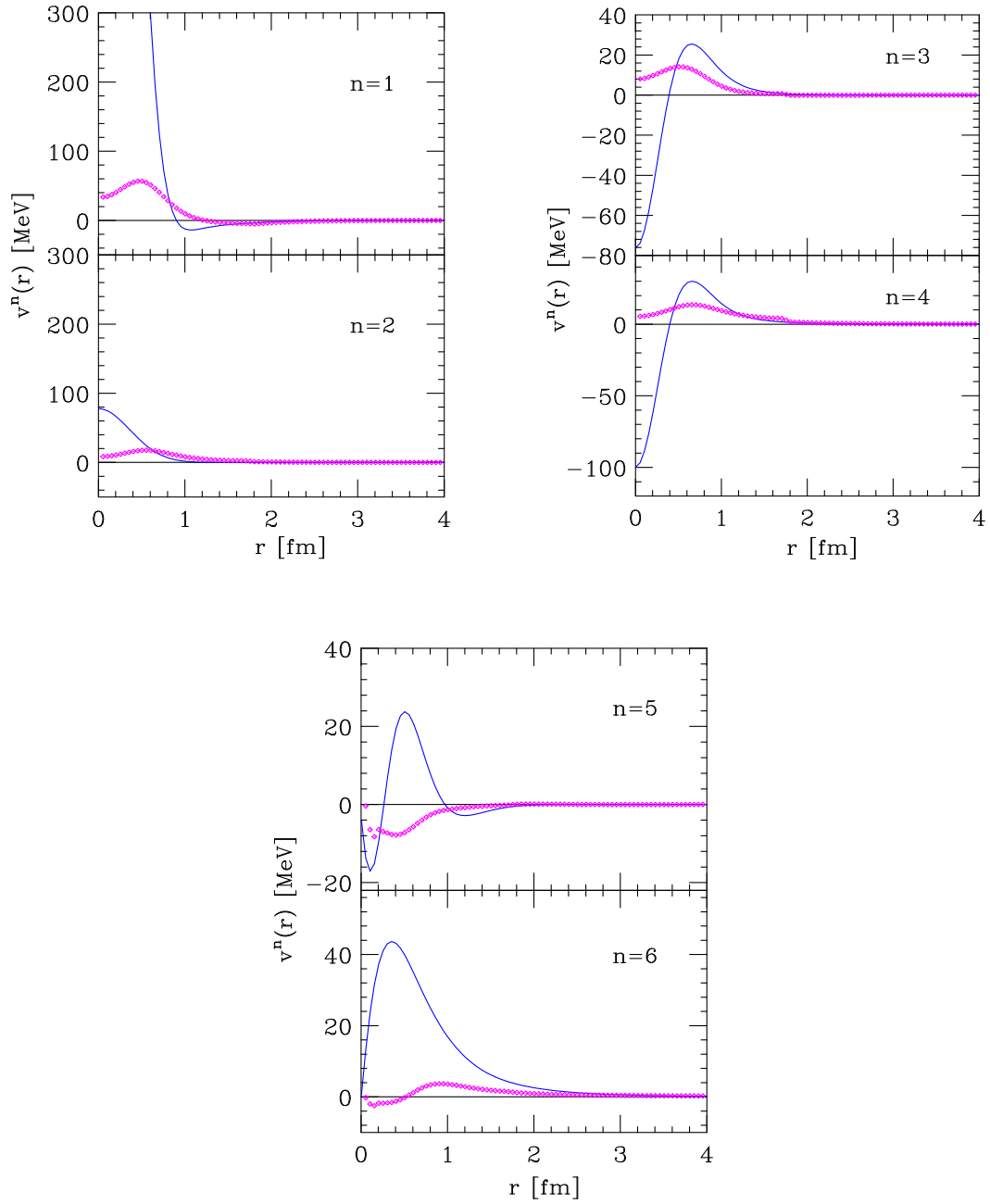


Figura 2.6: Confronto tra le componenti del potenziale Argonne v'_8 (linee continue) e il potenziale effettivo definito dalla Eq.(2.27) (rombi), calcolato alla densità di equilibrio della materia nucleare.

Dal punto di vista metodologico, il nostro approccio può essere visto come una *teoria effettiva*, in quanto è costruito per riprodurre le proprietà empiriche della materia nucleare ad un ordine basso di un certo schema di approssimazione.

In v_{eff} è presente una dipendenza dall'impulso dovuta al secondo termine del membro destro della (2.27); dai risultati di calcoli numerici questo contributo risulta essere molto piccolo e lo abbiamo quindi trascurato [10]. Inoltre, nei calcoli della viscosità abbiamo utilizzato nella (2.27) la sola parte statica del potenziale Argonne v'_8 . Il potenziale effettivo risultante si può dunque scrivere nella forma

$$v_{\text{eff}}(ij) = f_{ij} \left(-\frac{1}{m} \nabla^2 + v(ij) \right) f_{ij} = \sum_{n=1}^6 v_{\text{eff}}^n(r_{ij}) O_{ij}^n . \quad (2.28)$$

L'inclusione di un termine che descriva l'interazione di tre nucleoni è necessario, oltre che per ottenere i valori sperimentali delle energie di legame dei sistemi di tre nucleoni, anche per riprodurre le proprietà empiriche di saturazione della materia nucleare. In [10], il contributo dell'interazione a tre nucleoni è stato introdotto nel potenziale effettivo variando, in modo dipendente dalla densità, la parte a medio raggio dell'interazione a due corpi, in cui prevale il processo di scambio di due pioni, così da simulare una forza a tre e più corpi. Secondo questo approccio, proposto per la prima volta da Lagaris e Pandharipande [24], il potenziale effettivo viene quindi scritto sostituendo nella (2.27)

$$v(ij) \rightarrow \tilde{v}(ij) = \sum [v_{\pi}^n(r_{ij}) + v_I^n(r_{ij})e^{-\gamma_1\rho} + v_S^n(r_{ij})] O_{ij}^n , \quad (2.29)$$

dove i termini v_{π}^n , v_I^n e v_S^n rappresentano i contributi a lungo, medio e corto raggio del potenziale. Sempre seguendo Lagaris e Phandaripande, si introduce inoltre il piccolo contributo attrattivo all'energia

$$\Delta E = \gamma_2 \rho^2 (3 - 2\beta) e^{-\gamma_3 \rho} , \quad (2.30)$$

dove $\beta = (\rho_p - \rho_n)/(\rho_p + \rho_n)$, ρ_n e ρ_p rappresentano rispettivamente la densità di neutroni e protoni. I valori dei parametri γ_1, γ_2 e γ_3 sono scelti in maniera tale da riprodurre l'energia di legame e la densità di equilibrio della materia nucleare.

2.5 Energia di legame della materia nucleare

Come abbiamo già detto, usando il potenziale effettivo possiamo calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale del FG direttamente nella cornice della teoria delle perturbazioni. Il passaggio attraverso il formalismo della base correlata e lo sviluppo in clusters ci ha infatti permesso di definire un'interazione da cui sono scomparse le singolarità dovute alla regione repulsiva a piccole distanze.

Il potenziale efficace così ottenuto è stato testato calcolando l'energia di legame per particella della materia nucleare simmetrica e materia puramente neutronica (PNM) in approssimazione di Hartree-Fock

Se consideriamo materia nucleare a densità

$$\rho = \sum_{\lambda=1}^4 \rho_{\lambda} , \quad (2.31)$$

dove con $\lambda = 1, 2, 3, 4$ indichiamo, rispettivamente, protoni con spin-up e spin-down e neutroni con spin-up e spin-down, con densità date da $\rho_{\lambda} = x_{\lambda}\rho$, possiamo scrivere

$$\frac{E}{A} = \frac{3}{5} \sum_{\lambda} x_{\lambda} \frac{p_F^{\lambda 2}}{2m} + \frac{\rho}{2} \sum_{\lambda\mu} \sum_n x_{\lambda} x_{\mu} \int d^3r v_{\text{eff}}^n [A_{\lambda\mu}^n - B_{\lambda\mu}^n \ell(p_F^{\lambda} r) \ell(p_F^{\mu} r)] . \quad (2.32)$$

I momenti di Fermi che compaiono nella (2.32) sono dati da $p_F^{\lambda} = (6\pi^2 \rho_{\lambda})^{1/3}$, mentre ℓ rappresenta la funzione di Slater

$$\ell(p_F^{\lambda} r) = \frac{1}{N_{\lambda}} \sum_{|\mathbf{p}| \leq \mathbf{p}_F^{\lambda}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} , \quad (2.33)$$

dove N_{λ} è il numero di particelle di tipo λ . Gli $A_{\lambda\mu}^n$ e $B_{\lambda\mu}^n$ rappresentano gli elementi di matrice degli operatori O^n dati dalla (2.12) tra gli stati di spin e spin isotopico di due nucleoni, $|\lambda\mu\rangle$, ovvero

$$A_{\lambda\mu}^n = \langle \lambda\mu | O^n | \lambda\mu \rangle , \quad B_{\lambda\mu}^n = \langle \lambda\mu | O^n | \mu\lambda \rangle . \quad (2.34)$$

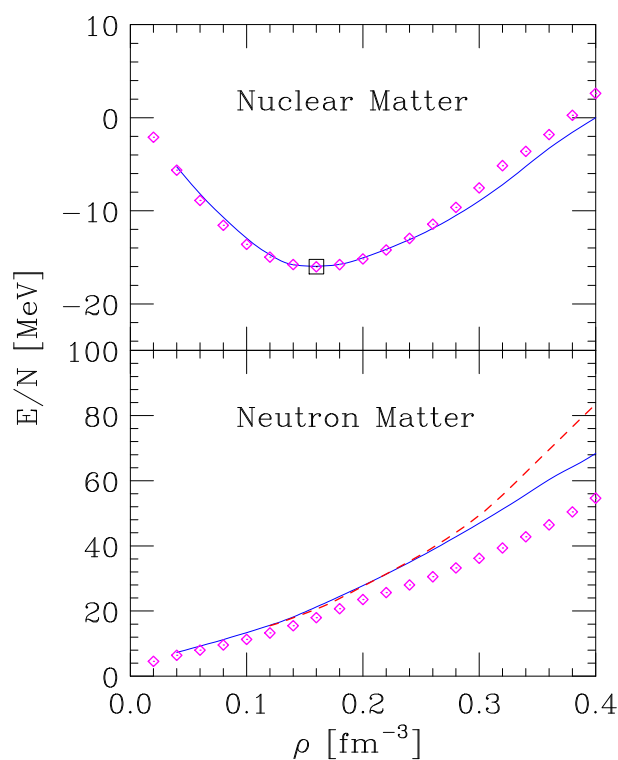


Figura 2.7: Energia per particella della materia nucleare simmetrica (SNM, pannello superiore) e materia puramente neutronica (PNM, pannello inferiore) in funzione della densità barionica. Le linee continue rappresentano i risultati ottenuti usando (2.32), mentre i rombi corrispondono ai risultati di Akmal, Pandharipande e Ravenhall [25]. La linea tratteggiata del pannello inferiore rappresenta i risultati del metodo AFDMC [26]. Il quadrato nel pannello superiore mostra il punto di saturazione empirico della materia nucleare simmetrica.

Nella Fig.2.7 l'energia per particella ottenuta con la (2.32) (linee continue) viene paragonata con quella ottenuta usando metodi diversi. Nel caso della SNM (pannello superiore) e della PNM (pannello inferiore). I risultati rappresentati dai rombi sono stati ottenuti effettuando un calcolo variazionale con una funzione d'onda correlata, il potenziale Argonne v_{18} e il potenziale a tre corpi Urbana IX [25]. La linea tratteggiata nel pannello inferiore mostra i risultati di un calcolo in cui si è usata la stessa hamiltoniana del caso precedente ma con il metodo chiamato AFDMC, *Auxiliary Field Diffusion Monte Carlo* [26]. Si osserva come l'approccio considerato in questa sezione, cioè un semplice calcolo in approssimazione di Hartree-Fock, reso possibile dall'uso del potenziale effettivo, predica un'equazione di stato in soddisfacente accordo con quella ottenuta da approcci alternativi basati su modelli dinamici simili.

Capitolo 3

Teoria di Landau e proprietà di trasporto per liquidi normali di Fermi

La teoria nucleare a molti corpi è stata usata con successo per lo studio delle proprietà di equilibrio della materia nucleare, come abbiamo sommariamente illustrato nel Capitolo precedente. In particolare è stata calcolata, utilizzando modelli dinamici realistici, l'equazione di stato della materia nucleare β -stabile a temperatura nulla. D'altra parte, l'estensione di questi studi al comportamento fuori dell'equilibrio, presenta difficoltà non banali. Di conseguenza, molti risultati disponibili in letteratura sono stati ottenuti limitandosi a descrizioni eccessivamente semplificate dell'interazione nucleone-nucleone, e/o utilizzando drastiche approssimazioni.

