



**Università del Salento**

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

# Scattering di un fotone in un background gravitazionale

Candidato  
**Matteo Maria Maglio**

Relatore  
**Prof. Claudio Corianò**

---

Anno Accademico 2012-2013



*Alla mia famiglia,  
la rosa del mio pianeta.  
A Valentina, Francesco, Fabio e Chiara,  
per avermi addomesticato.*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iv</b>
<b>1 Elementi di relatività generale</b>	<b>1</b>
1.1 Equazioni di Einstein . . . . .	1
1.2 Scelta della gauge . . . . .	4
1.3 Linearizzazione delle equazioni di Einstein . . . . .	5
1.4 Gradi di libertà del campo gravitazionale . . . . .	8
1.5 Gravitoelettromagnetismo (GEM) . . . . .	10
<b>2 Deflessione classica della luce</b>	<b>14</b>
2.1 Caso non relativistico . . . . .	14
2.2 Caso relativistico . . . . .	19
2.2.1 La soluzione di Schwarzschild . . . . .	19
2.2.2 Geodetiche di Schwarzschild . . . . .	21
<b>3 Calcolo della sezione d'urto quantistica</b>	<b>26</b>
3.1 Campo elettromagnetico in presenza di un campo gravitazionale debole . . .	26
3.2 Sorgente esterna . . . . .	27
3.3 Richiami sulla matrice di diffusione . . . . .	28
3.4 Calcolo della sezione d'urto al primo ordine . . . . .	30
<b>4 Lenti gravitazionali e materia oscura</b>	<b>34</b>
4.1 Teoria delle lenti gravitazionali . . . . .	34
4.2 Materia oscura . . . . .	41
<b>A Vertice gravitone/fotone/fotone</b>	<b>45</b>
<b>B Calcolo della sezione d'urto quantistica</b>	<b>49</b>

# Introduzione

Nel 1916 Albert Einstein pubblicò lo scritto *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie* (*fondamenti della relatività generale*) con il quale formulò la teoria della relatività generale, che coinvolge non solo lo spazio e il tempo ma anche la gravitazione. Questa teoria è spesso considerata ostica e cervellotica, in parte perchè il nuovo punto di vista introdotto sulla natura dello spazio-tempo viene accettato a fatica a dispetto delle nozioni classiche profondamente radicate e intuitive, e in parte perchè la matematica richiesta per una formulazione precisa delle idee e delle equazioni della relatività generale non è molto familiare alla maggior parte dei fisici. Anche se è indubbia la bellezza di questa teoria, la sua rilevanza non è universalmente riconosciuta.

Questa teoria risvegliò l'interesse comune sul finire degli anni '50 grazie a due famosi gruppi di ricerca, guidati da John Wheeler e Herman Bondi. Essi sostennero l'interesse per la relatività generale concentrando la loro attenzione verso due problematiche del loro tempo. La prima era relativa alla scoperta astronomica di oggetti compatti e ad alta energia, in particolare quasar e sorgenti compatte a raggi X. In questi oggetti il collasso gravitazionale e i forti campi gravitazionali giocavano un ruolo importante tanto che la relatività generale era il mezzo necessario per studiarne la struttura. La teoria moderna del collasso gravitazionale, delle singolarità e dei buchi neri si sviluppò nella metà degli anni '60 in risposta a questa esigenza.

La seconda problematica era relativa alla necessità di sviluppare una teoria quantistica che coinvolgesse la gravità. Infatti la teoria di Einstein non dava informazioni riguardo alle particelle mediatrici della forza gravitazionale, i cosiddetti *gravitoni*.

Attualmente uno dei problemi più interessanti in fisica teorica è di conciliare la teoria di relatività generale con la teoria quantistica dei campi. L'incompatibilità delle due teorie deriva dalla diversità della geometria dello spazio-tempo; in relatività generale lo spazio-tempo è dinamico e viene curvato dalla presenza di una massa, mentre la formulazione della teoria dei campi prevede una struttura di fondo non dinamica che utilizza lo spazio-tempo di Minkowski.

A partire dagli anni '80, molti fisici teorici iniziarono a studiare il modo di unificare le quattro forze fondamentali in una *teoria del tutto*, dando diverse proposte di teorie della gravità quantistica. Tra queste ricordiamo la *teoria delle stringhe* (in particolare *AdS/CFT*), *teoria della supergravità*, *gravità quantistica a loop*, *gravità quantistica euclidea*, *teoria del Twistor*, *gravità indotta di Sakharov*. Attualmente quelle più studiate sono la teoria di stringa e la teoria dei loop. Tuttavia la validità fisica di queste teorie non è stata

---

ancora verificata sperimentalmente.

Lo scopo di questo lavoro di tesi è presentare gli effetti della relatività generale sul moto dei corpi e le sue possibili implicazioni a livello cosmologico. In particolare, nel primo capitolo si daranno i concetti fondamentali della teoria della relatività generale, si ricaveranno le equazioni di Einstein, si discuterà l'invarianza associata a tali equazioni e si denoteranno le possibili scelte della gauge per eliminare questa invarianza. Si procederà poi con la linearizzazione delle equazioni di Einstein, con lo studio dei gradi di libertà del campo gravitazionale e dell'analogia dell'equazioni linearizzate di Einstein con le equazioni di Maxwell [4, 5]. Nel secondo capitolo si svilupperà il calcolo classico della deflessione della luce. In particolare si vedrà la differenza tra il risultato previsto dalla gravitazione Newtoniana, proposto da Soldner nel 1804, con quello esatto della relatività generale [8]. Nel terzo capitolo poi si estenderà il calcolo della deflessione della luce al caso quantistico, quantizzando il campo elettromagnetico e calcolando la sezione d'urto quantistica al primo ordine del processo di scattering del fotone con il campo gravitazionale. Il calcolo verrà effettuato nel limite di campo gravitazionale debole, condizione che verrà giustificata sfruttando il concetto di raggio di Schwarzschild [4, 6, 2, 1]. Infine, nel quarto capitolo si studierà la teoria delle lenti gravitazionali e verrà analizzata una sua applicazione nella determinazione della materia oscura [7]. Nell'appendice A e nell'appendice B verranno esplicitati tutti i calcoli ottenuti nel corso del seguente lavoro per la determinazione del vertice d'interazione gravitone-fotone-fotone e della sezione d'urto quantistica al leading order.

## Notazione

I calcoli elaborati in questo lavoro saranno effettuati in unità "naturali", ossia considerando  $\hbar = c = 1$ . Per capire il significato di queste unità, osserviamo prima di tutto che  $\hbar$  e  $c$  sono delle costanti universali, cioè hanno lo stesso valore numerico per qualsiasi sistema di riferimento. Si può definire una nuova unità di lunghezza (o tempo) dalla condizione che  $c = 1$ . Quindi la velocità  $v$  di una particella verrà misurata come multiplo della velocità della luce in un modo molto naturale, in quanto in fisica delle particelle abbiamo generalmente a che fare con quantità relativistiche. In queste unità accade che per una particella massiva  $0 \leq v < 1$ , mentre per una particella senza massa  $v = 1$ . Da ciò segue quindi che  $[T] = [L]$ . La costante di Planck  $\hbar$  è un'altra costante universale e ha le dimensioni di un'azione, ossia  $[energia] \times [tempo]$  o anche  $[lunghezza] \times [impulso]$ . Quindi possiamo scegliere l'unità di energia tali per cui  $\hbar = 1$ . Da queste considerazioni segue che da un punto di vista dimensionale

$$\begin{aligned} [velocità] &= \textit{adimensionale}, \\ [energia] &= [impulso] = [massa], \\ [lunghezza] &= [massa]^{-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Così tutte le quantità fisiche possono essere espresse come potenze della massa o, equivalentemente, come potenze di lunghezza. Per esempio la costante gravitazionale  $G$  avrà le dimensioni di una  $[massa]^{-2}$ .



# Capitolo 1

## Elementi di relatività generale

### 1.1 Equazioni di Einstein

Uno dei modi per derivare le equazioni del campo gravitazionale prevede l'utilizzo del principio variazionale di Hamilton, detto *principio di minima azione*.

Consideriamo un sistema materiale in presenza di un campo gravitazionale esterno  $g_{\mu\nu}$  del tutto generico. L'azione totale sarà data dalla somma di un termine  $S_G$  puramente gravitazionale e un termine  $S_M$  della materia

$$S = S_M + S_G, \quad (1.1)$$

con

$$S_G = -\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{g(x)} R(x) d^4x, \quad (1.2)$$

$$S_M = \int \mathcal{L}_M(x) d^4x, \quad (1.3)$$

dove  $\mathcal{L}_M$  è la funzione lagrangiana del sistema materiale. Inoltre  $g(x)$  e  $R(x)$  sono rispettivamente lo scalare metrico e lo scalare di curvatura, definiti come

$$R(x) = g_{\mu\nu}(x) R^{\mu\nu}(x), \quad g(x) = \det[g_{\mu\nu}(x)]. \quad (1.4)$$

Il principio variazionale di Hamilton ci assicura che l'azione (1.1) sarà invariante per variazioni infinitesime delle variabili dinamiche, pertanto l'azione  $S$  sarà stazionaria rispetto ad una variazione arbitraria di  $g_{\mu\nu}$  se

$$\delta S = \delta S_M + \delta S_G = 0. \quad (1.5)$$

Valutiamo i termini nella (1.5). La variazione dell'azione della materia si può scrivere

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g(x)} T^{\mu\nu}(x) \delta g_{\mu\nu}(x), \quad (1.6)$$

dove  $T^{\mu\nu}(x)$  rappresenta il tensore energia-impulso del sistema. Per valutare la variazione dell'azione gravitazionale notiamo che

$$\delta(\sqrt{g}R) = R\delta\sqrt{g} + \sqrt{g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

La variazione del tensore di Ricci è

$$\delta R_{\mu\nu} = \left(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}\right)_{;\nu} - \left(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\right)_{;\lambda}, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{g} \left[ \left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}\right)_{;\nu} - \left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\right)_{;\lambda} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left( \sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left( g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Quest'ultimo termine dà contributo nullo poichè, una volta integrato su tutto lo spazio mediante il teorema di Gauss, diviene un integrale sulla ipersuperficie che racchiude il quadri-volume e la variazione del campo agli estremi d'integrazione è nulla ( $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \rightarrow 0$  quando  $|x^{\mu}| \rightarrow \infty$ ). Inoltre

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad , \quad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma}, \quad (1.10)$$

per cui

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} \left[ R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right] \delta g_{\mu\nu}. \quad (1.11)$$

Inserendo la (1.6) e la (1.11) nella (1.5) e tenendo conto del fatto che le  $\delta g_{\mu\nu}$  sono arbitrarie, si ottiene

$$\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left[ R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + 8\pi GT^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow \quad R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -8\pi GT^{\mu\nu}. \quad (1.13)$$

Queste sono le equazioni del campo gravitazionale, meglio note come *equazioni di Einstein*. Contraendo quest'ultima equazione con il tensore metrico si ottiene una forma alternativa molto utile

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R &= -8\pi Gg_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \\ R - 2R &= -8\pi GT_{\mu}^{\mu} \quad \Rightarrow \quad R = 8\pi GT_{\mu}^{\mu} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\lambda}^{\lambda} \right). \quad (1.15)$$

Dalla non linearità delle equazioni di Einstein segue la non applicabilità del principio di sovrapposizione ai campi gravitazionali. Questo principio sarà valido nei limiti di approssimazione di campi deboli nei quali l'equazioni di Einstein prenderanno una forma lineare.

Se consideriamo la divergenza dell'equazioni di Einstein vediamo che seguono direttamente le leggi di conservazione dell'energia-impulso

$$\left( R^\mu_\lambda - \frac{1}{2}\delta^\mu_\lambda R \right)_{;\mu} = -8\pi G T^\mu_{\lambda;\mu}. \quad (1.16)$$

Dall'identità di Bianchi segue

$$\left( R^\mu_\lambda - \frac{1}{2}\delta^\mu_\lambda R \right)_{;\mu} = 0, \quad (1.17)$$

per cui

$$T^\mu_{\lambda;\mu} = 0. \quad (1.18)$$

Si vede quindi come le equazioni di Einstein contengano al loro interno la conservazione dell'energia-impulso che è legata, a sua volta, all'equazioni del moto del sistema fisico. Quindi le equazioni del campo gravitazionale contengono in sé anche le equazioni della materia stessa che genera questo campo.