L'analisi delle proprietà di trasporto (cioè dei coefficienti di viscosità e conducibilità termica ed elettrica) si basa sulla soluzione dell'equazione di Boltzmann [27]. Nel caso della materia nucleare si utilizza l'equazione di Boltzmann-Landau (BL) [28], non di molto differente da quella classica, ottenuta nell'ambito della teoria di Landau dei liquidi di Fermi normali. Nel nostro calcolo combiniamo il formalismo dell'equazione BL e quello della teoria nucleare a molti corpi, che abbiamo utilizzato per derivare la forma dell'interazione effettiva tra i nucleoni, che ne determina le probabilità di collisione.

3.1 Teoria di Landau

Nel 1956 Landau propose una teoria semifenomenologica dei liquidi normali di Fermi [29], ovvero fluidi di fermioni interagenti a temperature prossime allo zero assoluto. Già nei primi anni sessanta, la validità di questa teoria fu verificata sperimentalmente grazie all'osservazione delle proprietà dell' ^3He liquido, che erano sostanzialmente differenti da quelle predette dalla teoria dei gas di Fermi.

Scopo principale della teoria di Landau è la descrizione delle proprietà termodinamiche dei liquidi di Fermi, come il calore specifico, la compressibilità e la suscettività magnetica; le proprietà di trasporto, come la viscosità, la conducibilità termica e il coefficiente di diffusione di spin, e i moti collettivi caratterizzati da grandi lunghezze d'onda e basse frequenze [28]. La teoria di Landau fornisce una procedura molto efficiente per parametrizzare le proprietà dei liquidi di Fermi (FL) in funzione di un piccolo numero di parametri, collegando inoltre fra loro quantità misurate sperimentalmente. Oltre che all' ^3He liquido, la teoria di Landau è stata applicata con successo a miscele di ^3He e ^4He , alla materia nucleare e ai liquidi elettronici nei metalli.

3.1.1 Quasiparticelle

Consideriamo in primo luogo il gas di Fermi nel caso non interagente, in particolare un sistema di N particelle in un volume V tali che $N, V \rightarrow \infty$ e la densità $\rho = N/V$ sia fissata. Lo stato quantistico di singola particella è descritto dall'impulso $\mathbf{p}$ e dallo spin σ e il valore dell'energia totale del sistema complessivo si può esprimere in termini dei numeri di occupazione $n_{\mathbf{p}\sigma} = 0, 1$

$$E = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \epsilon_{\mathbf{p}\sigma} n_{\mathbf{p}\sigma} . \quad (3.1)$$

Assumendo che l'energia dello stato $\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}$ non dipenda dallo spin possiamo omettere l'indice σ ed effettuare direttamente la somma sugli spin, il cui risultato è la comparsa di un fattore

due. Ovviamente il numero totale di particelle è dato da

$$N = 2 \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} . \quad (3.2)$$

A temperatura $T = 0$ otteniamo il valore dell'energia dello stato fondamentale, in cui tutti gli stati di singola particella con impulso minore dell'impulso di Fermi p_f sono occupati, mentre tutti quelli con impulso maggiore di p_f sono vuoti. Per temperature fissate $T \neq 0$ si avranno degli stati eccitati, detti anche eccitazioni elementari, con impulso maggiore di p_f e delle buche, cioè stati non occupati, al di sotto della superficie di Fermi con impulso minore di p_f . Quando il sistema si trova all'equilibrio, la distribuzione delle particelle $n_{\mathbf{p}}$ nello spazio dell'energia assume la forma [27]

$$n_{\mathbf{p}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} + 1} , \quad (3.3)$$

che mostra come a temperature finite il salto della distribuzione da 1 a 0 avviene su un range di energie $\beta = 1/T$ attorno al potenziale chimico μ .

Consideriamo ora un sistema interagente. L'assunzione di poter creare liberamente particelle eccitate o buche non è più così ovvia, poichè lo stato di singola particella è influenzato dal resto del sistema e viceversa. L'idea fondamentale alla base della teoria di Landau è il considerare il sistema interagente a partire dal caso in cui le interazioni siano spente, e di accenderle adiabaticamente in modo tale che ogni stato del sistema non interagente corrisponda in maniera univoca ad uno stato del sistema interagente. Le eccitazioni elementari di un liquido normale di Fermi ottenute secondo questa procedura furono definite da Landau *quasiparticelle*. Il punto fondamentale è che queste eccitazioni non interessano più solo una particella, ma appartengono al sistema nella sua totalità.

Si noti che la condizione di bassa temperatura è una condizione necessaria, poichè il concetto di eccitazione elementare ha senso solamente per energie della quasiparticella, ϵ , prossime all'energia di Fermi. Infatti, tenendo conto delle leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso, si dimostra che la probabilità di decadimento di uno stato di

quasiparticella con energia ϵ è proporzionale a $|\epsilon - \epsilon_F|^2$. Dunque solamente gli stati con energia attorno a ϵ_F hanno vita media abbastanza lunga da essere considerati come stati stazionari [30].

Come abbiamo detto, la base della teoria di Landau è l'assunzione che lo spettro d'eccitazione di un liquido di Fermi sia ottenibile da quello di un gas ideale di Fermi. Se quindi aggiungiamo al nostro sistema una quasiparticella con energia $\epsilon_{\mathbf{p}} > \epsilon_F$, essa causerà una variazione nella funzione di distribuzione $n_{\mathbf{p}}$, che rappresenta ora la funzione di distribuzione delle quasiparticelle, e dunque una variazione dell'energia complessiva del sistema¹

$$\delta E = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}} , \quad (3.4)$$

mentre l'entropia è data dalla

$$S = - \sum_{\mathbf{p}} [n_{\mathbf{p}} \ln(n_{\mathbf{p}}) + (1 - n_{\mathbf{p}}) \ln(1 - n_{\mathbf{p}})] . \quad (3.5)$$

La formula (3.5) scaturisce direttamente dall'ipotesi effettuata, secondo cui i livelli energetici di quasiparticella sono classificati esattamente come i livelli energetici delle particelle in un gas ideale.

Il numero totale delle quasiparticelle è dato sempre da (3.2), e ricordando che una piccola variazione nell'energia di sistema rispetto ad uno stato di equilibrio termodinamico si può scrivere come

$$\delta E = T \delta s + \mu \delta n , \quad (3.6)$$

possiamo variare (3.2) e (3.5) rispetto a un piccolo scostamento $\delta n_{\mathbf{p}}$ della funzione di distribuzione dal suo valore di equilibrio, e senza troppe difficoltà ottenere la funzione di distribuzione delle quasiparticelle per una certa temperatura T

$$n_{\mathbf{p}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} + 1} . \quad (3.7)$$

¹Nel seguito, quando non strettamente necessario, ometteremo il fattore moltiplicativo associato alla degenerazione di spin.

Questa espressione concide esattamente con la (3.3). L'unica importante differenza è che ora l'energia dello stato di singola quasiparticella dipende essa stessa dalla funzione di distribuzione $n_{\mathbf{p}}$. Quindi la (3.7) è di fatto una complicata equazione implicita per la funzione di distribuzione.

3.1.2 Parametri di Landau

L'elemento chiave per trattare proprietà fisiche di ogni tipo è ovviamente lo spettro energetico del sistema. Dalla teoria di Landau risulta che possiamo classificare gli stati di eccitazione più bassi in maniera chiara e conveniente [31]. È come se considerassimo, nel caso di un sistema interagente, una Hamiltoniana ridotta

$$H = E^0 + H_{q.p.} + H_{q.p.int.} , \quad (3.8)$$

dove E^0 è l'energia dello stato fondamentale del sistema complessivo, cioè una costante che non ci interessa conoscere, $H_{q.p.}$ descrive il moto di un certo numero di quasiparticelle indipendenti, e $H_{q.p.int.}$ le loro interazioni.

Se consideriamo un sistema nel suo stato fondamentale, ed aggiungiamo una singola quasiparticella con energia $\epsilon_{\mathbf{p}}$ nell'intorno della superficie di Fermi, possiamo scrivere l'energia di questa quasiparticella come

$$\epsilon_{\mathbf{p}}^0 = \mu + v_f(p - p_f) , \quad (3.9)$$

dove l'apice 0 sta ad indicare il fatto che consideriamo una singola quasiparticella presente nel sistema, come se la (3.9) fosse la sua energia in condizioni di isolamento. Possiamo quindi definire la velocità delle quasiparticelle sulla superficie di Fermi come

$$v_f = \left(\frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}^0}{\partial p} \right)_{p=p_f} . \quad (3.10)$$

Nel caso in cui siano presenti più quasiparticelle, dobbiamo considerare il fatto che esse interagiscono fra loro, e dunque l'energia vera della quasiparticella è diversa dalla (3.9), e

vale

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \epsilon_{\mathbf{p}}^0 + \delta\epsilon_{\mathbf{p}} . \quad (3.11)$$

Ricordando che l'aggiunta di una o più quasiparticelle causa la variazione della funzione di distribuzione $n_{\mathbf{p}}$, e conseguentemente del valore dell'energia complessiva del sistema (3.4), possiamo scrivere

$$E = E^0 + \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}}^0 \delta n_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}'} , \quad (3.12)$$

che si ottiene dalla (3.11) con

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \epsilon_{\mathbf{p}}^0 + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'} . \quad (3.13)$$

La quantità $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ è l'energia dovuta all'interazione fra una quasiparticella di impulso $\mathbf{p}$ e una di impulso $\mathbf{p}'$, e, facendo riferimento alla (3.12), può essere posta nella forma

$$f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \frac{\partial^2 E}{\partial \delta n_{\mathbf{p}} \partial \delta n_{\mathbf{p}'}} , \quad (3.14)$$

che mostra come l'energia di interazione fra le quasiparticelle sia essa stessa funzione della funzione di distribuzione delle quasiparticelle.

Anche se fino ad ora non abbiamo considerato lo spin delle quasiparticelle, a basse temperature l'interazione dovuta agli spin può essere rilevante; se l'interazione è invariante sotto rotazioni dello spin, possiamo scriverla nella forma

$$f_{\sigma\mathbf{p},\sigma'\mathbf{p}'} = f_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^s + f_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^a (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}') , \quad (3.15)$$

dove

$$f_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{s,a} = \frac{f_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{\uparrow\uparrow} \pm f_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{\uparrow\downarrow}}{2} . \quad (3.16)$$

Queste quantità hanno le dimensioni di un'energia. Se quindi li moltiplichiamo per la densità $N(0)$ degli stati sulla superficie di Fermi² otteniamo le grandezze adimensionali

$$N(0)f_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{s,a} \equiv F_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{s,a} . \quad (3.17)$$

²Per basse temperature solo gli stati nelle immediate vicinanze della superficie di Fermi sono rilevanti.

Questi parametri, detti *Parametri di Landau*, incorporano complessivamente l'interazione dovuta alle quasiparticelle e non possono essere determinati dalla teoria, ma solo sperimentalmente. L'analisi delle correzioni dovute a questi parametri esula dal nostro studio poichè, come precedentemente affermato, nel limite di basse temperature possiamo considerare il nostro sistema come un gas ideale di quasiparticelle. Nel nostro caso le correzioni compaiono solamente nelle proprietà di equilibrio del nostro sistema. In particolare osserviamo che, facendo riferimento alla (3.9), possiamo scrivere

$$\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_F \equiv \frac{\mathbf{p}^2}{2m^*} \approx v_F(p - p_F) , \quad (3.18)$$

dove abbiamo introdotto la massa effettiva m^* , definita dalla

$$v_F \equiv \left(\frac{\partial \epsilon_p}{\partial p} \right)_{p=p_F} = \frac{p_F}{m^*} . \quad (3.19)$$

Il valore della massa effettiva m^* incorpora l'effetto delle interazioni fra le quasiparticelle ed è legato alla massa nuda m attraverso i parametri di Landau.

3.2 Proprietà di trasporto

Siamo interessati allo studio del comportamento di un liquido di Fermi in stati di non equilibrio e disomogeneità, che differiscano leggermente da uno stato di equilibrio del sistema complessivo. Il modo più semplice per descrivere lo stato del liquido sarebbe specificare la distribuzione $n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ in funzione delle coordinate spazio-temporali e dell'impulso [27]. A causa del principio di indeterminazione di Heisenberg, sorge però a questo punto il dubbio sulla possibilità di tale descrizione, visto che nel regime che vogliamo studiare non possiamo in alcun modo trascurare gli effetti quantistici. In generale, localizzare le particelle contemporaneamente nello spazio delle coordinate e in quello degli impulsi è dunque impossibile.

Se tuttavia la disomogeneità spaziale del sistema avviene su una scala di lunghezza caratteristica λ , allora le particelle sono localizzate nello spazio solo entro una lunghezza

$\Delta r = \lambda$. Inoltre, se il sistema è a temperatura T , la funzione di distribuzione nello spazio degli impulsi varia di una larghezza caratteristica T/v_F , e di conseguenza le particelle sono localizzate nello spazio dei momenti entro una larghezza $\Delta p = T/v_F$. Quindi, secondo il principio di indeterminazione, se è soddisfatta la disuguaglianza $\Delta r \Delta p \gg 1$, ovvero

$$\Delta r \gg \frac{v_F}{T} , \quad (3.20)$$

possiamo senza alcun problema trattare la funzione di distribuzione $n_{\mathbf{p}}$ classicamente [28].

3.2.1 Equazione di Boltzmann-Landau

Se possiamo considerare la funzione di distribuzione delle quasiparticelle $n_{\mathbf{p}}$ in maniera classica, la sua dipendenza spazio-temporale è descritta da una equazione cinetica non molto differente dall'equazione di Boltzmann per i fluidi classici [27]: *l'equazione di Boltzmann-Landau* [28]. Questa equazione si può scrivere nella forma

$$\frac{dn_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{dt} = I[n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)] , \quad (3.21)$$

dove il membro di destra è l'integrale delle collisioni, che discuteremo in dettaglio più avanti. Tenendo conto della dipendenza della funzione di distribuzione dalle coordinate spazio-temporali e dall'impulso, possiamo anche riscriverla come

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{p}} = I[n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)] , \quad (3.22)$$

dove

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \quad , \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (3.23)$$

sono, rispettivamente, la velocità di gruppo delle quasiparticelle e la forza generalizzata dovuta al fatto che il sistema non si trova all'equilibrio. L'assunzione fondamentale fatta da Landau è considerare l'energia $\epsilon_{\mathbf{p}}$ come l'Hamiltoniana di quasiparticella, e dunque nello scrivere le equazioni del moto per la quasiparticella come

$$\frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \quad , \quad \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} = -\mathbf{F} . \quad (3.24)$$

Possiamo quindi riscrivere l'equazione di Boltzmann-Landau [28, 32] nella forma

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{p}} = I[n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)] . \quad (3.25)$$

Questa equazione è più “ricca” della già citata equazione di Boltzmann, utilizzata per descrivere gas debolmente interagenti nel caso classico. Per prima cosa, la velocità di quasiparticella $\nabla_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}}$ dipende dalle coordinate spaziotemporali; inoltre, la quantità $\nabla_{\mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{p}}$ contiene le correzioni all'energia dovute alle interazioni fra quasiparticelle, ovvero, facendo riferimento alla (3.13) e passando al continuo

$$\nabla_{\mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{p}} = V \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \nabla_{\mathbf{r}} n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}, t) . \quad (3.26)$$

Essendo interessati a situazioni di poco diverse dall'equilibrio, possiamo linearizzare l'equazione (3.25) in $\delta n_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{p}}^0$, la deviazione della funzione di distribuzione da quella d'equilibrio globale, otteniamo così

$$\frac{\partial \delta n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left(\delta n_{\mathbf{p}} - \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^0}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} \delta \epsilon_{\mathbf{p}} \right) = I[\delta n_{\mathbf{p}}] . \quad (3.27)$$

Dobbiamo a questo punto fare una piccola precisazione su cosa si intende per funzione di distribuzione delle quasiparticelle all'equilibrio. Abbiamo infatti considerato la deviazione della funzione di distribuzione dal valore all'equilibrio, dove con equilibrio si intende il sistema a $T = 0$. In effetti però il sistema si trova in uno stato di equilibrio termodinamico per ogni temperatura T , e quindi possiamo definire una funzione di distribuzione di equilibrio *locale*

$$n(\epsilon_{\mathbf{p}}, \mathbf{r}, t) = \left[\exp \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{p}} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mu(\mathbf{r}, t)}{T(\mathbf{r}, t)} \right) + 1 \right]^{-1} , \quad (3.28)$$

che descrive il fatto che il sistema è localmente all'equilibrio per una temperatura locale $T(\mathbf{r}, t)$, con un potenziale chimico locale $\mu(\mathbf{r}, t)$ e una velocità locale del liquido $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Dunque possiamo definire la deviazione della funzione di distribuzione dal suo valore

all'equilibrio localmente come

$$\delta\tilde{n}_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) - n^0(\epsilon) , \quad (3.29)$$

dove con $n^0(\epsilon)$ ci riferiamo alla (3.28). Questo valore può essere sviluppato attorno al suo valore di equilibrio globale secondo la

$$n^0(\epsilon) = n^0(\epsilon^0) + \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon} \delta\epsilon \quad (3.30)$$

e sostituendo la (3.30) nella (3.29) otteniamo

$$\delta\tilde{n}_{\mathbf{p}} = \delta n_{\mathbf{p}} - \frac{\partial n^0}{\partial \epsilon} V \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'} , \quad (3.31)$$

dove il termine $\delta\epsilon$ è stato scritto in maniera estesa secondo la (3.13). Possiamo quindi riscrivere la (3.27) nella forma

$$\frac{\partial \delta n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta\tilde{n}_{\mathbf{p}} = I[\delta\tilde{n}_{\mathbf{p}}] . \quad (3.32)$$

Ricordando ancora una volta che stiamo considerando piccole deviazioni del sistema dalla situazione di equilibrio, e che nel limite di basse temperature possiamo considerare il nostro sistema come un sistema di quasiparticelle indipendenti, possiamo trascurare la correzione all'energia dovuta all'interazione fra quest'ultime, e scrivere infine

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}} = I[\delta n_{\mathbf{p}}] . \quad (3.33)$$

L'equazione cinetica è lo strumento necessario per calcolare i coefficienti di trasporto, fra cui la viscosità che sarà l'obiettivo del nostro discorso. Per procedere al calcolo esplicito dobbiamo però prima specificare le proprietà del secondo membro della (3.33), cioè l'integrale delle collisioni.

A basse temperature possiamo considerare unicamente le collisioni binarie fra le quasiparticelle. Facendo uso della regola d'oro di Fermi, la probabilità di transizione di due quasiparticelle da uno stato $|\mathbf{p}_1\sigma_1, \mathbf{p}_2, \sigma_2\rangle$ ad uno stato $|\mathbf{p}_3\sigma_3, \mathbf{p}_4, \sigma_4\rangle$ è data da

$$2\pi |\langle 34|t|12\rangle|^2 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) n_1 n_2 (1 - n_3)(1 - n_4) , \quad (3.34)$$

dove la funzione δ esprime la conservazione dell'energia nel processo di collisione, n_i è la probabilità di occupazione dello stato della quasiparticella incidente e $(1 - n_i)$ la probabilità che lo stato finale sia non occupato. Possiamo poi definire una probabilità di transizione $W(12; 34)$ scrivendo

$$2\pi |\langle 34|t|12\rangle|^2 = \frac{1}{V^2} W(12; 34) \delta_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4} \delta_{\sigma_1+\sigma_2, \sigma_3+\sigma_4} , \quad (3.35)$$

dove le funzioni δ esprimono la conservazione dell'impulso e delle proiezioni dello spin.

A questo punto possiamo definire $I[n_1]$. Esso rappresenta il tasso con cui le collisioni aumentano la probabilità di occupazione dello stato di quasiparticella $|\mathbf{p}_1\sigma_1\rangle$ grazie al processo inverso $3, 4 \longrightarrow 1, 2$, diminuito del valore dovuto al processo diretto $1, 2 \longrightarrow 3, 4$, sommato su tutti gli stati 2 e tutti gli stati distinguibili 3 e 4. L'espressione esplicita è

$$\begin{aligned} I[n_1] &= \frac{1}{V^2} \sum_2 \sum_{34} W(12; 34) \delta_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4} \delta_{\sigma_1+\sigma_2, \sigma_3+\sigma_4} \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) \\ &\quad \times [n_3 n_4 (1 - n_1)(1 - n_2) - n_1 n_2 (1 - n_3)(1 - n_4)] . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Dobbiamo infine linearizzare questa espressione in $\delta n_{\mathbf{p}}$, come abbiamo fatto per il membro di sinistra della (3.25). Tenendo sempre bene a mente quanto detto sul concetto di equilibrio locale e globale, dobbiamo ora tener conto del fatto che la (3.36) si annulla per ogni valore d'equilibrio di $n_{\mathbf{p}}$ valutato localmente. Quindi, se definiamo la deviazione da quest'ultima all'equilibrio locale come

$$\delta n_i \equiv -\frac{\partial n_i^0}{\partial \epsilon_i} \Phi_i , \quad (3.37)$$

possiamo riscrivere la (3.36) nella forma [28]

$$\begin{aligned} I[\delta n_1] &= -\frac{1}{TV^2} \sum_2 \sum_{34} (n_1 n_2 (1 - n_3)(1 - n_4)) W(12; 34) \delta_{\sigma_1+\sigma_2, \sigma_3+\sigma_4} \\ &\quad \times \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) [\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 - \Phi_4] . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Il calcolo esplicito della probabilità di transizione W , che richiede la conoscenza dei potenziali di interazione tra le particelle del fluido, sarà descritto più avanti.

Si noti che la deviazione della funzione di distribuzione dal suo valore all'equilibrio è stata scritta secondo la (3.37) poichè in questo modo δn viene fattorizzata in una parte singolare, la derivata negativa della funzione di distribuzione all'equilibrio (che tende ad una funzione delta per $T \rightarrow 0$), e una parte regolare Φ . Questo accorgimento matematico è molto conveniente per risolvere l'equazione del trasporto.

3.2.2 Equazione del moto per fluidi viscosi

In questa Sezione vogliamo richiamare alcune nozioni riguardanti la struttura delle equazioni del moto per i fluidi viscosi.

La viscosità misura la facilità con cui un fluido risponde a uno sforzo causato da un'agente esterno ad esso [33]. Nel caso di fluidi non viscosi o in equilibrio idrostatico le forze agenti sono tutte normali ad una qualunque superficie all'interno del fluido. Nel momento in cui esiste un gradiente di velocità in un fluido, allora si ha una forza di superficie fra due strati di fluido con velocità diversa. E' molto importante ricordare che in qualunque circostanza la velocità di un fluido è nulla sulla superficie del solido che lo contiene.

Supponiamo di avere due piani paralleli, uno fermo e uno in movimento rispetto all'altro con velocità v_0 , divisi fra loro da un fluido viscoso, come in Fig.3.1. Si osserva, proprio per quanto detto sopra, che andando dal piano superiore a quello inferiore la velocità del fluido diminuisce dal valore v_0 a zero. Conoscendo la forza F con cui si mantiene in movimento la superficie superiore, si trova che essa è proporzionale all'area A della superficie stessa e alla velocità v_0 , mentre è inversamente proporzionale alla distanza d fra le due superfici. Il rapporto F/A è proporzionale al rapporto v_0/d tramite una costante che definisce il coefficiente di viscosità di superficie, η , ovvero

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d} . \quad (3.39)$$

Per descrivere microscopicamente il movimento di un fluido è necessario conoscere il campo di velocità

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (3.40)$$

e altre due quantità termodinamiche qualsiasi, come per esempio la densità e la pressione

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t) \quad , \quad P = P(\mathbf{r}, t) \quad , \quad (3.41)$$

dove la coordinata $\mathbf{r}$ ora specifica un punto fisso nello spazio e non la posizione di una particella che si muove con il fluido.

Se consideriamo un volume V contenente una certa quantità di fluido, la variazione della densità di massa di fluido all'interno di esso deve essere uguale al flusso di massa uscente dalla superficie S che racchiude il volume stesso. Questo concetto è descritto dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad . \quad (3.42)$$

L'equazione del moto di un fluido ideale si ottiene tenendo conto del fatto che l'unica forza agente su di una porzione di fluido è data dalla forza di pressione che il resto del fluido esercita su questa porzione, $F = -(\nabla P)$. Vale quindi la relazione

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -(\nabla P) \quad , \quad (3.43)$$

e scrivendo in maniera estesa il tasso di cambiamento dell'elemento di fluido che si muove nello spazio, $d\mathbf{v}/dt$, otteniamo l'*equazione di Eulero*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad . \quad (3.44)$$

Questa equazione descrive il moto di un fluido ideale, in cui siano assenti forze dissipative, come appunto la forza di attrito fra strati di fluido dovuta alla viscosità. Per un fluido incompressibile, ovvero un fluido in cui la densità di massa è costante nello spazio e nel tempo, l'equazione di continuità (3.42) diventa semplicemente

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad . \quad (3.45)$$

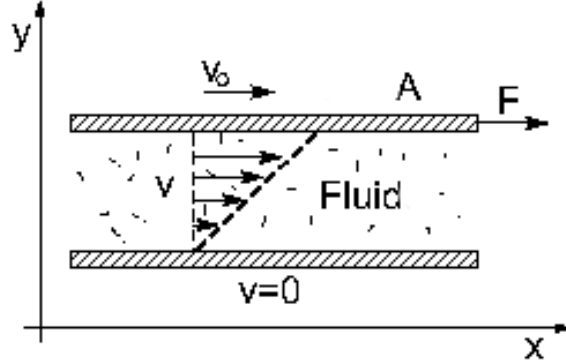


Figura 3.1: Schematizzazione semplice del moto di un fluido viscoso.