Vediamo infine come le equazioni di Einstein riconducano alla legge di Newton nel caso non relativistico. Consideriamo quindi un corpo massivo non relativistico statico. Si trova che l'unica componente non banale del suo tensore energia-impulso è  $T_{00} = \rho$ , con  $\rho$  densità di massa. L'equazioni di Einstein in questo caso diverranno

$$\begin{aligned} R_{00} = (R_{0i0i} - R_{0000}) &= \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} = -8\pi G \left( \rho - \frac{1}{2}\rho \right) \\ \nabla^2 g_{00} &= -8\pi G \rho, \end{aligned} \quad (1.19)$$

e, sapendo che in un campo statico debole prodotto da una densità di massa non relativistica  $\rho$ , la componente tempo-tempo del tensore metrico è data approssimativamente da

$$g_{00} \simeq -(1 + 2\phi),$$

con  $\phi$  potenziale Newtoniano, allora si ottiene l'equazione di Poisson per il campo gravitazionale non relativistico

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho.$$

La soluzione generale di questa equazione sarà della forma

$$\phi = -G \int \frac{\rho}{r} dV.$$

In particolare, se si considera il campo generato da una massa  $M$  si ha

$$\phi = -\frac{GM}{r},$$

e quindi la forza agente su un'altra particella di massa  $m$  darà la legge di gravitazione universale di Newton

$$F = G \frac{Mm}{r^2}.$$

## 1.2 Scelta della gauge

L'equazioni di Einstein comprendono 10 equazioni algebricamente indipendenti che corrispondono alle componenti indipendenti del tensore simmetrico a primo membro della (1.13). Il tensore metrico incognito ha anch'esso 10 componenti algebricamente indipendenti, quindi si potrebbe pensare che le equazioni di Einstein siano sufficienti a determinare in modo unico il tensore  $g_{\mu\nu}$ . Ciò non è esatto in quanto le 10 componenti del tensore sono strettamente legate da 4 equazioni differenziali che esprimono l'identità di Bianchi

$$\left( R^\mu{}_\lambda - \frac{1}{2}\delta^\mu_\lambda R \right)_{;\mu} = 0, \quad (1.20)$$

quindi si hanno 6 equazioni algebricamente indipendenti per la determinazione delle 10 incognite di  $g_{\mu\nu}$ . Ci sono così infinite soluzioni dell'equazione di Einstein. Questo aspetto corrisponde al fatto che, se  $g_{\mu\nu}$  è soluzione dell'equazioni di Einstein, lo sarà anche  $g'_{\mu\nu}$  ottenuta dalla soluzione originaria mediante una generica trasformazione di coordinate  $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ . In particolare richiediamo che  $x'^\mu(x)$  sia invertibile, differenziabile e con inversa differenziabile, cioè  $x'^\mu(x)$  deve essere un arbitrario diffeomorfismo. Sotto questa trasformazione il tensore metrico si trasforma come

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x). \quad (1.21)$$

Questa trasformazione di coordinate coinvolge quattro funzioni arbitrarie  $x'^\mu(x)$  dando alla soluzione della (1.13) quattro gradi di libertà.

Il discorso è analogo al caso elettromagnetico. Nel caso delle equazioni di Maxwell l'ambiguità nella soluzione viene rimossa scegliendo una particolare gauge. Allo stesso modo, nel caso delle equazioni di Einstein si sceglie un particolare sistema di coordinate (che è equivalente alla scelta della gauge).

Una scelta particolarmente conveniente è il sistema di coordinate armoniche noto anche come gauge di Lorentz o gauge di De Donder. Le condizioni per ottenere un sistema di coordinate armoniche è che

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (1.22)$$

Esprimiamo la connessione affine in termini di tensore metrico

$$\Gamma^\lambda = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda k} [\partial_\nu g_{k\mu} + \partial_\mu g_{k\nu} - \partial_k g_{\mu\nu}], \quad (1.23)$$

sapendo che

$$g^{\lambda k} \partial_\nu g_{k\mu} = -g_{k\mu} \partial_\nu g^{\lambda k}, \quad \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_k g_{\mu\nu} = g^{-1/2} \partial_k g^{1/2}, \quad (1.24)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda &= \frac{1}{2} \left[ -\delta_k^\nu \partial_\nu g^{\lambda k} - \delta_k^\mu \partial_\mu g^{\lambda k} - 2g^{-1/2} \partial_k g^{1/2} \right] \\ &= g^{-1/2} g^{\lambda k} \partial_k g^{1/2} = -g^{-1/2} \partial_k \left( g^{1/2} g^{\lambda k} \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Quindi la condizione (1.22) diviene

$$\partial_k \left( g^{1/2} g^{\lambda k} \right) = 0. \quad (1.26)$$

Se calcoliamo

$$\begin{aligned} \square x^\mu &= \left( g^{\lambda k} x_{;\lambda}^\mu \right)_{;k} = \left[ g^{\lambda k} \left( \partial_\lambda x^\mu - \Gamma_{\lambda k}^\mu x^k \right) \right]_{;k} \\ &= \left[ g^{\lambda \mu} - \Gamma^\mu x^k \right]_{;k} = g^{\lambda \mu}_{;k} = \partial_k g^{\lambda \mu} + \Gamma_{k\sigma}^\lambda g^{\sigma \mu} + \Gamma_{k\sigma}^\mu g^{\lambda \sigma} \\ &= \partial_k g^{\lambda \mu} - \partial_k g^{\lambda \mu} = 0, \end{aligned} \quad (1.27)$$

ossia le coordinate sono esse stesse delle funzioni armoniche. Da questa proprietà deriva l'appellativo per le coordinate.

### 1.3 Linearizzazione delle equazioni di Einstein

Il significato fisico delle equazioni di Einstein risulta più chiaro quando queste vengono studiate nel limite di spazio-tempo piatto che rivela la loro relazione con l'equazioni delle onde. Consideriamo perciò la metrica nell'approssimazione di campo debole

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.28)$$

con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ .

In questo limite il tensore di Ricci assume la forma

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda \\ &\simeq \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + O(h^2), \end{aligned} \quad (1.29)$$

e la connessione affine

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} [\partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu} - \partial_\rho h_{\mu\nu}] + O(h^2). \quad (1.30)$$

Inserendo la (1.30) nella (1.29), si otterrà il tensore di Ricci al primo ordine in  $h$  che risulta

$$R_{\mu\nu} \simeq R_{\mu\nu}^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \left( \square h_{\mu\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial_\lambda \partial_\nu h_\mu^\lambda + \partial_\nu \partial_\mu h_\lambda^\lambda \right). \quad (1.31)$$

Utilizzando la (1.31), (1.15) le equazioni di Einstein diventeranno

$$\begin{aligned} \square h_{\mu\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial_\lambda \partial_\nu h_\mu^\lambda + \partial_\nu \partial_\mu h_\lambda^\lambda &= -16\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_\lambda^\lambda \right) \\ &= 16\pi G S_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Dalla forma di queste equazioni si vede che, scegliendo un sistema di riferimento in cui valga la condizione (1.28), si rompe l'invarianza della relatività generale per trasformazioni

generali di coordinate. Tuttavia resta un'invarianza di gauge residua. Se consideriamo infatti una generica trasformazione di coordinate

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad (1.33)$$

dove  $\partial_\nu \epsilon^\mu$  è al massimo dello stesso ordine di grandezza di  $h_{\mu\nu}$ , la metrica nel nuovo sistema di coordinate diventerà

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu} &= \partial_\lambda x'^\mu \partial_\rho x'^\nu g^{\lambda\rho} \\ &= \eta^{\mu\nu} - \left( h^{\mu\nu} - \partial_\rho \epsilon^\nu \eta^{\mu\rho} - \partial_\lambda \epsilon^\mu \eta^{\lambda\nu} \right) + O(\partial\epsilon\partial\epsilon) + O(h\partial\epsilon), \end{aligned} \quad (1.34)$$

e dal momento che  $g'^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ ,

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial_\rho \epsilon^\nu \eta^{\mu\rho} - \partial_\lambda \epsilon^\mu \eta^{\lambda\nu}. \quad (1.35)$$

Se  $|\partial_\nu \epsilon^\mu|$  è al massimo dello stesso ordine di grandezza di  $|h_{\mu\nu}|$  allora la condizione che  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  è verificata, e quindi questi diffeomorfismi dimostrano una simmetria della teoria linearizzata.

Possiamo effettuare una trasformazione di Lorentz globale e finita

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

per la quale il tensore metrico si trasforma in

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') &= \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma g_{\rho\sigma}(x) \\ &= \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma [\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}(x)] \\ &= \eta_{\mu\nu} + \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma h_{\rho\sigma}(x) \\ &= \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x'), \end{aligned} \quad (1.36)$$

con

$$h'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma h_{\rho\sigma}(x). \quad (1.37)$$

Quest'ultima relazione dimostra che  $h_{\mu\nu}$  si comporta come un tensore quando si effettuano delle trasformazioni di Lorentz. La condizione che  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  continua a valere anche se si effettuano rotazioni, mentre per i boost non è così banale. Si dimostra inoltre che la teoria linearizzata è invariante per trasformazioni finite di Poincarè a differenza della teoria generale di relatività che è invariante per trasformazioni di coordinate e non ha simmetria di Poincarè.

Avendo libertà di scelta sulla gauge residua, scegliamo la gauge armonica per la quale

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0, \quad (1.38)$$

ossia al primo ordine in  $h$

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho} [\partial_{\mu}h_{\rho\nu} + \partial_{\nu}h_{\rho\mu} - \partial_{\rho}h_{\mu\nu}] \\
 &= \frac{1}{2} \left( \partial_{\mu}h^{\lambda\mu} + \partial_{\nu}h^{\lambda\nu} - \eta^{\lambda\rho}\partial_{\rho}h_{\nu}^{\nu} - h^{\mu\nu}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\lambda} - h^{\mu\nu}\partial_{\nu}h_{\mu}^{\lambda} + h^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}\partial_{\rho}h_{\mu\nu} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \partial_{\mu}h^{\lambda\mu} + \partial_{\nu}h^{\lambda\nu} - \eta^{\lambda\rho}\partial_{\rho}h_{\nu}^{\nu} + O(h^2) \right) = 0 \\
 \Rightarrow \quad &\partial_{\mu}h^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\partial_{\rho}h_{\nu}^{\nu} = 0.
 \end{aligned}$$

Contraendo quest'ultima relazione con il tensore  $\eta_{\lambda\sigma}$  otteniamo

$$\partial_{\mu}h_{\sigma}^{\mu} - \frac{1}{2}\partial_{\sigma}h_{\nu}^{\nu} = 0. \quad (1.39)$$

Si può dimostrare che questa scelta di sistema di coordinate è sempre possibile, infatti, supponendo che  $h_{\mu\nu}$  non soddisfi la (1.39), allora è possibile trovare un  $h'_{\mu\nu}$  che soddisfi questa condizione applicando una trasformazione di coordinate

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x),$$

con  $\epsilon_{\nu}$  ottenuto dall'equazione differenziale

$$\square\epsilon_{\nu} = \partial_{\mu}h_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\partial_{\nu}h_{\mu}^{\mu}.$$