Consideriamo l'impulso per unità di volume di fluido ρv_i . Utilizzando le equazioni (3.42) e (3.44), possiamo scrivere il suo tasso di variazione come

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) v_i \\
 &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) \\
 &= -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k},
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

dove abbiamo introdotto il tensore del flusso della quantità di moto

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k. \tag{3.47}$$

Esso rappresenta la i -esima componente dell'impulso che fluisce attraverso una superficie di area unitaria normale all'asse x_k per unità di tempo. Possiamo quindi riscrivere l'equazione di Eulero (3.44) nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}. \tag{3.48}$$

Nel caso di un fluido viscoso dobbiamo inserire nella (3.47) un termine che tenga conto della dissipazione dell'energia che avviene con il movimento del fluido. La (3.47) descrive

un flusso di quantità di moto *reversibile*, provocato dal movimento delle particelle nel fluido e dalle forze di pressione agenti nel fluido; in presenza di viscosità, si ha invece un trasferimento *irreversibile* di quantità di moto dai punti di fluido con velocità maggiore a quelli con velocità minore. L'equazione di continuità non subisce variazioni, mentre la (3.48) varia poichè riscriviamo il tensore di flusso di quantità di moto (3.47) come

$$\begin{aligned}\Pi_{ik} &= P\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} \\ &= -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k ,\end{aligned}\tag{3.49}$$

dove

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} + \sigma'_{ik}\tag{3.50}$$

è il tensore degli sforzi, mentre σ'_{ik} è chiamato tensore degli sforzi viscosi.

La forma generale del tensore degli sforzi viscosi, che ci interessa particolarmente per lo studio della viscosità, può essere dedotta da semplici considerazioni. Per prima cosa, si hanno attriti interni al fluido solo quando le particelle si muovono con velocità diverse, e quindi si ha una relazione fra il movimento di parti diverse di fluido, dunque σ'_{ik} deve necessariamente dipendere dalle derivate spaziali della velocità. Possiamo supporre che questa dipendenza sia solo dalle derivate prime, essendo piccoli i gradienti di velocità interni al fluido. Inoltre, dobbiamo osservare che per un fluido in rotazione uniforme non si hanno sforzi viscosi, e dunque σ'_{ik} deve annullarsi. Tenendo conto di quanto detto, la forma più generale per il tensore degli sforzi viscosi è [33]:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} .\tag{3.51}$$

I valori η e ξ sono chiamati, rispettivamente, coefficienti di viscosità di superficie e di volume; sono entrambi positivi e indipendenti dalla velocità, ma in generale dipendono dalla pressione e dalla temperatura del fluido.

Se dunque sostituiamo la (3.49) nella (3.48) otteniamo l'equazione del moto per i fluidi viscosi

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.52)$$

conosciuta con il nome di *Equazione di Navier-Stokes*, in cui il fluido è considerato incompressibile ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$). In tal caso non si ha viscosità di volume e il tensore degli sforzi può essere riscritto come

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) . \quad (3.53)$$

La viscosità di superficie è il coefficiente di trasporto che caratterizza la diffusione di quantità di moto in direzione trasversa a quella di propagazione, dovuta alle collisioni fra le particelle nel mezzo. E' proporzionale al cammino libero medio delle particelle nel mezzo e inversamente proporzionale alla sezione d'urto di scattering fra le particelle costituenti il fluido.

3.2.3 La viscosità per un liquido normale di Fermi

Essendo lo scostamento dello stato del sistema dall'equilibrio molto piccolo, possiamo ragionevolmente assumere che le risposte del sistema siano lineari nelle forze generalizzate [34], le quali scaturiscono proprio dallo stato di non-equilibrio del sistema; queste forze generalizzate sono i gradienti delle quantità che caratterizzano l'equilibrio: T , μ , e $\mathbf{u}$.

La risposta del sistema si manifesta tramite correnti che sono proporzionali ai gradienti della grandezza termodinamica che si sta considerando; il fattore di proporzionalità è il coefficiente di trasporto che stiamo cercando. Nel caso della viscosità ciò appare in modo evidente nella (3.51) che, se ci limitiamo a considerare la sola viscosità di superficie η di un fluido incompressibile, diventa

$$\sigma'_{ik} = \eta(\nabla_k u_i + \nabla_i u_k) . \quad (3.54)$$

Per calcolare la viscosità di un liquido normale di Fermi dobbiamo scrivere la corrente in forma microscopica. Assumiamo quindi che il nostro sistema sia quasi all'equilibrio, con una piccola velocità di fluido $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ localmente variabile. Possiamo riscrivere il tensore degli sforzi (3.53) nella forma

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{e.l.} - \sigma'_{ik} , \quad (3.55)$$

dove $\sigma_{ik}^{e.l.} = P\delta_{ik}$ e σ'_{ik} è data dalla (3.54).

Se moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione di Boltzmann-Landau (3.25) per $\mathbf{p}$ e sommiamo su $\mathbf{p}$ e σ otteniamo un'espressione non nulla solo per il primo membro. Con alcune manipolazioni è possibile riconoscere il tensore degli sforzi nella forma [28]

$$\sigma_{ik} = T_{ik} + \delta_{ik} \left(\sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \epsilon_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} - \frac{E}{V} \right) , \quad (3.56)$$

dove E è l'energia totale del sistema di quasiparticelle e il tensore T_{ik} è definito dalla [28]

$$T_{ik} = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} p_i \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}}{\partial p_k} n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) . \quad (3.57)$$

Una piccola variazione della funzione di distribuzione $\delta n_{\mathbf{p}}$ produce un cambiamento al primo ordine nel tensore degli sforzi

$$\delta \sigma_{ik} = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} p_i v_{\mathbf{p}k} \delta n_{\mathbf{p}} . \quad (3.58)$$

Nel caso di una deviazione della funzione di distribuzione dal suo valore all'equilibrio locale, il $\delta \sigma_{ik}$ dell'equazione precedente uguaglierà il termine dissipativo della (3.55), ovvero

$$\sigma'_{ik} = - \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} p_i v_{\mathbf{p}k} \delta n_{\mathbf{p}} . \quad (3.59)$$

Supponiamo ora che la velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ del fluido abbia componente solo lungo l'asse x e che vari lentamente lungo l'asse y , possiamo allora riscrivere la (3.54) nella forma

$$\sigma'_{xy} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y} = - \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} p_x (v_{\mathbf{p}})_y \delta n_{\mathbf{p}} . \quad (3.60)$$

A questo punto torniamo all'equazione del trasporto di Boltzmann-Landau (3.33), considerando sempre un piccolo scostamento della funzione di distribuzione dal suo valore d'equilibrio locale. Possiamo riscriverla come

$$-\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^0}{\partial \epsilon'_{\mathbf{p}}} \nabla_{\mathbf{r}} [\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} - \mu(\mathbf{r}, t)] = I[\delta n_{\mathbf{p}}] , \quad (3.61)$$

dove la quantità tra parentesi quadre è l'energia di singola quasiparticella nel sistema di riferimento del fluido che si muove con velocità $\mathbf{u}$

$$\epsilon'_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} . \quad (3.62)$$

Riscrivendo il primo membro della (3.61) per componenti otteniamo la

$$-v_i \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^0}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} \frac{\partial}{\partial x_i} [-p_j u_j] \quad (3.63)$$

che, poichè stiamo considerando per semplicità un fluido che si muove lungo l'asse x con velocità che cambia in modulo lungo l'asse y , diventa

$$(v_{\mathbf{p}})_y \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^0}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} p_x \frac{\partial u_x}{\partial y} . \quad (3.64)$$

Usando queste manipolazioni e la (3.37) possiamo scrivere l'equazione di Boltzmann-Landau (3.33) in termini della funzione incognita Φ . Una volta risolta l'equazione, sostituendo la soluzione nella (3.60), otteniamo finalmente il valore della viscosità di superficie η di un liquido normale di Fermi.

Il primo calcolo dei coefficienti di trasporto, per il caso di ^3He liquido, risale al 1959 e si deve ad Abrikosov e Khalatnikov [35]. Essi ottennero sia il coefficiente di conducibilità termica, κ , che quello della viscosità di superficie, η , nel limite di bassa temperatura. In [35] l'integrale delle collisioni (3.38) è stato valutato tenendo conto di alcune semplici considerazioni:

- come abbiamo già più volte ricordato, nelle collisioni a bassa temperatura intervengono solamente gli stati nelle immediate vicinanze della superficie di Fermi. Quindi

gli impulsi delle particelle, sia nello stato iniziale che in quello finale, si possono porre uguali all'impulso di Fermi;

- nell'approssimazione descritta al punto precedente, la conservazione dell'impulso e dell'energia implica che l'angolo θ , compreso fra gli impulsi delle particelle nello stato iniziale, $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, è uguale a quello formato dagli impulsi delle particelle nello stato finale, $\mathbf{p}_3$ e $\mathbf{p}_4$;
- se chiamiamo ϕ l'angolo compreso fra il piano in cui giacciono le particelle nello stato iniziale e quello in cui giacciono le particelle nello stato finale, la probabilità di transizione dipende solo dalle due variabili angolari θ e ϕ .

Sotto le ipotesi appena elencate, con semplici manipolazioni otteniamo l'espressione

$$d^3p_2 d^3p_3 = \frac{m^{*3}}{2\cos(\theta/2)} d\epsilon_2 d\epsilon_3 d\epsilon_4 \sin\theta d\theta d\phi d\phi_2, \quad (3.65)$$

con m^* definita dalla (3.19). Per la presenza della funzione δ sull'energia e delle distribuzioni di Fermi, i limiti d'integrazione della (3.38) sono $-\infty$ e $+\infty$. A parte la possibile dipendenza dallo spin, come abbiamo detto la probabilità di scattering $W(12;34)$ dipende dagli angoli θ e ϕ ; in assenza di campi magnetici la somma sulle variabili di spin da il risultato

$$\sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3, \sigma_4} W(12;34) \equiv 2W(\theta, \phi), \quad (3.66)$$

dove $W(\theta, \phi)$ rappresenta la probabilità media di scattering per σ_2 non polarizzato rispetto a σ_1 , mentre $\sigma_3 + \sigma_4$ sono determinati dalla conservazione dello spin totale del sistema.

In conclusione, l'equazione di trasporto si riduce a [28]

$$\begin{aligned} & (v_{1\mathbf{p}})_y \frac{\partial n_{1\mathbf{p}}^0}{\partial \epsilon_{1\mathbf{p}}} p_x \frac{\partial u_x}{\partial y} = \\ & - \frac{m^{*3}}{(2\pi)^6} \int d\epsilon_2 d\epsilon_3 d\epsilon_4 n_1 n_2 (1 - n_3)(1 - n_4) \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) \\ & \times \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\phi_2 \frac{W(\theta, \phi)}{\cos(\theta/2)} [\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 - \Phi_4]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

La soluzione di Abrikosov e Khalatnikov è stata ottenuta disaccoppiando gli integrali energetici da quelli angolari. Definendo

$$\langle W \rangle \equiv \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{W(\theta, \phi)}{\cos(\theta/2)} , \quad (3.68)$$

e

$$\tau \equiv \frac{8\pi^4}{m^{*3} \langle W \rangle T^2} , \quad (3.69)$$

dove τ può essere interpretato come la vita media della quasiparticella, l'espressione finale che si ottiene per la viscosità di superficie di un liquido normale di Fermi è [35]

$$\eta_{AK} = \frac{1}{5} \rho m^* v_F^2 \tau \frac{2}{\pi^2 (1 - \lambda_\eta)} , \quad (3.70)$$

con

$$\lambda_\eta = \frac{\langle W(\theta, \phi) [1 - 3\sin^4(\theta/2)\sin^2\phi] \rangle}{\langle W(\theta, \phi) \rangle} , \quad (3.71)$$

e la velocità di Fermi v_F è definita dalla nota relazione $\rho = p_F^3/3\pi^2$. Si può verificare facilmente che qualunque sia il valore di $W(\theta, \phi)$, λ_η soddisfa le relazioni

$$-2 \leq \lambda_\eta < 1 . \quad (3.72)$$

Soluzioni numeriche esatte dell'equazione del trasporto sono state ottenute da Dy e Pethick nel 1968, il cui risultato è stato perfezionato analiticamente da Emery e Cheng. Sul finire degli anni sessanta, Brooker e Sykes [36, 37] e Højgaard Jensen, Smith e Wilkins [38] hanno infine derivato una soluzione analiticamente esatta per i coefficienti di trasporto nel limite di bassa temperatura.