Quindi considerando una  $h_{\mu\nu}$  che soddisfi la scelta della gauge, le equazioni linearizzate del campo gravitazionale (1.32) saranno della forma

$$\begin{aligned}
 \square h_{\mu\nu} - \partial_{\lambda}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\lambda} - \partial_{\lambda}\partial_{\nu}h_{\mu}^{\lambda} + \partial_{\nu}\partial_{\mu}h_{\lambda}^{\lambda} &= \\
 = \square h_{\mu\nu} - \partial_{\lambda}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu} \left( \partial_{\lambda}h_{\mu}^{\lambda} - \frac{1}{2}\partial_{\mu}h_{\lambda}^{\lambda} \right) + \frac{1}{2}\partial_{\nu}\partial_{\mu}h_{\lambda}^{\lambda} \\
 = \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \left( \partial_{\lambda}h_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{2}\partial_{\nu}h_{\lambda}^{\lambda} \right) &= \square h_{\mu\nu}, \\
 \Rightarrow \quad \square h_{\mu\nu} &= 16\pi G S_{\mu\nu}. \quad (1.40)
 \end{aligned}$$

Una soluzione della (1.40) è dal prodotto di convoluzione tra la sorgente statica  $S_{\mu\nu}$  e il propagatore ritardato

$$G_R(x, x') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(x_0 - x'_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (1.41)$$

normalizzato come

$$\square G_R(x, x') = \delta^{(4)}(x - x'). \quad (1.42)$$

Per cui la soluzione della (1.40) può essere sapressa come

$$h_{\mu\nu}(x) = 16\pi G \int d^4x' G_R(x, x') S_{\mu\nu}(x'). \quad (1.43)$$

E' facile verificare che questa è proprio la soluzione dell'equazione, infatti

$$\begin{aligned} \square h_{\mu\nu} &= 16\pi G \int d^4x' \square [G_R(x, x') S_{\mu\nu}(x')] \\ &= 16\pi G \int d^4x' S_{\mu\nu}(x') \square G_R(x, x') \\ &= 16\pi G \int d^4x' S_{\mu\nu}(x') \delta^{(4)}(x - x') \\ &= 16\pi G S_{\mu\nu}(x). \end{aligned}$$

## 1.4 Gradi di libertà del campo gravitazionale

Consideriamo l'equazioni linearizzate di Einstein in assenza di sorgenti. Queste sono della forma

$$\square^2 h^{\mu\nu} - \partial_\lambda \partial^\mu h^{\lambda\nu} - \partial_\lambda \partial^\nu h^{\lambda\mu} + \partial^\nu \partial^\mu h^\lambda_\lambda = 0. \quad (1.44)$$

Esprimendole nello spazio dei momenti risulta

$$p^2 h^{\mu\nu} - p_\alpha (p^\mu h^{\nu\alpha} + p^\nu h^{\mu\alpha}) + p^\mu p^\nu h = 0, \quad (1.45)$$

avendo utilizzato la proprietà

$$\int d^4x \partial^\mu \psi(x) e^{-ipx} = -ip^\mu \psi(p). \quad (1.46)$$

La (1.45) è invariante per trasformazioni di coordinate generiche  $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$  ossia è invariante per trasformazioni di gauge. La variazione del tensore  $h^{\mu\nu}$  dovuta a questa trasformazione sarà

$$\delta h^{\mu\nu} = ip^\mu \epsilon^\nu + ip^\nu \epsilon^\mu, \quad (1.47)$$

per la (1.35).

L'esistenza di una simmetria locale (invarianza di gauge) dà luogo ad una descrizione ridondante del campo gravitazionale che può essere rimossa scegliendo una particolare gauge.

Precedentemente abbiamo utilizzato la gauge di De Donder per ottenere l'equazioni linearizzate del campo. La gauge di De Donder dà luogo ad equazioni di campo con una chiara simmetria di Lorentz, ossia sono covarianti, ma d'altro canto non fa luce sui gradi di libertà fisici del campo. Una gauge che permette di rimuovere i gradi di libertà non fisici è la cosiddetta *gauge del cono-luce*. Per esprimere questa gauge è necessario introdurre le coordinate di cono-luce.

Definiamo le coordinate di cono luce  $(x^+, x^-, x^I)$  come

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1), \quad x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1), \quad (1.48)$$

con  $x^I$  si indicano le componenti trasverse  $x^2, x^3$ .

Il tensore metrico  $h^{\mu\nu}$  avrà come componenti

$$(h^{IJ}, h^{+,I}, h^{-,I}, h^{+,-}, h^{+,+}, h^{-,-}).$$

Le condizioni di gauge di cono-luce sono espresse come

$$h^{+,-} = h^{+,-} = h^{+,-} = 0. \quad (1.49)$$

Si vede che è sempre possibile soddisfare queste condizioni in quanto, per una generica trasformazione di coordinate, si ottiene che

$$\delta h^{++} = 2ip^+ \epsilon^+, \quad (1.50)$$

$$\delta h^{+-} = ip^+ \epsilon^- + ip^- \epsilon^+, \quad (1.51)$$

$$\delta h^{+I} = ip^+ \epsilon^I + ip^I \epsilon^+, \quad (1.52)$$

per cui è possibile scegliere  $\epsilon^+, \epsilon^-, \epsilon^I$  in modo che valga la (1.49), assumendo che  $p^+ \neq 0$ . Abbiamo così utilizzato la libertà sulla gauge per porre a zero tutte le componenti di  $h^{\mu\nu}$  con l'indice +.

I gradi di libertà restanti sono dati dalle componenti

$$(h^{IJ}, h^{-I}, h^{--}).$$

Vediamo come cambiano l'equazioni linearizzate di Einstein avendo scelto la gauge di cono-luce. Tenendo a mente le condizioni (1.49), consideriamo la (1.45) quando  $\mu = \nu = +$ ,

$$p^2 h^{++} - p_\alpha (p^+ h^{+\alpha} + p^+ h^{+\alpha}) + p^+ p^+ h = (p^+)^2 h = 0, \quad (1.53)$$

$$\Rightarrow h = 0, \quad (1.54)$$

ossia

$$h = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = -2h^{+-} + h^{II} = 0 \quad \Rightarrow h^{II} = 0, \quad (1.55)$$

sapendo che

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

$h^{IJ} = 0$  significa che la matrice  $h^{IJ}$  è una matrice a traccia nulla. Con  $h = 0$  l'equazione (1.45) si riduce a

$$p^2 h^{\mu\nu} - p_\alpha (p^\mu h^{\nu\alpha} + p^\nu h^{\mu\alpha}) = 0.$$

Poniamo ora  $\mu = +$ , ottenendo

$$p^2 h^{+\nu} - p_\alpha (p^+ h^{\nu\alpha} + p^\nu h^{+\alpha}) = 0, \quad (1.57)$$

$$\Rightarrow p_\alpha h^{\nu\alpha} = 0, \quad (1.58)$$

dalla (1.58) per  $\nu = I$  e  $\nu = -$  si ottiene

$$p_- h^{I-} + p_J h^{IJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad h^{I-} = \frac{1}{p^+} p_J h^{IJ}, \quad (1.59)$$

$$p_- h^{- -} + P_I h^{-I} = 0 \quad \Rightarrow \quad h^{- -} = \frac{1}{p^+} p_I h^{-I}, \quad (1.60)$$

con la proprietà

$$p_- = -p^+, \quad p_+ = -p^-. \quad (1.61)$$

L'equazioni (1.59) e (1.60) ci danno  $h$  con gli indici - in funzione delle componenti trasverse  $h^{IJ}$ . Utilizzando tutte queste informazioni, otteniamo per la (1.45)

$$p^2 h^{\mu\nu} = 0. \quad (1.62)$$

L'unica equazione non banale è quella per gli indici trasversi per cui

$$p^2 h^{IJ}(p) = 0. \quad (1.63)$$

Questa equazione implica che per  $p^2 \neq 0$  tutte le componenti di  $h^{\mu\nu}$  sono nulle mentre per  $p^2 = 0$  le componenti di  $h^{IJ}(p)$  non sono fissate a eccezione della condizione di traccia nulla. Tutte le altre sono determinate in termini di componenti trasverse.

Concludiamo quindi che i gradi di libertà del campo gravitazionale sono dati da un campo tensoriale  $h^{IJ}$  simmetrico, a traccia nulla e trasverso, le cui componenti soddisfano l'equazioni del moto di uno scalare senza massa, quindi sono 2.

## 1.5 Gravitoelettromagnetismo (GEM)

L'approssimazione di campo debole dell'equazioni di Einstein è valida con grande accuratezza nel sistema solare. Si vede che la teoria linearizzata (1.40) ha una forma molto simile all'equazione delle onde elettromagnetiche. Abbiamo visto come una soluzione della (1.40) possa essere scritta in termini di potenziale ritardato (1.43). Si vede quindi come il tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$  simuli il comportamento della quadri-corrente elettromagnetica  $J_\mu$  e il tensore  $h_{\mu\nu}$  quello del potenziale  $A_\mu$ .

Nell'approssimazione di campo debole assumiamo che il tensore energia-impulso verifichi le condizioni:  $|T_{00}| \gg |T_{ij}|$  e  $|T_{0i}| \gg |T_{ij}|$ , quindi dalla (1.43) segue che  $|h_{00}| \gg |h_{ij}|$  e  $|h_{0i}| \gg |h_{ij}|$ . Sapendo che la massa  $m$  è legata alla densità di massa  $\rho = T_{00}$  dalla relazione

$$\int \rho d^3x = m,$$

e il momento angolare  $\mathbf{S}$  legato alla densità di massa-corrente  $j^i = T^{0i}$  dalla relazione

$$S^i = 2 \int \epsilon_{jk}^i x^j j^k d^3x.$$

Dalla (1.43) possiamo scrivere

$$h_{00} = -2\phi, \quad (1.64)$$

$$h_{0i} = 2A_i, \quad (1.65)$$

dove  $\phi$  è il potenziale Newtoniano o anche detto *potenziale gravitoelettrico*

$$\phi = -\frac{Gm}{r},$$

e  $A_i$  è il potenziale vettore *gravitomagnetico* dato in termini del momento angolare totale  $\mathbf{S}$  del sistema

$$A_i = \frac{GS^j x^k}{r^3} \epsilon_{ijk}. \quad (1.66)$$

La condizione della gauge di Lorentz

$$\partial_\mu h^\mu_\sigma - \frac{1}{2} \partial_\sigma h^\nu_\nu = 0,$$

può essere scritta in termini dei potenziali  $\phi$  e  $\mathbf{A}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + 2\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.67)$$

Questa, a parte il fattore 2, è la condizione della gauge di Lorentz in elettromagnetismo. Definiamo i campi gravitomagnetico e gravitoelettrico  $\mathbf{E}_G$  e  $\mathbf{B}_G$  come

$$\mathbf{E}_G = -\nabla\phi - \frac{1}{2} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.68)$$

$$\mathbf{B}_G = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.69)$$

Utilizzando queste relazioni, l'equazioni linearizzate (1.40) diventano

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_G = -4\pi G\rho, \quad (1.70)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_G = 0, \quad (1.71)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_G = -\frac{1}{2} \frac{\partial\mathbf{B}_G}{\partial t}, \quad (1.72)$$

$$\nabla \times \frac{1}{2}\mathbf{B}_G = -4\pi G\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{E}_G}{\partial t}, \quad (1.73)$$

$$(1.74)$$

queste sono le equazioni di Maxwell per i campi gravitoelettromagnetici (GEM).

Questi campi descrivono lo spazio-tempo al di fuori di un oggetto rotante in termini di campi gravitomagnetico e gravitoelettrico. Il tensore metrico può essere espresso in termini di potenziale gravitomagnetico e gravitoelettrico come

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (1 + 2\phi) dt^2 + 4A_i dx^i dt - (1 - 2\phi) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.75)$$

Nel limite di campo debole la gravità può essere considerata analogamente al campo elettromagnetico. Inoltre, per un corpo rotante, il campo gravitomagnetico può essere scritto come un campo generato da un dipolo

$$\mathbf{B}_G = -4G \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{S}) - \mathbf{S}r^2}{2r^5}. \quad (1.76)$$

Il campo gravitomagnetico è un effetto puramente relativistico, infatti nella teoria Newtoniana non troviamo alcun potenziale gravitomagnetico anche se il corpo sta ruotando. Quindi il campo gravitoelettrico è la parte Newtoniana del campo gravitazionale, mentre il campo gravitomagnetico è la parte relativistica.