Nel nostro lavoro abbiamo utilizzato il risultato ottenuto da Brooker e Sykes [36, 37]

$$\eta = \frac{1}{5} \rho m^* v_F^2 \tau \frac{2}{\pi^2 (1 - \lambda_\eta)} C(\lambda_\eta) , \quad (3.73)$$

dove il fattore correttivo rispetto al valore di η_{AK} che risulta dalla (3.70), $C(\lambda_\eta)$, è dato dalla

$$C(\lambda_\eta) = \frac{1 - \lambda_\eta}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k + 3}{(k + 1)(2k + 1)[(k + 1)(2k + 1) - \lambda_\eta]} . \quad (3.74)$$

Si noti che il primo termine della sommatoria vale $(3/4)\eta_{AK}$. Dal calcolo completo di $C(\lambda_\eta)$ si ottiene il risultato

$$0.75 < \frac{\eta}{\eta_{AK}} < 0.92 , \quad (3.75)$$

che mostra come l'errore associato alle approssimazioni usate da Abrikosov e Khalatnikov fosse piuttosto piccolo, e sempre minore del 25%.

Capitolo 4

Viscosità di superficie nel core esterno di una stella di neutroni

Come abbiamo già detto, tutti gli approcci teorici prevedono che il core esterno di una stella di neutroni sia costituito da un fluido omogeneo di neutroni, protoni e leptoni in uno stato stabile rispetto al decadimento beta. In questo Capitolo, dopo una breve introduzione sulla determinazione delle condizioni di equilibrio, presentiamo i dettagli del calcolo della viscosità della materia β -stabile e i risultati dei calcoli numerici effettuati.

4.1 Condizioni di β stabilità

Lo stato fondamentale di un sistema, ovvero il suo stato di equilibrio stabile, è quello in cui il valore di aspettazione dell'energia assume il valore minimo, soggetto ai vincoli di conservazione del numero barionico e della carica elettrica.

Il numero barionico è conservato da tutte le interazioni conosciute. È quindi conveniente scegliere la densità di barioni ρ come variabile indipendente. Se trascuriamo la possibile presenza di muoni, lo stato del sistema è determinato dalla condizione di stabilità

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e , \tag{4.1}$$

dove μ_i è il potenziale chimico delle particelle di tipo i ($i = n, p, e$), e dalla equazione che

assicura la neutralità elettrica del sistema

$$\rho_p = x_p \rho = \rho_e , \quad (4.2)$$

dove ρ_p e ρ_e sono, rispettivamente, le densità di protoni ed elettroni. Poichè i potenziali chimici dipendono solo da ρ e x_p , per ogni valore della densità barionica le equazioni (4.1) e (4.2) determinano in modo univoco la frazione di protoni x_p , e quindi lo stato del sistema.

Il potenziale chimico è definito termodinamicamente come la variazione di energia rispetto al numero delle particelle. Nell'approccio basato sul potenziale effettivo, μ_n e μ_p si possono ottenere in approssimazione di Hartree-Fock, cioè calcolando l'energia di una particella sulla superficie di Fermi. Nel caso di materia di neutroni e protoni, troviamo (si confronti con la (2.32))

$$\mu_\lambda = \frac{p_F^{\lambda 2}}{2m} + \frac{\rho}{2} \sum_\mu \sum_n x_\mu \int d^3r v_{\text{eff}}^n [A_{\lambda\mu}^n - B_{\lambda\mu}^n j_0(p_F^\lambda r) \ell(p_F^\mu r)] , \quad (4.3)$$

in cui ricordiamo che x_λ è la frazione di protoni o neutroni, ovvero $x_p = x = x_1 + x_2$ e $x_n = (1 - x) = x_3 + x_4$.

Nel caso degli elettroni, che vengono descritti come particelle libere ultra-relativistiche, l'energia sulla superficie di Fermi è pari all'impulso di Fermi, e quindi

$$\mu_e = p_F^e = (3\pi^2 \rho_e)^{1/3} , \quad (4.4)$$

dove $\rho_e = x_p \rho$.

In conclusione, come già detto, per ogni densità barionica ρ abbiamo calcolato la frazione di protoni x_p sostituendo nella (4.1) μ_e dato dalla (4.4) e $\mu_p = x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2$ e $\mu_n = x_3 \mu_3 + x_4 \mu_4$, con μ_λ dato dalla equazione (4.3), per il calcolo della quale abbiamo usato il potenziale effettivo descritto nel Capitolo 2. La Fig. 4.1 mostra i valori di x_p così ottenuti in funzione della densità barionica.

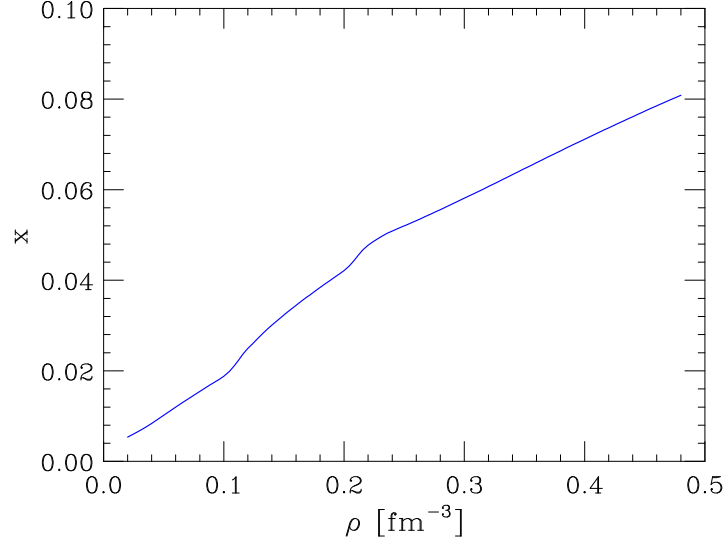


Figura 4.1: Dipendenza dalla densità barionica della frazione di protoni corrispondente all'equilibrio β della materia nucleare elettricamente neutra.

4.2 Liquido normale di Fermi a più componenti

L'obiettivo principale del nostro studio è l'analisi delle proprietà di trasporto, in particolare la viscosità di superficie, di un liquido normale di Fermi a molti componenti. Dobbiamo quindi ampliare la discussione del Capitolo 3 sulla teoria di Landau, che abbiamo finora sviluppato esclusivamente per sistemi ad un solo componente.

Questo tipo di analisi fu effettuata per la prima volta da Flowers e Itoh, nel 1979 [7, 8]. Essi considerarono un sistema degenere di liquidi normali di Fermi scrivendo un'equazione del trasporto per ogni componente

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial n_\alpha}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}\alpha}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_\alpha}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}\alpha}}{\partial \mathbf{r}} = I_\alpha . \quad (4.5)$$

Questa espressione è analoga alla (3.25), con l'unica differenza che i termini dipendono ora da un indice α che prende i valori da 1 a 3 a seconda che si stiano considerando neutroni,

protoni o elettroni. L'integrale delle collisioni si può ovviamente scrivere nella forma

$$I_\alpha = \sum_{\beta} I_{\alpha\beta} , \quad (4.6)$$

con $\beta = 1, 2, 3$.

Abbiamo quindi a che fare con un sistema di tre equazioni in tre incognite. Per ciascuna famiglia di particelle si definisce, come nella (3.37), la deviazione della funzione di distribuzione δn_α dal suo valore all'equilibrio locale

$$\delta n_\alpha = -\frac{\partial n_\alpha^0}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}\alpha}} \Phi_\alpha , \quad (4.7)$$

dove l'indice i presente nella (3.37) è stato tralasciato per semplificare la notazione. Negli integrali delle collisioni figureranno ora termini corrispondenti a collisione tra particelle dello stesso tipo, per i quali basta fare riferimento allo studio del Capitolo 3, e termini in cui le particelle che collidono sono di tipo diverso. In questo caso bisogna tenere conto del fatto che esse hanno energie di Fermi differenti, e fare attenzione alle approssimazioni utilizzate nel calcolo dello spazio delle fasi, come descritto nella Sezione 3.2.3 per il caso di sistemi ad un solo componente.

Come appare chiaramente dalla Fig. 4.1, la frazione di protoni x_p è sempre minore del 10%. Quindi, il numero di neutroni presenti supera di gran lunga quello di protoni ed elettroni, e l'impulso di Fermi corrispondente, p_n , è molto maggiore di quello delle restanti due famiglie, protoni ed elettroni, i cui momenti di Fermi sono $p_p = p_e$. Alla luce di queste considerazioni, i casi possibili sono:

- collisioni tra particelle con la stessa energia di Fermi: $\alpha\beta = nn, pp, ee, ep, pe$;
- collisioni tra particelle con energie di Fermi differenti: $\alpha\beta = np, ne$.

Il calcolo della viscosità segue la procedura di Brooker e Sykes [36, 37]; in questo caso il tensore degli sforzi viscosi (3.60) dipende da un'indice α , necessario per identificare

le differenti famiglie di particelle, e conseguentemente il coefficiente della viscosità di superficie sarà somma di tre termini, ovvero

$$\eta = \eta_n + \eta_p + \eta_e . \quad (4.8)$$

4.3 Probabilità di scattering

Risolvere la (4.5) equivale a risolvere un sistema di tre equazioni in tre incognite, che sono appunto le viscosità di superficie di un fluido omogeneo rispettivamente di neutroni, protoni ed elettroni.

Possiamo definire il membro destro della (4.5) *matrice delle collisioni*, e soffermarci un attimo sulla sua struttura. Per farlo dobbiamo prima di tutto considerare le probabilità di scattering $W_{\alpha\beta}(\theta, \phi)$ fra le particelle.

Nel caso dell'interazione NN questa probabilità viene calcolata utilizzando il potenziale effettivo descritto nel Capitolo 2. I dettagli del calcolo sono contenuti nelle Appendici B e C. Per gli altri casi va considerata l'interazione elettromagnetica presente fra elettroni e protoni, come pure l'interazione fra neutroni ed elettroni dovuta al momento magnetico anomalo del neutrone.

L'interazione elettromagnetica viene calcolata nel formalismo della meccanica quantistica relativistica usando il propagatore fotonico schermato [7]

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{q}, 0) = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2 + k_{ft}^2} , \quad (4.9)$$

dove k_{ft} rappresenta il vettore d'onda di screening dovuto al background [7], ovvero

$$k_{ft}^2 = 4\alpha\pi \frac{\partial n}{\partial \mu} , \quad (4.10)$$

$\alpha = 1/137$ è la costante di struttura fine, e n è la somma delle densità di elettroni e protoni, che contribuiscono entrambi a schermare l'interazione elettromagnetica. Possiamo scrivere

k_{ft} più esplicitamente, nella forma

$$k_{ft}^2 = \frac{4\alpha}{\pi}(p_e^2 + p_p m_p) \approx \frac{4\alpha}{\pi} p_p m_p, \quad (4.11)$$

nella quale si vede che pesa di più il contributo dei protoni, perchè maggiormente polarizzabili [8].

Il calcolo diretto della probabilità di scattering, secondo la formula

$$W = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{T}, \quad (4.12)$$

dove S è la matrice di scattering, fornisce come risultato [7]

$$\begin{aligned} W(\theta, \phi) = & \frac{(2\pi)^3 \alpha^2}{4\epsilon^4} \frac{1}{4p^4} \left\{ \frac{4p^4 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p)^2\right]^2} \right. \\ & + \frac{8m^2 p^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + 2m^4}{\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p)^2\right]^2} + \\ & + \frac{4p^4 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - m^4}{\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p)^2\right]} \frac{1}{\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p)^2\right]} \\ & \left. + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \leftrightarrow \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\}, \quad (4.13) \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine si ottiene con lo scambio di $\sin(\phi/2)$ con $\cos(\phi/2)$ e viceversa nei termini precedenti. La probabilità (4.13) è scritta in funzione degli angoli θ e ϕ , che misurano rispettivamente l'angolo di scattering fra la particella incidente e quella bersaglio, e l'angolo fra il piano di scattering delle particelle nello stato iniziale e quello delle particelle nello stato finale. Nel limite in cui lavoriamo, ovvero $p_n \gg p_e = p_p$ si hanno dei rapporti ben definiti fra gli angoli caratterizzanti le proprietà di trasporto e gli angoli θ e ϕ , come mostrato nell'Appendice A.

Nel caso dell'interazione elettrone-elettrone si considera il limite ultra-relativistico della (4.13), ovvero [8]

$$W_{ee}(\theta, \phi) = \frac{(2\pi)^3 \alpha^2}{4p_e^4} \left\{ \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)}{\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p_e)^2\right]^2} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p_e)^2\right]\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p_e)^2\right]} \\
& + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \leftrightarrow \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \Big\} . \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Al contrario, nel caso dell'interazione protone-protone viene considerato il limite non-relativistico di (4.13), cioè [8]

$$\begin{aligned}
W_{pp}(\theta, \phi) = & \frac{(2\pi)^3 \alpha^2}{8p_p^4} \left\{ \frac{1}{\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p_p)^2\right]^2} \right. \\
& - \frac{1}{\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p_p)^2\right]\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p_p)^2\right]} \\
& \left. + \frac{1}{\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p_p)^2\right]^2} \right\} , \tag{4.15}
\end{aligned}$$

sempre con $p_e = p_p$.