Questo aspetto del gravitoelettromagnetismo è evidente quando andiamo a considerare l'equazione delle geodetiche per una particella test, sfruttando l'analogia tra la teoria di Einstein linearizzata e la teoria dell'elettromagnetismo

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (1.77)$$

dove  $\tau$  è il tempo proprio della particella. Per una particella non-relativistica

$$\frac{dx^0}{d\tau} \approx 1, \quad \frac{dx^i}{d\tau} \approx v^i \quad (1.78)$$

Considerando solo i termini lineari in  $v^i$ , e limitandoci ai campi statici dove  $g_{\mu\nu;0} = 0$ , otteniamo l'espressione

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{E}_G + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_G. \quad (1.79)$$

Questa è la legge della forza di Lorentz per campi GEM.

Le particelle orbitanti intorno a corpi rotanti, risentiranno di un campo gravitomagnetico che contribuirà ad un effetto di precessione dell'orbita. La precessione è chiamata *effetto di Lense-Thirring*.

Un corpo rotante ha un momento angolare  $\mathbf{L}$ . Il campo gravitomagnetico interagendo con questo momento angolare origina un momento torcente dato da

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \times \mathbf{B}_G. \quad (1.80)$$

Il momento torcente è uguale alla derivata temporale del momento angolare, e quindi

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -G \frac{\mathbf{L} \times [3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{S}) - \mathbf{S}r^2]}{r^5}, \quad (1.81)$$

e dal momento che

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L},$$

possiamo leggere la velocità angolare di precessione come

$$\boldsymbol{\omega} = G \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{S}) - \mathbf{S}r^2}{r^5}. \quad (1.82)$$

Se prendiamo la media di  $\boldsymbol{\omega}$  lungo l'orbita, la velocità angolare effettiva di precessione sarà

$$\langle \boldsymbol{\omega} \rangle = G \frac{3 \langle \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{S}) \rangle - \mathbf{S}r^2}{r^5}. \quad (1.83)$$

## Capitolo 2

# Deflessione classica della luce

Nel 1784 il fisico inglese Henry Cavendish pubblicò un manoscritto nel quale esponeva la misura della densità della Terra mediante un esperimento che successivamente prese il suo nome. In questo manoscritto egli accennava anche al problema riguardante la deflessione della luce per mezzo di un corpo massivo nel contesto della gravità newtoniana.

Successivamente, nel 1804, il fisico tedesco Johann Georg von Soldner pubblicò uno scritto nel quale calcolava quantitativamente la deflessione di un raggio luminoso dovuta ad un corpo massivo quale una stella. Facendo riferimento alle teorie della natura corpuscolare della luce, egli portò avanti il suo calcolo attribuendo una massa alle particelle luminose. Tuttavia questo calcolo non portava al risultato corretto, ma differiva da quello esatto di un fattore 2. Questo errore fu messo in risalto da Albert Einstein che nel 1915, a conclusione del suo lavoro sulla teoria della relatività generale, calcolò il valore esatto dell'angolo di deflessione della luce e della sezione d'urto nei pressi del campo gravitazionale solare.

In questo capitolo esporremo il calcolo proposto da Soldner e quello esatto sviluppato da Einstein.

### 2.1 Caso non relativistico

Consideriamo il moto di una particella di massa  $m$  in un campo gravitazionale statico ed isotropo generato da una massa  $M$ . Il campo ha simmetria sferica, pertanto ogni soluzione delle equazioni del moto deve essere invariante per rotazioni attorno a un asse arbitrario passante per l'origine del campo. Il momento angolare della particella rispetto al centro  $\mathcal{O}$  gravitazionale si conserva, quindi il moto si svolge in un piano ortogonale alla direzione del momento angolare. Esprimiamo la lagrangiana del sistema in coordinate polari

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \right) + \frac{MmG}{r}, \quad (2.1)$$

dall'equazioni di Eulero Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \quad (2.2)$$

segue che

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - \dot{\phi}^2 r) + \frac{mMG}{r^2} = 0 \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

dalla seconda equazione si vede che la variabile  $\phi$  è una *coordinata ciclica*. Quindi

$$mr^2\dot{\phi} = \text{cost},$$

ma sappiamo che

$$mr^2\dot{\phi} = l_0, \quad (2.4)$$

da cui si dà riprova del fatto che il momento angolare è una costante del moto.

Osserviamo che la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo e che l'energia cinetica è una funzione omogenea di secondo grado nelle derivate delle variabili dinamiche, per cui la funzione energia è anch'essa una costante del moto ed è proprio l'energia totale  $E$  della particella

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{mMG}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2} - \frac{mMG}{r}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Vediamo se effettivamente l'energia è una costante del moto

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m\dot{r}\ddot{r} - \frac{l_0^2}{mr^3}\dot{r} + \frac{mMG}{r^2}\dot{r} \\ &= \dot{r}\left(m\ddot{r} - \frac{l_0^2}{mr^3} + \frac{mMG}{r^2}\right) \\ &= \dot{r}\left(m\ddot{r} - mr^2\dot{\phi} + \frac{mMG}{r^2}\right) = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

per la (2.3).

Quindi possiamo scrivere dalla (2.5)

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{mMG}{r} - \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2}\right)} \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{mMG}{r} - \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2}\right)}}, \quad (2.8)$$

per la (2.4) e la (2.8)

$$d\phi = \frac{l_0}{mr^2} dt = \frac{\frac{1}{r^2} dr}{\frac{m}{l_0} \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{mMG}{r} - \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2}\right)}}, \quad (2.9)$$

integrando con la sostituzione  $u = \frac{1}{r}$ , otteniamo

$$\begin{aligned}
 \phi - \phi_0 &= - \int \frac{du}{\left(\frac{2mE}{l_0^2} + \frac{2m^2MG}{l_0^2}u - u^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= - \int \frac{du}{\left[\frac{2mE}{l_0^2} + \frac{m^4M^2G^2}{l_0^4} - \left(u - \frac{m^2MG}{l_0^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \arccos\left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{m^2MG}{l_0^2}}{\sqrt{\frac{2Em}{l_0^2} + \frac{m^4M^2G^2}{l_0^4}}}\right), \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

poichè

$$- \int \frac{dx}{\sqrt{A - x^2}} = \arccos \frac{x}{A} + \text{costante}. \tag{2.11}$$

Senza perdere di generalità possiamo ruotare il sistema di riferimento in modo che  $\phi_0 = 0$ , per cui esprimendo  $r = r(\phi)$

$$r(\phi) = \frac{\frac{l_0^2}{m^2MG}}{1 + \left(\frac{2l_0^2E}{m^3M^2G^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cos \phi}. \tag{2.12}$$

Facendo riferimento alla Figura 2.1 si vede che valore dell'angolo  $\phi$  che determina gli asintoti della traiettoria e quindi la deflessione del raggio luminoso è data dalla condizione limite per cui il raggio tende all'infinito. Questa condizione è verificata quando il denominatore della (2.12) è uguale a zero

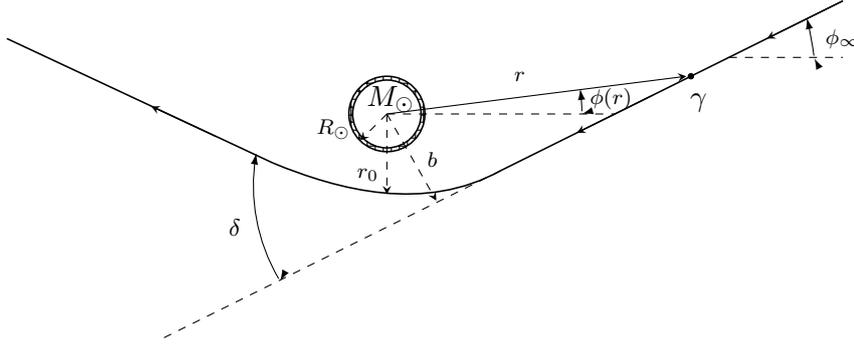
$$1 + \left(\frac{2l_0^2E}{m^3M^2G^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cos \phi = 0, \tag{2.13}$$

$$\Rightarrow \phi = \arccos\left(-\frac{1}{\left(\frac{2l_0^2E}{m^3M^2G^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{2.14}$$

A questo punto valutiamo i valori dell'energia della particella e il suo momento angolare. Queste quantità sono

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r}, \quad l_0 = mvr. \tag{2.15}$$

Precedentemente abbiamo visto che sia l'energia che il momento angolare della particella si conservano (sono indipendenti dal tempo) ma nelle relazioni (2.15) si vede che entrambe dipendono implicitamente dal tempo. Poichè la posizione della particella varia nel tempo, necessariamente dalla (2.15) si vede che la velocità della stessa deve variare



**Figura 2.1** Deflessione della luce dal sole.

affinchè l'energia e il momento siano costanti. Supponendo che la particella abbia inizialmente (all'infinito) una velocità  $v < 1$  e che nel punto più vicino al sole, quando  $r = r_0$ , la particella abbia una velocità  $v = 1$ , allora possiamo dire che

$$E = \frac{1}{2}m - \frac{mMG}{r_0}, \quad l_0 = mr_0. \quad (2.16)$$

Inserendo la (2.16) nella (2.14), otteniamo

$$\begin{aligned} \phi &= \arccos \left( -\frac{1}{\left( \frac{m^3 r_0^2 - 2m^3 MG r_0}{m^3 M^2 G^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \arccos \left( -\frac{1}{\left( \frac{r_0^2}{M^2 G^2} - \frac{2r_0}{MG} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \right) = \arccos \left( -\frac{\frac{MG}{r_0}}{1 - \frac{MG}{r_0}} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sviluppando quest'ultima quantità in serie di potenze di  $\frac{MG}{r_0}$  otteniamo

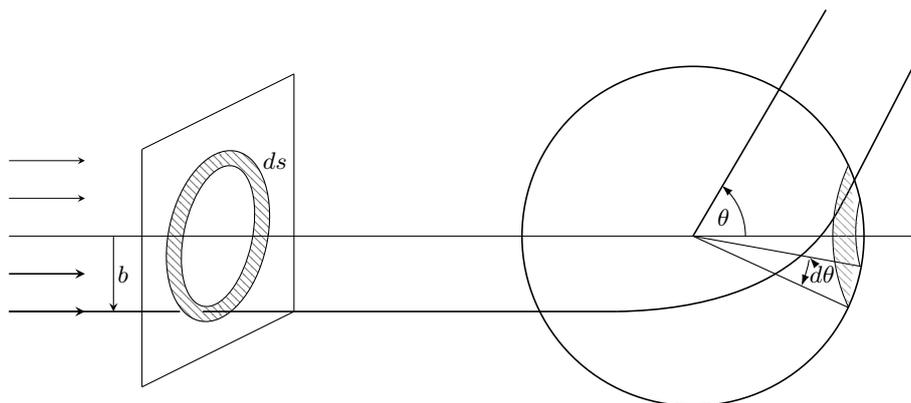
$$\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{MG}{r_0} + \frac{3}{2} \left( \frac{MG}{r_0} \right)^2 + \dots, \quad (2.18)$$

quindi la deflessione dell'orbita dalla traiettoria iniziale sarà

$$\delta_{Newtonian} = |2\phi - \pi| \simeq \frac{2MG}{r_0}. \quad (2.19)$$

Sapendo che la massa del sole è circa  $M = M_\odot = 1.97 \times 10^{33} g$ , quindi  $MG = M_\odot G = 1.475 km$ , e il minimo valore di  $r_0$  è  $R_\odot = 6.95 \times 10^5 km$ , possiamo ricavare il valore dell'angolo di deflessione che è all'incirca pari a

$$\delta_{Newtonian} \simeq \frac{2M_\odot G}{R_\odot} = 2 \times \frac{1.475}{6.95} \times 10^{-5} rad = 0.42446 \times 10^{-5} rad \simeq 0.8755''.$$



**Figura 2.2** Diffusione da potenziale centrale di un fascio incidente.

Il caso della deflessione del singolo fotone è un caso ideale. Generalmente si ha a che fare con un fascio luminoso pertanto consideriamo un fascio di particelle della stessa massa ed energia, caratterizzato da una intensità  $I$  (nota anche come *densità di flusso*) che si propaga in un campo gravitazionale di un corpo massivo. Per descrivere il processo di diffusione introduciamo il concetto di *sezione d'urto effettiva di scattering* definita come

$$d\sigma = \frac{dN}{I}, \quad (2.20)$$

con  $dN$  il numero di particelle diffuse nell'angolo solido  $d\Omega$  per unità di tempo, mentre il termine al denominatore rappresenta l'intensità del fascio incidente.