L'interazione elettrone-protone è anch'essa puramente elettromagnetica, e la probabilità di transizione corrispondente vale [8]

$$W_{pe}(\theta, \phi) = W_{ep}(\theta, \phi) = \frac{(2\pi)^3 \alpha^2}{8p_e^4} \frac{1 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\phi}{\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p_e)^2\right]^2} . \tag{4.16}$$

Infine, per l'interazione fra neutroni ed elettroni, dovuta al momento magnetico anomalo del neutrone, si trova [8]

$$\begin{aligned}
W_{en}(\theta, \phi) & = W_{ne}(\theta, \phi) = \\
& = \frac{(2\pi)^3 \alpha^2 g_n^2}{4p_e^4} \left(\frac{p_e}{m}\right)^2 \frac{\sin^2\theta \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\left[\sin^2\theta \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + (k_{ft}/2p_e)^2\right]^2} \left(1 + \sin^2\theta \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) . \tag{4.17}
\end{aligned}$$

dove g_n è il momento magnetico anomalo del neutrone, ed m la sua massa nuda.

4.4 Calcolo della viscosità

La generalizzazione del risultato di Brooker e Sykes [36, 37] al caso di un liquido di Fermi a più componenti, nella forma ottenuta per la prima volta da Flowers e Itoh [8], è

concettualmente quasi immediata per $\rho_n \gg \rho_p = \rho_e$. In questo caso, il risultato finale si può scrivere nella forma ($\alpha = n, p, e$):

$$\eta_\alpha = \frac{1}{5} \rho_\alpha m_\alpha^* v_{F\alpha}^2 \tau_\alpha \frac{2}{\pi^2 (1 - \lambda_{\alpha\alpha})} C(\lambda_{\alpha\alpha}) , \quad (4.18)$$

dove la vita media delle quasiparticelle di tipo α , τ_α , è data da

$$\tau_\alpha = \frac{8\pi^4}{\sum_\beta m_\alpha^* (m_\beta^{*2} < W_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} >) T^2} , \quad (4.19)$$

e

$$\lambda_{\alpha\alpha} = \frac{\sum_\beta < W_{\alpha\beta}(\theta, \phi) l_{\alpha\beta}^\alpha >}{\sum_\beta < W_{\alpha\beta}(\theta, \phi) l_{\alpha\beta} >} . \quad (4.20)$$

Le quantità $l_{\alpha\beta}^\alpha$ e $l_{\alpha\beta}$ sono integrali le cui definizioni sono presentate nell'Appendice A.

La differenza fra queste espressioni e quelle ottenute nella sezione 3.2.3 per la viscosità di un sistema ad un solo componente è nell'aver aperto più canali di scattering, con la conseguente diminuzione della vita media τ_α delle quasiparticelle e quindi una diminuzione nel valore della viscosità del singolo componente.

Le masse effettive necessarie per il calcolo delle equazioni (4.18)-(4.20), come le frazioni di protoni discusse nella Sezione 4.1, sono state ottenute in modo consistente, usando la stessa interazione effettiva che determina le probabilità di scattering $W_{nn} = W_{pp}$ e W_{pn} . La dipendenza dalla densità della massa effettiva, calcolata come descritto nell'Appendice B, è illustrato nella Fig. 4.2.

La Fig. 4.3 mostra l'andamento in funzione della densità del prodotto tra la viscosità e il quadrato della temperatura. Si osserva come il contributo dei protoni sia sempre trascurabile, a causa della loro bassa densità e poca mobilità; al contrario gli elettroni, pur essendo alla stessa densità dei protoni, hanno una viscosità molto maggiore dovuta al loro grande impulso. Come ci si poteva aspettare il contributo dominante è dato dalla componente neutronica, che caratterizza quasi totalmente la materia nucleare nelle stelle di neutroni.

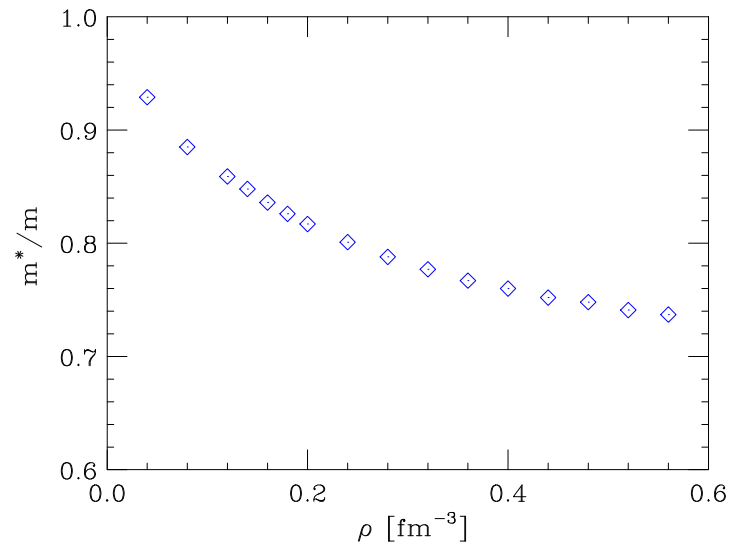


Figura 4.2: Dipendenza dalla densità barionica del rapporto m^*/m .

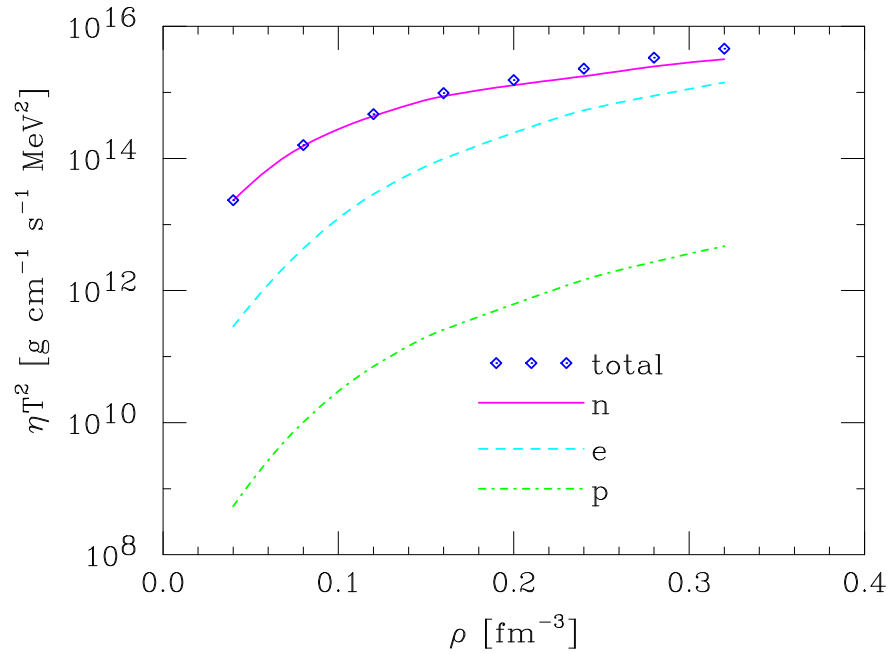


Figura 4.3: Dipendenza dalla densità barionica del prodotto ηT^2 corrispondente a protoni, elettroni, neutroni e alla materia β -stabile.

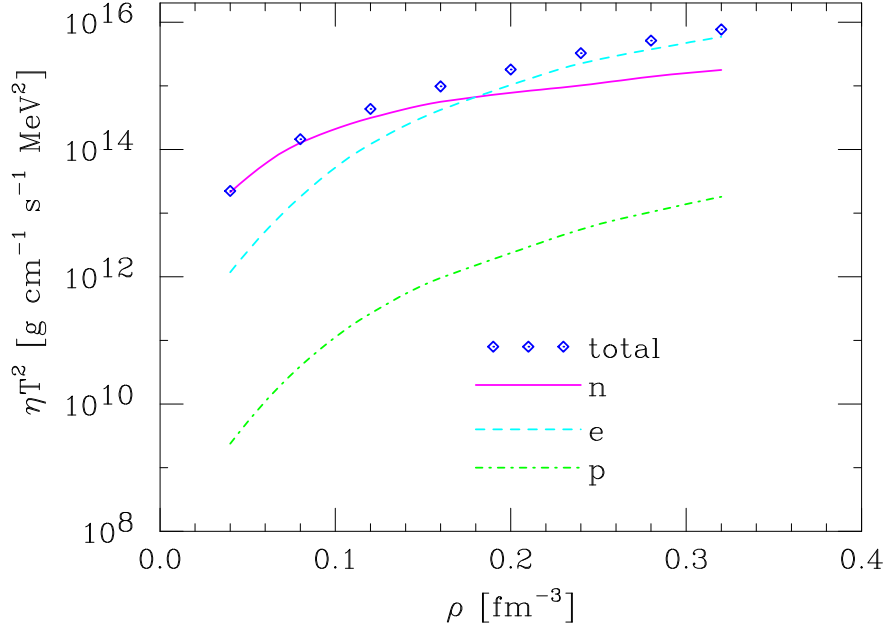


Figura 4.4: Dipendenza dalla densità barionica del prodotto ηT^2 corrispondente a protoni, elettroni, neutroni e alla materia β -stabile, ottenuto moltiplicando per due i valori di x_p della Fig. 4.1.

La viscosità totale si sovrappone a quella neutronica fino a valori di densità barionica pari a quella d'equilibrio (0.16 fm^{-3}), poiché la frazione di protoni ed elettroni è ancora troppo piccola. Solamente per densità maggiori di quella d'equilibrio la viscosità totale risente anche della presenza elettronica, la cui componente comincia a crescere. Si osserva che col crescere della densità barionica, e quindi di x_p , la viscosità degli elettroni tende ad avvicinarsi sempre più ai valori di quella neutronica.

Ovviamente, i pesi relativi dei diversi contributi illustrati nella Fig.4.3 sono determinati dal valore di x_p , che è a sua volta determinato dall'equazione di stato della materia nucleare. Per studiare numericamente la dipendenza da x_p , abbiamo ripetuto il calcolo di η moltiplicando per due i valori di x_p della Fig. 4.1. I risultati di questa analisi, che come abbiamo detto corrisponderebbe alla scelta di un'equazione di stato diversa da quella che abbiamo utilizzato, sono mostrati nella Fig. 4.4. Si osserva che a densità $\sim 0.2 \text{ fm}^{-3}$,

corrispondenti a una frazione di elettroni intorno all'8%, il contributo alla viscosità dovuto agli elettroni diventa maggiore di quello dovuto ai neutroni.

Tutti i risultati numerici presentati in questo Capitolo sono stati ottenuti utilizzando programmi di calcolo scritti in linguaggio Fortran. Il tempo di CPU necessario per ottenere le viscosità mostrate nelle Fig. 4.3 e 4.4 utilizzando un personal computer commerciale di prestazioni medie è dell'ordine di qualche minuto.

Conclusioni

Lo scopo di questa Tesi è stato generalizzare il lavoro effettuato da Benhar e Valli [10] sul calcolo della viscosità della materia nucleare puramente neutronica. Abbiamo quindi considerato materia elettricamente neutra composta da neutroni, protoni ed elettroni in equilibrio rispetto ai processi di decadimento beta e cattura elettronica, che si ritiene sia presente in una regione estesa all'interno delle stelle di neutroni.

Per studiare le proprietà di trasporto di questo sistema ci siamo serviti del formalismo basato sulla teoria di Landau dei liquidi normali di Fermi, sviluppato originariamente da Abrikosov e Khalatnikov [35], e riformulato per la descrizione di sistemi a più componenti da Flowers e Itoh [8]. Nell'ambito di questo approccio teorico, è possibile descrivere il regime di alta densità e bassa temperatura tipico delle stelle di neutroni.

L'aspetto più originale e importante del nostro lavoro è l'aver utilizzato un unico modello dinamico per ottenere l'equazione di stato della materia a temperatura nulla, che determina la frazione di protoni ed elettroni presenti a densità barionica fissata, e la probabilità di scattering nucleone-nucleone, che compare nel termine di collisione dell'equazione di Boltzmann.

L'elemento fondamentale dell'approccio utilizzato è un potenziale effettivo che descrive le interazioni tra nucleoni nella materia nucleare, ottenuto utilizzando il formalismo delle funzioni d'onda correlate [9, 10]. Questo potenziale dipende dalla densità, e si riduce a un potenziale realistico, cioè in grado di riprodurre i dati sperimentali disponibili sul sistema di due nucleoni, nel limite di densità nulla.

Il confronto tra i risultati di [10] e quelli di calcoli precedenti, basati sull'uso delle sezioni d'urto nucleone-nucleone nel vuoto, hanno mostrato che le modificazioni dovute alla presenza del mezzo nucleare hanno un effetto molto rilevante sulla viscosità. Come già accennato, lo screening dovuto alle correlazioni tra i nucleoni, e la conseguente diminuzione della probabilità di scattering, producono un aumento della viscosità della materia neutronica pura che arriva fino quasi a un ordine di grandezza per densità pari al doppio della densità di equilibrio della materia nucleare [10].