Per ogni particella le costanti del moto sono l'energia e il momento angolare che determinano l'ampiezza e l'angolo di scattering (angolo formato dalla direzione di diffusione con la direzione del fascio incidente). E' conveniente esprimere le costanti del moto in termini di velocità  $v_\infty$  incidente ed una quantità nota come *parametro d'impatto*  $b$ , definito come la distanza tra la retta direttrice della velocità incidente e il centro della forza. In questo modo otteniamo l'angolo di scattering in funzione del parametro d'impatto.

Assumiamo che per differenti valori del parametro  $b$  non si abbia lo stesso valore dell'angolo di scattering e che la funzione  $\theta(b)$  sia biunivoca, per cui solo quelle particelle con parametro d'impatto compreso tra  $b$  e  $b + db$  saranno diffuse di un angolo compreso tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  come si può notare osservando la Figura 2.2. Poichè il numero di particelle con un parametro d'impatto compreso tra  $b$  e  $b + db$  è uguale al prodotto dell'intensità del fascio incidente per l'area tra le due circonferenze di raggi  $b$  e  $b + db$ , ossia

$$dN = \pi b I db,$$

allora la sezione d'urto effettiva sarà:

$$d\sigma = \frac{2\pi I b db}{I} = 2\pi b(\theta) \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right| d\theta. \quad (2.21)$$

Generalmente  $d\sigma$  è legato all'angolo solido al posto dell'angolo piano  $d\theta$ . Sapendo che l'elemento di angolo solido compreso tra due coni di angoli verticali  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  è pari a  $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ , allora

$$d\sigma = \frac{b(\theta)}{\sin\theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right| d\Omega. \quad (2.22)$$

## 2.2 Caso relativistico

### 2.2.1 La soluzione di Schwarzschild

Consideriamo un campo gravitazionale statico e isotropo tale che sia possibile trovare un sistema di coordinate *quasi-Minkowskiano* in modo che il tempo proprio  $d\tau^2 \equiv -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  non dipenda da  $t$  ma da  $\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{x}$  solo attraverso gli invarianti rotazionali  $d\mathbf{x}^2$ ,  $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$ , e  $\mathbf{x}^2$ . L'intervallo di tempo proprio in forma standard prende la forma

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (2.23)$$

da cui segue che la metrica è diagonale. Ricordiamo che le connessioni affini sono costruite con la metrica e le derivate della metrica e il tensore di Ricci con le derivate delle connessioni e prodotti di connessioni. Andando a calcolare il tensore di Ricci, si vede che esso è diagonale e ha componenti

$$R_{tt} = -\frac{1}{2A} \left[ B'' - \frac{1}{2}B' \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{B'}{A}, \quad (2.24)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{2B} \left[ B'' - \frac{1}{2}B' \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{A'}{A}, \quad (2.25)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{R}{2A} \left( -\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A}, \quad (2.26)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}. \quad (2.27)$$

Dalla condizione che l'equazioni di Einstein nel vuoto hanno  $R_{\mu\nu} = 0$ , si otterrà per le prime due componenti del tensore di Ricci

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = \frac{1}{BA} \left[ \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad A'B + AB' = 0, \quad (2.28)$$

quindi

$$A(r)B(r) = \text{costante}.$$

Per valutare questa costante osserviamo che a distanze molto grandi ( $r \rightarrow \infty$ ) dal centro gravitazionale il tensore metrico tende alla metrica Minkowskiana; per cui

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1 \quad \Rightarrow \quad A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (2.29)$$

Utilizzando le altre due componenti del tensore di Ricci, si vede che

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)r + B(r) = \frac{d}{dr}(rB(r)) - 1 = 0, \quad (2.30)$$

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = \frac{R'_{\theta\theta}(r)}{2rB(r)}, \quad (2.31)$$

dalla (2.30) segue che

$$rB(r) = r + \text{costante}. \quad (2.32)$$

Per fissare la costante d'integrazione notiamo che, a grandi distanze dal centro gravitazionale, la componente  $g_{tt} \equiv -B$  deve tendere a  $-1 - 2\phi$ , dove  $\phi$  è il potenziale Newtoniano  $-MG/r$ . Quindi la costante d'integrazione è  $-2MG$ , e la soluzione finale è

$$B(r) = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right], \quad (2.33)$$

$$A(r) = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]^{-1}. \quad (2.34)$$

La metrica completa è data da

$$d\tau^2 = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right] dt^2 - \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.35)$$

La (2.35), scoperta da Schwarzschild nel 1916, è la soluzione esatta dell'equazione di Einstein per il caso di un campo gravitazionale statico ed isotropo generato da una massa  $M$ .

Dalla (2.35) si osserva che la metrica di Schwarzschild possiede una singolarità polare nei punti  $r = 2MG$ . Il raggio associato a questa singolarità prende il nome di *raggio di Schwarzschild* della massa  $M$ . Questo concetto è strettamente connesso all'esistenza di una regione dello spazio-tempo con un campo gravitazionale così elevato da non lasciar sfuggire nulla al suo interno verso l'esterno. Questa regione è detta *buco nero*. Si può definire il buco nero come un corpo massivo le cui dimensioni siano inferiori rispetto al suo raggio di Schwarzschild. La superficie limite associata al raggio di Schwarzschild definisce il cosiddetto *orizzonte degli eventi*. Questa denominazione deriva dal fatto che tutto ciò che avviene ad una distanza inferiore al raggio di Schwarzschild non è visibile ad un osservatore esterno in quanto nè la materia nè le onde elettromagnetiche (come la luce) riescono a sfuggire al campo gravitazionale generato dal buco nero.

Nello studio della deflessione della luce da parte del Sole, risulta chiara quindi l'importanza del raggio  $R_S$  di Schwarzschild associato: infatti se il parametro d'impatto è molto grande rispetto a tale raggio allora la deflessione sarà minima e quindi sarà lecito considerare il limite di campo gravitazionale debole; viceversa, se il parametro d'impatto è prossimo al raggio di Schwarzschild allora la curvatura dello spazio-tempo sarà determinante e l'equazioni del moto assumeranno una forma molto più complessa. Nel nostro caso osserviamo che il raggio del Sole ( $R_\odot \simeq 6,96 \times 10^5 \text{ km}$ ) è  $10^5$  volte più grande del suo raggio di Schwarzschild ( $R_S(M_\odot) \simeq 2,95 \text{ km}$ ) e dal momento che il minimo valore del parametro d'impatto potrà essere prossimo al raggio solare, allora sarà lecito considerare l'approssimazione di campo debole.

### 2.2.2 Geodetiche di Schwarzschild

Consideriamo un fotone che si muove liberamente in un campo gravitazionale. L'azione che descrive la propagazione libera di una particella che si muove da  $A$  a  $B$  è data da

$$S = \int_A^B d\tau = \int_A^B \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu}. \quad (2.36)$$

Per il principio di Hamilton devo ottenere un'azione stazionaria per una generica variazione dei campi coinvolti, con la condizione che la variazione sia nulla agli estremi:  $\delta x^\mu|_a^b = 0$ . La variazione dell'azione sarà data da

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_A^B \frac{1}{2d\tau} \left[ -\partial_\lambda g_{\mu\nu} \delta x^\lambda dx^\mu dx^\nu - 2g_{\mu\nu} d\delta x^\mu dx^\nu \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_A^B \left( \partial_\lambda g_{\mu\nu} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau + 2g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_A^B \left( \partial_\lambda g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau - 2\partial_\sigma g_{\lambda\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau - 2g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right) \delta x^\lambda d\tau. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dalla definizione di connessione affine si ha

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda} = 2g_{k\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^k \Rightarrow \partial_\lambda g_{\mu\nu} - 2\partial_\mu g_{\lambda\nu} = -2g_{\lambda\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\nu, \quad (2.38)$$

e sostituendo nella (2.37) si ottiene

$$\delta S = - \int_A^B \left( \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right) g_{\lambda\nu} \delta x^\lambda d\tau = 0. \quad (2.39)$$

Pertanto l'equazione del moto sarà

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (2.40)$$

Geometricamente la (2.40) rappresenta il moto della particella nello spazio-tempo lungo la curva più corta possibile. Tale curva è chiamata geodetica.

Consideriamo ora il moto di un fotone in un campo gravitazionale statico e isotropo. Sappiamo che per questo problema la metrica del campo è data dalla soluzione di Schwarzschild (2.35). La lagrangiana del fotone sarà

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \\ &= \frac{1}{2} \left[ - \left( 1 - \frac{2MG}{r} \right) \dot{t}^2 + \left( 1 - \frac{2MG}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Si vede che sia  $t$  che  $\phi$  sono coordinate cicliche, così i loro momenti coniugati saranno costanti del sistema

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = - \left( 1 - \frac{2MG}{r} \right) \dot{t}, \quad (2.42)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}. \quad (2.43)$$

Queste costanti del moto possono essere interpretate fisicamente:  $p_\phi$  è il momento angolare dell'orbita della particella e  $-p_t$  è l'energia della particella come la misura di un osservatore all'infinito.

L'equazione del moto per la variabile  $\theta$  è

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \\
 &= \frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \\
 &= \frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) + \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta}.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Moltiplicando per  $r^2 \dot{\theta}$ , otteniamo

$$0 = \frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta})^2 + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{p_\phi}{\sin \theta} \right)^2, \tag{2.45}$$

e integrando

$$(r^2 \dot{\theta})^2 = -p_\phi^2 \cot^2 \theta, \tag{2.46}$$

si vede che il primo membro è sempre positivo mentre il secondo membro è sempre negativo, quindi devono essere entrambi nulli. Ciò implica che  $\theta = \text{cost}$  ossia che l'orbita è planare. Assumiamo per comodità di trovarci nel piano equatoriale ( $\theta = \pi/2$ ).

Osserviamo a questo punto che il fotone, viaggiando alla velocità della luce, ha tempo proprio nullo

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0,$$

quest'ultima è l'identità per le quadrivelocità. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
 0 &= -g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \\
 &= \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \\
 &= \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} p_t^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin \theta},
 \end{aligned}$$

sostituendo a  $\theta = \pi/2$

$$0 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} p_t^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{p_\phi^2}{r^2}. \tag{2.47}$$

Riordinando i termini

$$p_t^2 - \dot{r}^2 - \frac{p_\phi^2}{r^2} \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) = 0 \tag{2.48}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) = \frac{E^2}{2}, \tag{2.49}$$

con

$$V(r) = \frac{p_\phi^2}{2r^2} \left( 1 - \frac{2MG}{r} \right), \quad E = p_t, \quad p_\phi = r^2 \dot{\phi}. \quad (2.50)$$

Combinando la (2.50) con la (2.49) si ottiene il valore dell'angolo di deflessione

$$\delta_{Rel} = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{p_\phi}{r^2 \sqrt{E^2 - 2V(r)}} dr - \pi. \quad (2.51)$$

Possiamo ricavare il valore dell'energia  $E$  nel punto dell'orbita più vicino alla sorgente, quando  $r = r_0$ . Dalla (2.49) infatti si ottiene

$$E^2 = 2V(r_0) = \frac{p_\phi^2}{2r_0^2} \left( 1 - \frac{2MG}{r_0} \right), \quad (2.52)$$

quindi sostituendo questo risultato nell'integrale, otteniamo

$$\begin{aligned} \delta_{Rel} &= 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{p_\phi dr}{r^2 \sqrt{\frac{p_\phi^2}{r_0^2} \left( 1 - \frac{2MG}{r_0} \right) - \frac{p_\phi^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2MG}{r} \right)}} - \pi \\ &= 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\frac{r_0}{r^2} dr}{r_0 \sqrt{\frac{1}{r_0^2} \left( 1 - \frac{2MG}{r_0} \right) - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2MG}{r} \right)}} - \pi \\ &= 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\frac{r_0}{r^2} dr}{\sqrt{\left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{2MG}{r_0} \left( 1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right)}} - \pi, \end{aligned} \quad (2.53)$$

effettuando la sostituzione  $x = r_0/r$  e ponendo  $\alpha = 2GM/r_0$

$$\delta_{Rel} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) - \alpha(1-x^3)}} - \pi. \quad (2.54)$$

Sviluppando l'espressione (2.54) per  $\alpha = 2GM/r_0 \ll 1$

$$\begin{aligned} \delta_{Rel} &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) - \alpha(1-x^3)}} - \pi \\ &= 2 \int_0^1 dx \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\alpha}{2} \frac{x^3-1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{8} \alpha^2 \frac{(x^3-1)^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} \alpha^3 \frac{(x^3-1)^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} + \dots \right) - \pi \\ &= 2 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} (-2) + \frac{3}{8} \alpha^3 \left( \frac{5}{3} \pi - \frac{4}{3} \right) \right] - \pi \simeq 2\alpha = \frac{4GM}{r_0}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

quindi, sapendo che  $MG = M_{\odot}G = 1.478 \text{ km}$  e che il minimo valore di  $r_0$  è  $R_{\odot} = 6.95 \times 10^5$ , allora

$$\delta_{Rel} = \frac{4GM_{\odot}}{R_{\odot}} = 8.489 \times 10^6 \text{ rad} = 1.75'' . \quad (2.56)$$

Qualsiasi risultato proveniente dalla relatività generale porta con sé un problema fondamentale che riguarda la scelta dei sistemi di riferimento, cioè se il risultato ottenuto si riferisca realmente ad una misura fisica oggettiva oppure dipenda dalla nostra scelta del sistema di coordinate. Ci chiediamo quindi se l'angolo di deflessione  $\delta$  abbia realmente a che fare con le posizioni dell'immagini stellari su una lastra fotografica. La risposta è semplice in quanto abbiamo a che fare con un'esperimento di diffusione: il raggio luminoso, proveniente da una distanza molto grande, viene deflesso in prossimità del sole; successivamente viene rilevato sulla terra ad una distanza dal sole di 200 volte il raggio solare. Nei punti di origine del fascio e rilevazione, la metrica è sostanzialmente Minkowskiana, e a queste distanze non ci si pone la domanda sul significato di  $\delta$ ; infatti esso è l'angolo azimutale in un sistema di coordinate nel quale i raggi luminosi definiscono linee che sono essenzialmente rette. Possiamo legare lo shift delle immagini stellari su lastre fotografiche con le solite regole dell'ottica geometrica.

Un'altra difficoltà concettuale riguarda il comportamento del fotone come quanto di luce che si muove come una particella con velocità  $c$ . In realtà non è necessario l'utilizzo della meccanica quantistica in quanto la lunghezza d'onda della luce è così piccola, confrontata con la scala del campo gravitazionale solare ( $10^{-5} \text{ cm}$  confrontata con  $10^{10} \text{ cm}$ ), che in ogni punto di questo campo possiamo considerare un sistema di coordinate localmente inerziale che copre un enorme numero di lunghezze d'onda (circa  $10^{15}$ ). Il Principio di Equivalenza ci dice che, in tale sistema di coordinate, la luce si comporta come se fosse in uno spazio gravitazionale vuoto e, dal momento che la lunghezza d'onda è così piccola, allora la diffrazione è trascurabile ed ogni elemento del fronte d'onda si muove in linea retta ad una velocità unitaria.

L'angolo di deflessione  $\delta$  è misurato confrontando le posizioni apparenti delle stelle che sono prossime al disco solare, valutate durante un'eclisse, con le loro posizioni di notte sei mesi prima, quando queste stelle si trovano dalla parte opposta della terra e la loro luce non passa vicino al sole. Sottraendo a  $\theta$  (eclissi),  $\theta$  (sei mesi prima) si dovrebbe ottenere la deflessione  $\delta$ . Tuttavia c'è un'inevitabile variazione nella scala fotografiche su un intervallo di sei mesi dovuta parzialmente alla piccola variazione nella temperatura e alla configurazione meccanica del telescopio e della camera su una scala temporale molto grande. Una variazione nella scala della fotografia darebbe luogo ad un'apparente deflessione proporzionale alla distanza  $r_0$  dal sole. Ciò che si fa praticamente è confrontare le osservazioni con una curva teorica contenente una costante di scala derivante da questo fenomeno.

La difficoltà di questo metodo deriva dalla scarsa accuratezza nella misura dell'angolo nel breve tempo disponibile durante l'eclissi.

Una prima misura sperimentale fu effettuata nel 1919: un gruppo di astronomi si recò in due isole, Sobral (Brasile) e Principe (Golfo di Guinea), per studiare l'eclissi totale che si verificò in quell'anno. Furono esaminate dozzine di stelle e i risultati sperimentali portarono a valori dell'angolo di deflessione pari a  $(1.98 \pm 0.12)''$  e  $(1.61 \pm 0.31)''$ , in accordo

con la predizione teorica di Einstein. Questo risultato pose la relatività generale al centro del dibattito scientifico dell'epoca.

Dal 1919 ad oggi sono state effettuate diverse misurazioni e la più recente di queste da luogo a un angolo di deflessione pari a  $(1.70 \pm 0.10)''$ , in ottimo accordo con la predizione di Einstein.

Il problema riguardante l'accuratezza della misura può essere risolto utilizzando le tecniche fotoelettriche per monitorare le posizioni delle stelle senza dover attendere un'eclissi. Lo sviluppo nella radio astronomia ha reso possibile misurare la deflessione dei radiosegnali dal sole con un'accuratezza potenzialmente più grande rispetto a quella in ottica astronomica. Una complicazione derivante da questo metodo è la rifrazione dei raggi nella corona solare.

## Capitolo 3

# Calcolo della sezione d'urto quantistica

In questo capitolo calcoleremo la sezione d'urto differenziale per un campo a massa nulla e spin unitario che viene diffuso da un campo gravitazionale debole associato ad una sorgente puntiforme.

### 3.1 Campo elettromagnetico in presenza di un campo gravitazionale debole

In generale la dinamica di un sistema fisico è descritta dall'azione  $S$  ottenuta dalla densità Lagrangiana  $\mathcal{L}$ . L'azione del campo elettromagnetico in uno spazio-tempo piatto è espressa come

$$S_{piatto} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x). \quad (3.1)$$

Minimizzando questa azione otterremo l'equazioni di Maxwell nello spazio-tempo piatto. Estendendo il problema ad uno spazio-tempo curvo, caratterizzato da un tensore metrico  $g_{\mu\nu}(x)$ , l'azione del sistema diventerà

$$S_{curvo} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g(x)} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x), \quad (3.2)$$

con  $g(x) = \det[g_{\mu\nu}(x)]$ . Assumendo che il campo gravitazionale sia debole, possiamo sviluppare la metrica nel limite di spazio-tempo piatto

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x), \quad (3.3)$$

dove la costante  $\kappa$  è necessaria per avere un tensore metrico adimensionale, infatti il campo  $h_{\mu\nu}$ , come ogni campo quantistico, ha le dimensioni di una massa. Da ciò segue che la costante  $\kappa$  avrà le dimensioni dell'inverso di una massa. Sviluppiamo l'azione del campo

elettromagnetico nel limite di campo debole

$$\begin{aligned}
 S_{curvo} &= S \Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} + \frac{\partial S}{\partial g_{\mu\nu}} \Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} \kappa h_{\mu\nu} + \dots \\
 &= -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu}(x) T^{\mu\nu}(x) + \dots,
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

in quanto

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial g_{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g(x)} \left\{ F_{\lambda}^{\mu}(x) F^{\lambda\nu}(x) - \frac{1}{4} g^{\mu\nu}(x) F_{\lambda\kappa}(x) F^{\lambda\kappa}(x) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} T_{curvo}^{\mu\nu}(x),
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial g_{\mu\nu}} \Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ F_{\lambda}^{\mu}(x) F^{\lambda\nu}(x) - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu}(x) F_{\lambda\kappa}(x) F^{\lambda\kappa}(x) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} T_{piatto}^{\mu\nu}(x),
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

quindi possiamo dire che all'ordine più basso

$$S_{curvo} = S_{piatto} + S_{int}, \tag{3.7}$$

con  $\mathcal{L}_{int} = \frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$  che rappresenta l'interazione del campo elettromagnetico, corrispondente a fotoni con spin 1 e a massa nulla, con il campo gravitazionale. L'effetto di questa interazione è lo scattering del campo. Quindi il moto di campi in uno spazio-tempo, che è una perturbazione dello spazio-tempo piatto, può essere interpretato come un'interazione gravitazionale che coinvolge il tensore energia-impulso dei campi.

## 3.2 Sorgente esterna

Ricaviamo ora la metrica del campo gravitazionale generato da una sorgente puntiforme di massa  $M$  nel limite di campo debole.

Partiamo dall'equazioni di Einstein linearizzate

$$\square h_{\mu\nu}(x) = \sqrt{16\pi G} S_{\mu\nu}(x) = \kappa S_{\mu\nu}(x), \tag{3.8}$$

dove  $S_{\mu\nu}(x) = -T_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda}(x)$  dipende dal tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}(x)$  della sorgente. La soluzione di questa equazione è la (1.43)

$$h_{\mu\nu}(x) = \frac{\kappa}{4\pi} \int d^4x' \frac{S_{\mu\nu}(x') \delta(x_0 - x'_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \tag{3.9}$$

Per una sorgente puntiforme di massa  $M$  posta nell'origine, il tensore energia-impulso sarà dato da

$$T^{\mu\nu}(x) = M \delta^3(\mathbf{x}) \frac{p^{\mu} p^{\nu}}{p^0}, \tag{3.10}$$

supponendo che la sorgente sia statica si ottiene

$$T_{\mu\nu}(x) = M\delta_\mu^0\delta_\nu^0\delta^3(\mathbf{x}), \quad (3.11)$$

quindi inserendo queste informazioni nella (3.9) si trova

$$S_{\mu\nu}(x) = -T_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^\lambda_\lambda = M\delta^3(\mathbf{x}) \left( \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} - \delta_\mu^0\delta_\nu^0 \right), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(x) &= \frac{\kappa}{4\pi} \int d^4x' \frac{M\delta^3(\mathbf{x}') \left( \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} - \delta_\mu^0\delta_\nu^0 \right) \delta(x_0 - x'_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3x' \frac{M\delta^3(\mathbf{x}') \left( \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} - \delta_\mu^0\delta_\nu^0 \right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int dx'_0 \delta(x_0 - x'_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \\ &= \frac{\kappa}{8\pi} \frac{M \left( \eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0\delta_\nu^0 \right)}{|\mathbf{x}|} = \frac{2MG}{\kappa |\mathbf{x}|} \left( \eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0\delta_\nu^0 \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

quindi la metrica del campo sarà

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} \left( 1 + \frac{2MG}{|\mathbf{x}|} \right) - \frac{4MG}{|\mathbf{x}|} \delta_\mu^0\delta_\nu^0. \quad (3.14)$$

La trasformata di Fourier della (3.13) nello spazio dei momenti   definita da

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(q_0, \mathbf{q}) &= \int d^4x e^{iq \cdot x} h_{\mu\nu}(x) \\ &= \int d^4x e^{iq \cdot x} \frac{\kappa}{8\pi} \frac{M \left( \eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0\delta_\nu^0 \right)}{|\mathbf{x}|} \\ &= \frac{\kappa}{8\pi} M \left( \eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0\delta_\nu^0 \right) \int dx_0 e^{iq_0 x_0} \int d^3x \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} \\ &= \frac{\kappa}{8\pi} M \left( \eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0\delta_\nu^0 \right) 2\pi \delta(q_0) \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2} \\ &= 2\pi \delta(q_0) \frac{M\kappa}{2q^2} \left( \eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0\delta_\nu^0 \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.3 Richiami sulla matrice di diffusione