Il confronto diretto tra i nostri risultati e quelli di altri calcoli disponibili in letteratura è reso difficile dal fatto che nessun autore riporta i valori delle percentuali di protoni utilizzati. Questi valori giocano un ruolo molto importante, in quanto determinano il peso relativo della viscosità dovuta agli elettroni, che può diventare importante, e in alcuni casi addirittura dominante. In ogni caso, l'andamento qualitativo dei nostri risultati appare in ragionevole accordo con quello riportato da Flowers e Itoh [8].

Come anticipato nell'Introduzione, il nostro lavoro si propone come un primo passo verso una descrizione completa e consistente degli effetti di dissipazione energetica all'interno delle stelle di neutroni.

La scelta di studiare il coefficiente di viscosità è stata motivata dal fatto che esso gioca un ruolo fondamentale, in quanto può smorzare le oscillazioni delle stelle associate all'emissione di onde gravitazionali. Dunque, una conoscenza accurata della viscosità è necessaria per la comprensione dei processi che provocano l'insorgere dell'instabilità CFS nelle stelle di neutroni rotanti.

Gli effetti di dissipazione sull'evoluzione dei modi r è stato studiato considerando l'energia E della perturbazione, misurata nel sistema di riferimento che ruota con il fluido [41, 42]. La variazione di questa energia è dovuta all'azione degli effetti dissipativi: emissione di radiazione gravitazionale e viscosità di superficie¹. Il primo effetto tende ad

¹Ricordiamo che la viscosità di volume non è stata discussa nella Tesi poiché nel limite di bassa

aumentare l'energia della perturbazione causandone l'instabilità, mentre gli effetti viscosi contribuiscono a smorzare le oscillazioni, agendo in senso inverso. Per valutare l'azione di questi due effetti è conveniente definire un tempo dissipativo combinato [40, 41]

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{2E} \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{\tau_{GR}} + \frac{1}{\tau_V} . \quad (4.21)$$

Per piccole velocità angolari $\tau_{GR} \gg \tau_V$, e ne consegue che gli effetti viscosi dominano, ovvero

$$\frac{1}{\tau_{GR}} \ll \frac{1}{\tau_V} . \quad (4.22)$$

In questo caso l'emissione di onde gravitazionali è totalmente soppressa, e la stella è stabile. Quando invece la velocità angolare della stella è elevata, il tempo di crescita della radiazione gravitazionale è molto breve, e il processo di emissione prevale sull'azione attenuante degli agenti viscosi. La velocità angolare critica Ω_c , definita dalla relazione

$$\frac{1}{\tau(\Omega_c)} = 0 , \quad (4.23)$$

segna il confine fra le regioni di stabilità ($\Omega < \Omega_c$) e instabilità ($\Omega > \Omega_c$) della stella. Conoscendo gli effetti dissipativi dovuti alla viscosità si può ottenere il valore di Ω_c , e quindi stabilire se una stella rotante con una certa velocità angolare sia soggetta all'instabilità CFS.

Come ultima osservazione notiamo che il formalismo di Landau-Abrikosov-Khalatnikov, che abbiamo utilizzato, è basato sull'assunzione che la materia nucleare si comporti come un liquido di Fermi normale. Tuttavia, è noto che a bassa temperatura si manifestano fasi superfluide e superconduttive. Per esempio, gli autori di [43], i cui risultati sono stati utilizzati nel classico lavoro di Cutler e Lindblom sulle oscillazioni delle stelle di neutroni [40], predicono una temperatura critica della transizione superfluida di circa $5 \times 10^8 \text{K}$, per densità poco al di sopra della densità di equilibrio della materia nucleare. Per determinare temperatura la viscosità di superficie è dominante.

in modo consistente l'intervallo di applicabilità dei nostri risultati, sarà necessario uno studio quantitativo della possibile transizione di fase, effettuato con la stessa interazione effettiva utilizzata per il calcolo dell'equazione di stato e della viscosità. Questo studio rappresenta una delle estensioni di maggiore interesse del lavoro descritto nella Tesi.

Appendice A

Relazioni angolari utilizzate

In questa appendice elenchiamo tutte le formule e le approssimazioni fatte da Flowers e Itoh[8] per il calcolo della viscosità (4.18).

Nel limite in cui abbiamo lavorato, ovvero quello in cui il momento di Fermi dei neutroni p_n è molto maggiore di quello di protoni p_p ed elettroni p_e , abbiamo particolari relazioni fra gli angoli che determinano le proprietà di trasporto e gli angoli di scattering fra le quasiparticelle (θ, ϕ) . Queste relazioni sono:

- per $\alpha\beta = nn, pp, pe, ep, ee$

$$\begin{aligned}\sin(\theta'_1/2) &= \sin(\theta/2)\sin(\phi/2) , \\ \cos\theta'_2 &= \frac{1}{2}[(1 + \cos\theta) - (1 - \cos\theta)\cos\phi] ;\end{aligned}\tag{A.1}$$

- per $\alpha\beta = np, ne$

$$\begin{aligned}\sin(\theta'_1) &= \frac{p_e}{p_n}\sin\theta\sin(\phi/2) , \\ \cos\theta'_2 &= \cos\theta + \frac{p_e}{p_n}\sin^2(\theta/2)(1 - \cos\phi) ;\end{aligned}\tag{A.2}$$

- per $\alpha\beta = pn, pe$

$$\begin{aligned}\sin(\theta'_1/2) &= \sin\theta\sin(\phi/2) , \\ \cos\theta'_2 &= \cos\theta + \frac{p_e}{p_n}\sin^2(\theta/2)(1 - \cos\phi) .\end{aligned}\tag{A.3}$$

Gli integrali che compaiono nella (4.20) sono dati da:

$$\begin{aligned} l_{\alpha\beta}^{\alpha} &= \frac{(m_{\alpha}^*)^2(m_{\beta}^*)^2 T^2}{4\pi^4} \int \frac{d\Omega}{2\pi} W_{\alpha\beta}(\theta, \phi) X_{\alpha\beta}^{\alpha} , \\ l_{\alpha\beta} &= \frac{(m_{\alpha}^*)^2(m_{\beta}^*)^2 T^2}{4\pi^4} \int \frac{d\Omega}{2\pi} W_{\alpha\beta}(\theta, \phi) X_{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Le quantità $X_{\alpha\beta}^{\alpha}$ e $X_{\alpha\beta}$ sono funzioni angolari che riportiamo qui di seguito:

$$X_{nn}^n = X_{pp}^p = X_{ee}^e = (1 - 3\sin^4(\theta/2)\sin^2\phi)/\cos(\theta/2) , \quad (\text{A.5})$$

$$X_{np}^n = X_{ne}^n = 2\frac{p_e}{p_n} \left[1 - 6\left(\frac{p_e}{p_n}\right)^2 \sin^2\theta\sin^2(\phi/2) + 6\left(\frac{p_e}{p_n}\right)^4 \sin^4\theta\sin^4(\phi/2) \right] , \quad (\text{A.6})$$

$$X_{pn}^p = X_{en}^e = 2 \left[1 - 6\sin^2\theta\sin^2(\phi/2) + 6\sin^4\theta\sin^4(\phi/2) \right] , \quad (\text{A.7})$$

$$X_{pe}^p = X_{ep}^e = \left[1 - 6\sin^2(\theta/2)\sin^2(\phi/2) + 6\sin^4(\theta/2)\sin^4(\phi/2) \right] , \quad (\text{A.8})$$

$$X_{nn} = X_{pp} = X_{ee} = X_{ep} = X_{pe} = \cos(\theta/2)^{-1} , \quad (\text{A.9})$$

$$X_{np} = X_{ne} = 2\frac{p_e}{p_n} , \quad (\text{A.10})$$

$$X_{pn} = X_{en} = 2 . \quad (\text{A.11})$$

Appendice B

Probabilità di transizione

Per risolvere la (4.18) è necessario conoscere il valore di $W_{\alpha\beta}(\theta, \phi)$ che misura la probabilità di transizione fra la (quasi)particella α e la particella β . Per ogni processo di scattering si avrà un certo termine di potenziale che descrive la maniera in cui interagiscono le particelle fra loro. In questa appendice vogliamo brevemente descrivere come viene calcolata la probabilità di transizione.

Per prima cosa ribadiamo che per sistemi a due corpi è possibile effettuare un cambio di variabili in modo da passare al sistema delle coordinate relative. Se abbiamo come energia totale del sistema

$$E = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1^*} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2^*} , \quad (\text{B.1})$$

applicando un semplice cambio di variabili, $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1^* \mathbf{v}_1 + m_2^* \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{p} = (m_2^* \mathbf{p}_1 - m_1^* \mathbf{p}_2)/M$, possiamo riscrivere l'energia come

$$E = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} , \quad (\text{B.2})$$

dove $M = m_1^* + m_2^*$ è la somma delle masse, mentre $\mu = m_1^* m_2^* / (m_1^* + m_2^*)$ è la massa ridotta. Più avanti spiegheremo come viene calcolata la massa effettiva m^* di una particella.

Se ci mettiamo nel sistema del centro di massa, in cui $\mathbf{P} = 0$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$, l'energia diventa

$$E = E_{rel} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} = E_{cm} , \quad (\text{B.3})$$

ovvero si ha unicamente l'energia relativa. Se invece ci spostiamo nel sistema del laboratorio, in cui $\mathbf{p}_2 = 0$ e di conseguenza $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1/2$, avremo

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{\mu} = 2E_{rel} , \quad (\text{B.4})$$

ovvero

$$E_{lab} = 2E_{cm} . \quad (\text{B.5})$$

Consideriamo a questo punto il sistema di riferimento di Abrikosov-Khalatnikov in cui viene calcolata la sezione d'urto fra due particelle [28]. In questo sistema di riferimento viene usata l'approssimazione di degenerazione, le particelle vengono cioè considerate tutte aventi impulso pari al loro impulso di Fermi:

$$\mathbf{p}_1^{AK} = \mathbf{p}_3^{AK} = p_{F\alpha} , \quad \mathbf{p}_2^{AK} = \mathbf{p}_4^{AK} = p_{F\beta} , \quad (\text{B.6})$$

dove gli indici α e β indicano la natura delle particelle, che a seconda dei casi possono essere uguali o diverse. In entrambi i casi, grazie alla conservazione della quantità di moto nel processo di scattering, si ha che

$$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)^2 \quad (\text{B.7})$$

e ne consegue che l'angolo compreso fra le particelle entranti e quello compreso fra le particelle uscenti è il medesimo, ovvero

$$\theta_{12} = \theta_{34} = \theta . \quad (\text{B.8})$$

Definiamo anche l'angolo ϕ che misura l'angolo fra il piano in cui sono contenute le particelle entranti $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, e quello in cui sono contenute le particelle uscenti $(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$.

Quest'angolo è proprio quello che nel sistema del centro di massa viene definito θ_{cm} , ovvero

$$\theta_{cm} = \arccos \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{|\mathbf{p}| |\mathbf{p}'|} , \quad (\text{B.9})$$

dove $\mathbf{p}$ l'abbiamo definito prima e $\mathbf{p}'$ non è altro che $\mathbf{p}' = (m_2^* \mathbf{p}_3 - m_1^* \mathbf{p}_4)/M$.

Tenendo conto del fatto che l'energia relativa è la medesima in qualunque sistema di riferimento, l'energia relativa nel sistema di AK sarà pari all'energia del centro di massa, quindi abbiamo che

$$(E_{rel})_{AK} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} = E_{cm} \quad , \quad \mathbf{p} = \frac{(m_2^* p_1^{AK} - m_1^* p_2^{AK})}{M} . \quad (\text{B.10})$$

A questo punto calcoliamo la sezione d'urto nel sistema di AK in funzione di E_{cm} e di θ_{cm} e, sapendo che sono legati agli angoli θ, ϕ secondo le relazioni

$$E_{cm} = \frac{1}{M} \left[\frac{p_{F1}^2}{2m_1^*} m_2^* + \frac{p_{F2}^2}{2m_2^*} m_1^* - \mathbf{p}_{F1} \cdot \mathbf{p}_{F2} \cos \theta \right] \quad , \quad \theta_{cm} = \phi , \quad (\text{B.11})$$

possiamo senza problemi risalire al valore della probabilità di transizione $W_{\alpha\beta}$ in funzione degli angoli θ, ϕ .