Nella rappresentazione di Schrödinger l'evoluzione temporale di un vettore di stato  $\Phi^{(S)}(t)$ , secondo l'assioma di Von Neuman,   data dall'equazione di Schrödinger

$$i \frac{\partial \Phi^{(S)}}{\partial t} = H^{(S)} \Phi^{(S)}(t), \quad (3.16)$$

dove l'indice (S) sta per Schrödinger. Possiamo dividere l'hamiltoniana in due parti

$$H^{(S)} = H_0^{(S)} + H_I^{(S)}, \quad (3.17)$$

dove  $H_0^{(S)}$  è l'Hamiltoniana in assenza di perturbazione, e  $H_I^{(S)}$  rappresenta l'Hamiltoniana di interazione. Consideriamo la trasformazione

$$\Phi(t) = e^{iH_0^{(S)}t}\Phi^{(S)}, \quad (3.18)$$

$$O(t) = e^{iH_0^{(S)}t}O^{(S)}e^{-iH_0^{(S)}t}, \quad (3.19)$$

dove  $O^{(S)}$  è un operatore nella rappresentazione di Schrödinger. Questa trasformazione può essere intesa come un cambiamento di rappresentazione da quella di Schrödinger a quella nota come rappresentazione d'interazione. I simboli  $\Phi$  e  $O$  senza indici rappresentano il vettore di stato e l'operatore nella rappresentazione d'interazione. L'evoluzione temporale di  $\Phi(t)$  è data da

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= i\left[ iH_0^{(S)}e^{iH_0^{(S)}t}\Phi^{(S)} + e^{iH_0^{(S)}t}\frac{\partial\Phi^{(S)}}{\partial t} \right] \\ &= -H_0^{(S)}e^{iH_0^{(S)}t}\Phi^{(S)} + e^{iH_0^{(S)}t}\left( H_0^{(S)} + H_I^{(S)} \right)e^{-iH_0^{(S)}t}e^{iH_0^{(S)}t}\Phi^{(S)} \\ &= H_I\Phi, \end{aligned} \quad (3.20)$$

dove  $H_I$  è l'Hamiltoniana d'interazione nella rappresentazione d'interazione. Per ottenere una soluzione formale dell'equazione differenziale (3.20) definiamo un operatore  $U(t, t_0)$

$$\Phi(t) = U(t, t_0)\Phi(t_0), \quad (3.21)$$

dove  $\Phi(t_0)$  è il vettore di stato che caratterizza il sistema ad un tempo  $t_0$ . Quindi l'equazione (3.20) è equivalente a

$$i\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H_I(t)U(t, t_0), \quad (3.22)$$

con la condizione che

$$U(t_0, t_0) = 1. \quad (3.23)$$

L'equazione differenziale (3.22) con la condizione al contorno (3.23) avrà come soluzione

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')U(t', t_0), \quad (3.24)$$

risolviamo l'integrale con un metodo ricorsivo per il quale

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \left[ 1 - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2)U(t_2, t_0) \right] \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) + \dots \\ &\quad + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1)H_I(t_2) \dots H_I(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

L'operatore  $U$  ha un importante significato fisico: supponendo di conoscere lo stato  $|\Phi_i\rangle$  del sistema al tempo iniziale  $t_0$ , allora la probabilità di trovare il sistema nello stato  $|\Phi_f\rangle$  ad un tempo  $t$  è dato da

$$|\langle\Phi_f|U(t, t_0)|\Phi_i\rangle|^2 = |U_{fi}(t, t_0)|^2. \quad (3.26)$$

La probabilità di transizione  $i \rightarrow f$  media per unità di tempo è

$$w = \frac{1}{t - t_0} |U_{fi}(t, t_0) - \delta_{fi}|^2. \quad (3.27)$$

Nella relazione compare una delta dovuta al fatto che nella (3.25) compare 1 anche in assenza di d'interazione. Questo rapporto dipende dal tempo in un modo molto particolare quando l'intervallo di tempo  $t - t_0$  è piccolo, mentre tende ad un limite finito quando  $t_0 \rightarrow -\infty$  e  $t \rightarrow \infty$ . In questo limite definiamo la matrice  $S$  come

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} U(t, t_0). \quad (3.28)$$

Alla luce di ciò, l'equazione (3.25) può essere espressa in termini di matrice  $S$  come

$$\begin{aligned} S &= S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots \\ &= 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots \\ &\quad + (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

Il significato fisico della matrice  $S$  è analogo a quello della matrice  $U$ ; infatti, se assumiamo che il sistema si trovi nello stato  $i$  a  $t = -\infty$ , allora la probabilità di trovare il sistema in un particolare stato finale  $f$  a  $t = \infty$  è data da

$$|\langle\Phi_f|S|\Phi_i\rangle|^2 = |S_{fi}|^2. \quad (3.30)$$

### 3.4 Calcolo della sezione d'urto al primo ordine

Per valutare l'ampiezza di transizione dallo stato  $i$  ad un particolare stato  $f$ , dobbiamo considerare  $S_{fi} - \delta_{fi}$ , dal momento che il primo termine  $S^{(0)} = 1$  rappresenta l'ampiezza per una situazione fisica in cui non vi è interazione. Dal momento che, all'ordine più basso non nullo,  $S_{fi} - \delta_{fi} = S^{(1)}$ , consideriamo

$$S_{fi}^{(1)} = -i \left\langle \Phi_f \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right| \Phi_i \right\rangle, \quad (3.31)$$

e dal momento che

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu}(x) T^{\mu\nu}(x) \quad \Rightarrow \quad H_{int} = - \int d^3x \mathcal{L}_{int}, \quad (3.32)$$

bisogna calcolare

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= \frac{i\kappa}{2} \int_V d^4x \langle \Phi_f | h_{\mu\nu}(x) T^{\mu\nu}(x) | \Phi_i \rangle \\ &= \frac{i\kappa}{2} \int_V d^4x h_{\mu\nu}(x) \langle \Phi_f | T^{\mu\nu}(x) | \Phi_i \rangle, \end{aligned} \quad (3.33)$$

in quanto stiamo assumendo che il campo gravitazionale sia un campo esterno.

Assumiamo che il fotone incidente abbia un quadrimomento  $p$  e dopo aver interagito con il campo abbia un quadrimomento  $p'$ . Per cui bisogna valutare la quantità

$$\langle p' | T^{\mu\nu}(x) | p \rangle. \quad (3.34)$$

Nello spazio dei momenti la (3.34) prende la forma

$$\begin{aligned} \langle p' | T^{\mu\nu}(x) | p \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} V}} \epsilon_\beta^*(p', \lambda') e^{-ip'x} V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, p') \epsilon_\alpha(p, \lambda) e^{ipx} \\ &= \frac{1}{2V \sqrt{E_p E_{p'}}} \epsilon_\beta^*(p', \lambda') V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, p') \epsilon_\alpha(p, \lambda) e^{iqx}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

dove  $V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, p')$  indica il vertice d'interazione gravitone/fotone/fotone nello spazio dei momenti calcolato in appendice A,  $\epsilon_\alpha(p)$  e  $\epsilon_\beta(p')$  sono rispettivamente i vettori di polarizzazione iniziale e finale del fotone e  $q = p - p'$  è il quadrimomento trasferito. Allora la (3.33) sarà

$$\begin{aligned} iS_{fi}^{(1)} &= -\frac{\kappa}{2} \int_V d^4x h_{\mu\nu}(x) \langle p', \lambda' | T^{\mu\nu}(x) | p, \lambda \rangle \\ &= -\frac{\kappa}{4V \sqrt{E_p E_{p'}}} \int_V d^4x h_{\mu\nu}(x) \epsilon_\beta^*(p', \lambda') V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, p') \epsilon_\alpha(p, \lambda) e^{iqx} \\ &= -\frac{\kappa}{4V \sqrt{E_p E_{p'}}} h_{\mu\nu}(q) \epsilon_\alpha^*(p', \lambda') V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, p') \epsilon_\beta(p, \lambda), \end{aligned} \quad (3.36)$$

e per la (3.15) possiamo scrivere

$$iS_{fi}^{(1)} = -\frac{\kappa}{4V \sqrt{E_p E_{p'}}} \frac{M\kappa}{2q^2} (\eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0) 2\pi \delta(q_0) \epsilon_\beta^*(p', \lambda') V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, p') \epsilon_\alpha(p, \lambda). \quad (3.37)$$

Quindi l'ampiezza di transizione mediata sugli stati di polarizzazione del fotone sarà data da

$$\begin{aligned} \langle |iS_{fi}^{(1)}|^2 \rangle &= \frac{\kappa^2}{16V^2 E_p E_{p'}} \sum_{\lambda\lambda'} h_{\mu\nu}(q) \epsilon_\beta^*(p', \lambda') V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, p') \epsilon_\alpha(p, \lambda) \times \\ &\quad \times h_{\rho\sigma}^*(q) \epsilon_\kappa(p', \lambda') V^{\rho\sigma\epsilon\kappa}(p, p') \epsilon_\epsilon^*(p, \lambda). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Notiamo che in questa espressione compare il quadrato della funzione  $\delta(q_0)$  che esprime per l'appunto la conservazione dell'energia. Questo aspetto è fondamentale ai fini del calcolo in

quanto possiamo così affermare che  $p'_0 = p_0 = E$ . Utilizzando la relazione di completezza sui vettori di polarizzazione

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda} \epsilon_{\alpha}(p, \lambda) \epsilon_{\epsilon}^*(p, \lambda) = -\eta_{\alpha\epsilon}, \quad (3.39)$$

ed applicando le regole dell'algebra tensoriale (per il calcolo esplicito si veda l'appendice B), otteniamo

$$\langle |iS_{fi}^{(1)}|^2 \rangle = \frac{\kappa^2}{16V^2 E_p E_{p'}} \left( \frac{M\kappa}{2q^2} \right)^2 2\pi\delta(q_0) \mathcal{T} \times 16E^4 \cos^4 \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.40)$$

dove  $\mathcal{T}$  è il tempo di transizione. Questo termine deriva dal fatto che

$$(2\pi\delta(q_0))^2 = 2\pi\delta(q_0) \int_{T_i}^{T_f} dt e^{iq_0 t} = 2\pi\delta(q_0)(T_f - T_i). \quad (3.41)$$

La probabilità media di transizione è data da  $\omega = \langle |iS_{fi}^{(1)}|^2 \rangle / \mathcal{T}$ , per cui sarà indipendente dal tempo di transizione. Per valutare la sezione d'urto differenziale bisogna moltiplicare  $\omega$  per il fattore dato dallo spazio delle fasi e dividere poi per la densità di flusso incidente, che è proprio  $|\mathbf{p}|/EV$ . Quindi

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\langle |iS_{fi}^{(1)}|^2 \rangle}{\mathcal{T}} \left( \frac{V d^3 p'}{8\pi^3} \right) \left( \frac{E_p V}{|\mathbf{p}|} \right) \\ &= \frac{\langle |iS_{fi}^{(1)}|^2 \rangle}{\mathcal{T}} \left( \frac{V^2 E_p E_{p'}}{8\pi^3} \right) d\Omega, \end{aligned} \quad (3.42)$$

dal momento che

$$d^3 p' \delta(q_0) = \frac{p'^2}{(\partial E / \partial |\mathbf{p}'|)} d\Omega = |\mathbf{p}'| E_{p'} d\Omega = |\mathbf{p}| E_{p'} d\Omega, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{q}^2 = 4\mathbf{p}^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right), \quad (3.44)$$

per cui si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\kappa^4 M^2}{16} \frac{1}{q^4 \pi^2} E^4 \cos^4 \left( \frac{\theta}{2} \right) \\ &= (GM)^2 \cot^4 \left( \frac{\theta}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

Per valutare l'angolo di deflessione del fotone faremo un'analisi semiclassica in cui metteremo in relazione il parametro d'impatto con la sezione d'urto differenziale. Assumendo

che la particella viaggi lungo la direzione  $z$  verso una sorgente localizzata nell'origine e indicando l'angolo azimutale con  $\theta$ , avremo la relazione (2.22) riscritta come

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (3.46)$$

Questo approccio semiclassico ci permette di legare l'interazione quantistica tra la particella e la sorgente con quantità definite classicamente come il parametro d'impatto. Utilizzando la (3.45) e (3.46) otteniamo

$$\left| \frac{db^2}{d\theta} \right| = 2(GM)^2 \cot^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta, \quad (3.47)$$

che, integrata, dà come risultato

$$b^2(\theta) = 2(MG)^2 \left( \cos\theta + 2 \csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 8 \log \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right), \quad (3.48)$$

che nel limite di piccoli valori dell'angolo di deflessione  $\theta$

$$b \approx GM \left( \frac{4}{\theta} + \theta \left( \frac{5}{12} + 2 \log \frac{\theta}{2} \right) \right), \quad (3.49)$$

per cui

$$\theta \approx \frac{4MG}{b}, \quad (3.50)$$

in accordo con il risultato della relatività generale.