La sezione d'urto differenziale viene calcolata secondo la formula

$$\begin{aligned} d\sigma = & \frac{1}{\Phi} W (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \\ & \times (2\pi) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} , \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

dove il flusso Φ è dato da

$$\Phi = \frac{|\mathbf{p}|}{\mu} . \quad (\text{B.13})$$

Ricordando che lo spazio delle fasi è uguale in qualunque sistema di riferimento, passando al sistema delle coordinate relative, possiamo riscriverlo come

$$\frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} = \frac{d^3 P'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} . \quad (\text{B.14})$$

L'integrazione in d^3P' viene effettuata utilizzando la δ sugli impulsi, mentre possiamo riscrivere d^3p' come

$$d^3p' = d\Omega_{p'} |\mathbf{p}'|^2 dp' = d\Omega_{p'} |\mathbf{p}'| \mu dE_{p'} , \quad (\text{B.15})$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $E_{p'} = |\mathbf{p}'|^2/2\mu$. L'integrazione in $dE_{p'}$ viene effettuata sfruttando la δ sulle energie e otteniamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \frac{\mu}{|\mathbf{p}|} W \frac{1}{(2\pi)^2} |\mathbf{p}'| \mu , \quad (\text{B.16})$$

e ricordando che nel sistema di AK $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$, abbiamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \left(\frac{\mu}{2\pi} \right)^2 W . \quad (\text{B.17})$$

Tenendo conto infine delle (B.11) possiamo ottenere la probabilità di transizione in funzione degli angoli θ e ϕ

$$W = W(\theta, \phi) = \left(\frac{2\pi}{\mu} \right)^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} [E_{cm} = f(\theta), \theta_{cm} = \phi] . \quad (\text{B.18})$$

La massa effettiva si ricava dall'energia di singola particella. La relazione fra queste due grandezze è data da:

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{p} \frac{de}{dp} . \quad (\text{B.19})$$

Essendo la percentuale di protoni trascurabile possiamo considerare la materia in questione puramente neutronica con l'energia di singola particella data dalla (2.32) calcolata per i soli neutroni. L'andamento del rapporto fra la massa effettiva e la massa nuda del neutrone è stata riportata in Fig.4.2. Da questo andamento abbiamo estratto per ogni valore di densità barionica il valore delle masse effettive di neutrone e protone, sapendo che per ogni densità ρ la densità protonica è $\rho_p = x\rho$ e quella neutronica è $\rho_n = (1-x)\rho$, con x determinata per ciascuna densità dalla condizione di β -stabilità (4.1).

La massa effettiva dell'elettrone viene considerata uguale al suo impulso sulla superficie di Fermi, essendo gli elettroni paricelle ultra-relativistiche.

Appendice C

Calcolo della sezione d'urto NN

Per calcolare la probabilità di transizione fra stati nucleonici è necessario conoscere la quantità $|v_{\text{eff}}(\mathbf{q})|^2$, dove $\mathbf{q}$ è il momento trasferito nel processo.

Dobbiamo quindi calcolare l'elemento di matrice di v_{eff} fra stati antisimmetrizzati di due nucleoni

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k}, SM, T \rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} P_{\sigma\tau} \right) |SM, T\rangle, \quad (\text{C.1})$$

dove $P_{\sigma\tau}$ è l'operatore di scambio spin-isospin, dato da

$$P_{\sigma\tau} |SM_S, TM_T\rangle = (-)^{S+T} |SM_S, TM_T\rangle. \quad (\text{C.2})$$

E' importante notare che, grazie alla conservazione della carica, gli stati non dipendono dalla proiezione dell'isospin totale, quindi poniamo $M_T = 0$. Usando l'espansione delle onde piane in armoniche sferiche, possiamo scrivere

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_L \sqrt{4\pi(2L+1)} i^L j_L(kr) Y_L^0(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{C.3})$$

e inoltre

$$Y_L^0(\hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} \sum_m Y_L^{*m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_L^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{C.4})$$

quindi infine otteniamo

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} |SM\rangle = \sum_{Lm} 4\pi i^L j_L(kr) Y_L^{*m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_L^m(\hat{\mathbf{r}}) |SM\rangle. \quad (\text{C.5})$$

Utilizzando le funzioni spin-angolo possiamo scrivere

$$Y_L^m(\hat{\mathbf{r}})|SM\rangle = \sum_J \langle LmSM|JM_J\rangle \mathcal{Y}_{LSJ}^{M_J} \quad , \quad \mathcal{Y}_{LSJ}^{M_J} = |LSJM_J\rangle . \quad (\text{C.6})$$

Quindi riscriviamo lo stato di due nucleoni (C.1) come

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}|\mathbf{k}, SM, T\rangle_a &= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \sum_{LJM_J} [1 - (-)^{L+S+T}] i^L j_L(kr) Y_L^{*M_J-M}(\hat{\mathbf{k}}) \\ &\quad \times \langle L(M_J - M)SM|JM_J\rangle |LSJM_J\rangle , \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

e possiamo scrivere gli elementi di matrice di v_{eff} :

$$\begin{aligned} \langle k', SM'T|v_{\text{eff}}|K, SMT\rangle &= \sum_{JM_J} \sum_{LL'} [1 - (-)^{L+S+T}] [1 - (-)^{L'+S+T}] \\ &\quad \times Y_L'^{M_J-M'}(\hat{\mathbf{k}}') \langle JM_J|L'(M_J - M')SM'\rangle \\ &\quad \times Y_L'^{*M_J-M}(\hat{\mathbf{k}}) \langle L(M_J - M)SM|JM_J\rangle \\ &\quad \times 8\pi^2 i^{L-L'} \int d^3r j_{L'}(k'r) \langle L'SJM_J|v_{\text{eff}}|LSJM_J\rangle . \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Distinguiamo i casi in cui lo stato di due nucleoni è di singoletto, ovvero $S = 0$, oppure di tripletto, $S = 1$. Per analizzare in maniera più chiara questi casi è conveniente riscrivere il potenziale efficace nella base spin-isospin come nella (2.10).

Nel caso in cui lo stato sia di singoletto di spin, $S = 0$,

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) , \quad (\text{C.9})$$

ci interessa solamente la parte del potenziale efficace a simmetria centrale che non dipende dal momento angolare L , ne consegue che necessariamente $L = L'$, quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \langle k', 00T|v_{\text{eff}}|K, 00T\rangle &= \sum_{JM_JL} [1 - (-)^{L+T}]^2 Y_L^{M_J}(\hat{\mathbf{k}}') Y_L^{*M_J}(\hat{\mathbf{k}}) \\ &\quad \times 8\pi^2 \int d^3r j_L(k'r) j_L(kr) \langle L0JM_J|v_{\text{eff}}^{TS}|L0JM_J\rangle . \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Nel caso in cui lo stato sia di tripletto di spin, $S = 1$,

$$|1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned}
|1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\
|1, -1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle,
\end{aligned}$$

dobbiamo invece considerare l'intero potenziale, e abbiamo a che fare con due pezzi, uno a simmetria centrale

$$\begin{aligned}
\langle k', 1M'T|v_{\text{eff}}|K, 1MT\rangle &= \sum_{JM_J L} [1 - (-)^{L+1+T}]^2 \\
&\times Y_L^{M_J-M'}(\hat{k}') \langle JM_J|L(M_J - M')1M'\rangle \\
&\times Y_L^{*M_J-M} \langle L(M_J - M)1M|JM_J\rangle \\
&\times 8\pi^2 \int d^3r j_L(k'r) \langle L1JM_J|v_{\text{eff}}^{T1}|L1JM_J\rangle j_L(kr),
\end{aligned} \tag{C.12}$$

e uno di natura non centrale

$$\begin{aligned}
\langle k', 1M'T|v_{\text{eff}}|K, 1MT\rangle &= \sum_{JM_J} \sum_{LL'} [1 - (-)^{L+1+T}][1 - (-)^{L'+1+T}] i^{L-L'} \\
&\times Y_L^{M_J-M'}(\hat{k}') \langle JM_J|L'(M_J - M')1M'\rangle \\
&\times Y_L^{*M_J-M} \langle L(M_J - M)1M|JM_J\rangle \\
&\times 8\pi^2 c_{LL'}^J \int d^3r j_L'(k'r) \langle L'1JM_J|v_{\text{eff}}^{tT}|L1JM_J\rangle j_L(kr),
\end{aligned} \tag{C.13}$$

dove l'elemento di matrice $c_{LL'}^J$ è esplicitamente

$$c_{LL'}^J = \langle L'1JM_J|S_{12}|L1JM_J\rangle = c_{L'L}^J. \tag{C.14}$$

Bibliografia

- [1] S. Chandrasekhar, Phys. Rev. Lett. **24** (1970) 611.
- [2] S. Chandrasekhar, Astrophys. J. **161** (1970) 561.
- [3] J.L. Friedman e B.F. Schutz, Astrophys. J. **161** (1970) 561.
- [4] N. Andersson, Astrophys. J. **502** (1998) 708.
- [5] J.L. Friedman e S.M. Morsink, Astrophys. J. **502** (1998) 714.
- [6] L. Lindblom, B.J. Owen e S.M. Morsink, Phys. Rev. Letters **80** (1998) 4843.
- [7] E. Flowers e N. Itoh, Astrophys. J. **206** (1976) 218.
- [8] E. Flowers e N. Itoh, Astrophys. J. **230** (1979) 847.
- [9] S. Cowell e V.R. Pandharipande, Phys. Rev. C **70** (2004) 035801.
- [10] O. Benhar e M. Valli, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 232501.
- [11] D.A. Baiko e P. Haensel, Acta Phys. Pol. **30**, 1097 (1999).
- [12] N.K. Glendenning, *Compact Stars* (Springer, Berlin, GE, 2000).
- [13] S.L. Shapiro e S.A. Teukolski, *Black holes, white dwarfs and neutron stars* (Wiley-Interscience, New York, NY, 1983).
- [14] J.R. Oppenheimer e G.M. Volkoff, Phys. Rev. **55** (1939) 374.

-
- [15] R.C. Tolman, Phys. Rev. **55** (1939) 364.
- [16] A.Hewish, S.J. Bell, J.D.H. Pilkington, P.F. Scott e R.A. Collins, Nature **217** (1968) 709.
- [17] H.A. Bethe, Rev. Mod. Phys. **8** (1936) 139.
- [18] V.G.J. Stoks, R.A.M. Klomp, M.C.M. Rentmeester e J.J. de Swart, Phys. Rev. C **48** (1993) 792.
- [19] R.B. Wiringa, V.G.J. Stocks e R. Schiavilla, Phys. Rev. C **51** (1995) 38.
- [20] S.C. Pieper e R.B. Wiringa, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **51** (2001) 53.
- [21] S. Fantoni e V.R. Pandharipande, Phys. Rev. C **37** 1697 (1988) 1697.
- [22] J.W. Clark, Prog. Part. Nucl. Phys. **2** (1979) 89.
- [23] N. Farina, Tesi di Dottorato in Fisica, “Sapienza” Università di Roma, 2009. arXiv:0901.2507.
- [24] I. Lagaris e V.R. Pandharipande, Nucl. Phys. A **359** (1981) 349.
- [25] A. Akmal, V.R. Pandharipande e D.G. Ravenhall, Phys. Rev. C **58** (1998) 1804.
- [26] A. Sarsa, S. Fantoni, K.E. Schmidt e F. Pederiva, Phys. Rev. C **68** (2003) 024308.
- [27] K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley Interscience, New York, NY, 1984).
- [28] G. Baym and C. Pethick, *Landau Fermi-Liquid Theory* (John Wiley & Sons, New York, NY, 1991).
- [29] L.D. Landau, Soviet Phys. JETP **3** (1957) 920; *ibid.* **8** (1959) 70.

-
- [30] A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov e I.E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover, New York, NY, 1975).
- [31] N.H. March, W.H. Young e S. Sampanthar, *The many-body problem in quantum mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1967).
- [32] D. Pines e P. Nozières, *The theory of quantum liquids* (Perseus Books, Cambridge, MA, 1999).
- [33] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Elsevier, Amsterdam, NE, 1987).
- [34] E.M. Lifshitz e L.P. Pitaevskii, *Physical Kinetics* (Elsevier, Amsterdam, NE, 1981).
- [35] A.A. Abrikosov e I.M. Khalatnikov, Soviet Phys. JETP **5** (1957) 887; Rep. Prog. Phys. **22** (1959) 329.
- [36] G.A. Brooker e J. Sykes, Phys. Rev. Lett. **21** (1968) 279.
- [37] J. Sykes e G.A. Brooker, Ann. of Phys. (N.Y.) **56** (1970) 1.
- [38] H. Højgaard Jensen, H. Smith e J.W. Wilkins, Phys. Lett. **27 A** (1968) 532; Phys. Rev. **185** (1969) 323.
- [39] R.H. Anderson, C.J. Pethick e K.F. Quader, Phys. Rev. B **35** (1987) 1620.
- [40] C. Cutler e L. Lindblom, Ap. J. **314** (1987) 234.
- [41] L. Lindblom, in *Gravitational Waves: a Challenge to Theoretical Astrophysics*, edited by V. Ferrari, J.C. Miller and L. Rezzolla, ICTP Lecture Notes Series Vol. 3 (ICTP, Trieste, 2001).
- [42] N. Andersson e K.D. Kokkotas, Int. J. Mod. Phys. D **10** (2001) 381.
- [43] L. Amundsen e E. Østgaard, Nucl. Phys. A **437** (1985) 487.