In questo capitolo abbiamo visto come il risultato "classico" della teoria di Einstein venga ritrovato a livello quantistico. Questo fatto sembrerebbe sorprendente ma, in realtà abbiamo lavorato all'ordine più basso nella perturbazione gravitazionale, al cosiddetto *tree-level* che tipicamente riproduce il risultato classico. L'interferenza con contributi di ordine più alti darebbe luogo a stati intermedi virtuali necessari all'osservazione di effetti puramente quantistici.

## Capitolo 4

# Lenti gravitazionali e materia oscura

Nei capitoli precedenti si è studiato la deflessione della luce per effetto di sorgenti gravitazionali massive. Questo fenomeno è anche noto come lente gravitazionale, in quanto la modifica della curvatura dello spazio-tempo genera un effetto simile a quello di una lente ottica che può deformare, sdoppiare o moltiplicare l'immagine della sorgente.

In questo capitolo verranno analizzate le applicazioni delle lenti gravitazionali.

### 4.1 Teoria delle lenti gravitazionali

Un metodo alternativo per valutare la deflessione della luce in presenza di gravità utilizza il principio di Fermat, il quale nella sua forma più semplice afferma che il cammino di un'onda luminosa con una data frequenza è tale da rendere minimo il tempo di percorrenza.

Si consideri la velocità della luce in un mezzo data dal rapporto  $c/n$ , con indice di rifrazione  $n$ . Per il principio di Fermat, il tempo di percorrenza dovrà essere minimo

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{x}(l)) dl = 0. \quad (4.1)$$

Supponiamo che la lente sia molto piccola rispetto alle dimensioni totali del sistema ottico composto da sorgente, lente e osservatore. Si assume inoltre che la lente sia debole, ossia che abbia un potenziale gravitazionale Newtoniano  $\phi$  tale per cui  $|\phi| \ll 1$ . Questa approssimazione è potenzialmente valida in tutti i casi di interesse astrofisico. Abbiamo visto che nel caso di campo debole la metrica diviene

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-2\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\phi) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

per cui l'elemento di linea dello spazio-tempo sarà

$$ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (1+2\phi) dt^2 - (1-2\phi)(d\mathbf{x})^2. \quad (4.3)$$

È noto che il cammino di un raggio luminoso è tale da verificare la condizione  $ds^2 = 0$ , per cui la velocità della luce in presenza di campo gravitazionale sarà

$$c' = \frac{|d\mathbf{x}|}{dt} = \sqrt{\frac{1+2\phi}{1-2\phi}} \approx (1+2\phi), \quad (4.4)$$

e quindi l'indice di rifrazione è

$$n = \frac{c}{c'} = \frac{1}{1+2\phi} \approx 1-2\phi. \quad (4.5)$$

Così dalla (4.1) si ottiene

$$\delta \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda n[\mathbf{x}(\lambda)] \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} \right| = 0, \quad (4.6)$$

dal momento che

$$dl = \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} \right| d\lambda.$$

La (4.6) dà luogo alle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad (4.7)$$

per la lagrangiana

$$\mathcal{L} = n[\mathbf{x}(\lambda)] \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} \right|.$$

Pertanto si ottiene

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = |\dot{\mathbf{x}}| \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} = (\nabla n)|\dot{\mathbf{x}}|, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = n \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|}, \quad (4.8)$$

con  $\dot{\mathbf{x}}$  vettore tangente al cammino luminoso. Supponendo di normalizzare il vettore tangente  $|\dot{\mathbf{x}}| = 1$  e scrivendo  $\mathbf{e} \equiv \dot{\mathbf{x}}$ , si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} (n\mathbf{e}) - \nabla n = 0 \\ \Rightarrow & n\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e}(\nabla n \cdot \mathbf{e}) = \nabla n \\ \Rightarrow & \dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{n} (\nabla n - \mathbf{e}(\nabla n \cdot \mathbf{e})) = \frac{1}{n} \nabla_{\perp} n, \end{aligned} \quad (4.9)$$

dove  $\nabla_{\perp}$  è il gradiente perpendicolare al percorso della luce. Dal momento che  $n = 1 - 2\phi$ , la (4.9) diviene

$$\dot{\mathbf{e}} = \nabla_{\perp} \ln(1 - 2\phi) \approx -2\nabla_{\perp} \phi. \quad (4.10)$$

L'equazione (4.10) è molto utile per calcolare l'angolo di deflessione. Infatti se indichiamo con  $\mathbf{e}_A$  e  $\mathbf{e}_B$  i versori tangenti al raggio ottico nel punto iniziale A e nel punto finale B, allora l'angolo di deflessione è rappresentato dal vettore  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{e}_A - \mathbf{e}_B$ . Pertanto integrando -è lungo il cammino luminoso si ottiene

$$\boldsymbol{\alpha} = 2 \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \nabla_{\perp} \phi. \quad (4.11)$$

Questa formula è poco utile dal momento che bisogna integrare sul cammino effettivo della luce. Tuttavia  $|\phi| \ll 1$ , allora ci aspettiamo che l'angolo di deflessione sia piccolo e possiamo approssimare la (4.11) all'integrale sul percorso della luce in perturbato.

Se consideriamo un fascio di luce che si propaga nella direzione  $\mathbf{e}_z$  e passa una lente a  $z = 0$  con parametro d'impatto  $b$ , allora l'angolo di deflessione sarà

$$\alpha(b) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \nabla_{\perp} \phi. \quad (4.12)$$

Se la lente è una massa puntiforme si ottiene il risultato

$$|\alpha| = \frac{4MG}{|\mathbf{x}|}.$$

Da quest'ultima relazione si vede che  $\alpha$  dipende linearmente dalla massa, per cui si può pensare, nel caso di un sistema di lenti, di applicare il principio di sovrapposizione per gli angoli di deflessione.

Si consideri una distribuzione superficiale di  $N$  masse puntiformi, le cui posizioni rispetto ad un sistema di coordinate fissate e le masse siano rispettivamente  $\xi_i$  e  $M_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ . L'angolo di deflessione di un raggio che incontra il piano nel punto  $\xi$  sarà

$$\alpha(\xi) = \sum_i \alpha(\xi - \xi_i) = 4G \sum_i M_i \frac{(\xi - \xi_i)}{|\xi - \xi_i|^2}. \quad (4.13)$$

Consideriamo ora delle lenti più realistiche ossia delle distribuzioni tridimensionali di materia. Nei casi più comuni di effetti di lente gravitazionale in astrofisica e anche di quelli più complessi, come i grappoli di galassie, le dimensioni fisiche della lente sono generalmente più piccole rispetto alle distanze tra osservatore, lente e sorgente. Quindi la deflessione del cammino luminoso avviene in una sua sezione molto piccola. A tale fenomeno si dà il nome di approssimazione da lente sottile: sia la lente che la sorgente vengono approssimate da distribuzioni planari di materia e si parla di lente piana e sorgente piana.

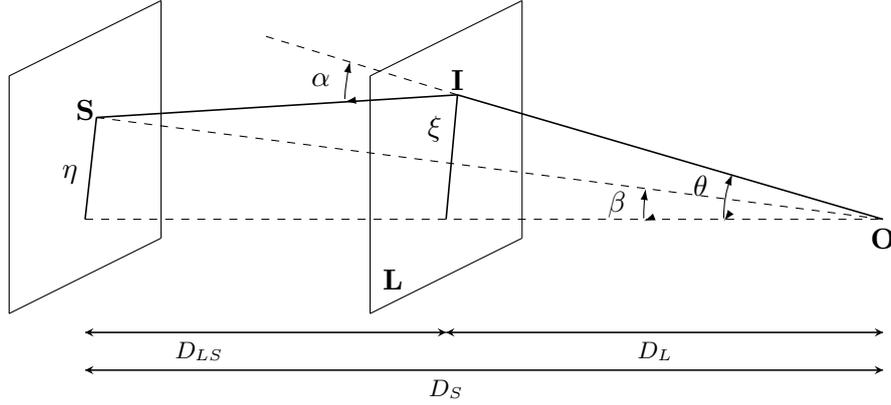
In questa approssimazione la lente piana è descritta dalla sua densità superficiale

$$\Sigma(\xi) = \int \rho(\xi, z) dz, \quad (4.14)$$

dove  $\xi$  è un vettore bidimensionale nel piano della lente, mentre  $\rho$  è la densità tridimensionale. L'angolo di deflessione totale è ottenuto sommando tutti i contributi degli elementi di massa  $\Sigma(\xi) d^2\xi$

$$\alpha(\xi) = 4G \int \frac{\Sigma(\xi')(\xi - \xi_i)}{|\xi - \xi_i|^2} d^2\xi'. \quad (4.15)$$

Consideriamo ora un sistema composto da un osservatore  $O$ , una lente gravitazionale  $L$  e una sorgente  $S$  posta dietro la lente come mostrato nella Figura 4.1. Definiamo un'asse ottico indicato dalla linea tratteggiata, perpendicolare ai piani della lente e della sorgente e passante per l'osservatore. Consideriamo una sorgente nella posizione angolare  $\beta$ , che si troverà quindi sul piano della sorgente alla distanza  $\eta = \beta D_S$  dall'asse ottico. L'angolo



**Figura 4.1** Schema di un tipico sistema di lenti gravitazionale

di deflessione  $\alpha$  del raggio luminoso proveniente dalla sorgente, con parametro d'impatto  $\xi = \theta D_L$  sul piano della lente, è dato dall'equazione (4.12). A causa della deflessione, l'osservatore riceve la luce proveniente da una sorgente posta ad una posizione angolare  $\theta$ .

Si noti che, a causa della curvatura indotta dalla distribuzione di massa, lo spazio-tempo non è uno spazio euclideo come nel caso Minkowskiano. Quindi si avrà una metrica non-euclidea e in generale  $D_S \neq D_{LS} + D_L$ . Tuttavia è possibile considerare queste distanze come *distanze di diametro angolare* definite come  $D_S = \eta/\beta$  e  $D_L = \xi/\theta$ .

Assumendo che gli angoli  $\theta, \beta$  e  $\alpha$  siano piccoli, possiamo legare la posizione apparente della sorgente con quella reale mediante una relazione molto semplice. Questa relazione è chiamata *equazione della lente* e viene espressa come

$$\theta D_S = \beta D_S + \alpha D_{LS}. \quad (4.16)$$

Definendo l'angolo di deflessione ridotto

$$\alpha'(\theta) \equiv \frac{D_{LS}}{D_S} \alpha(\theta) = 4G \frac{D_{LS}}{D_S} \int \frac{\Sigma(\xi')(\xi - \xi')}{|\xi - \xi'|^2} d^2 \xi',$$

otteniamo

$$\beta = \theta - \alpha'(\theta). \quad (4.17)$$

Dal momento che  $\xi = D_L \theta$ , allora l'angolo di deflessione ridotto sarà

$$\begin{aligned} \alpha'(\theta) &= 4G \frac{D_L D_{LS}}{D_S} \int \Sigma(\theta' D_L) \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} d^2 \theta' \\ &= \frac{1}{\pi} \int \kappa(\theta') \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} d^2 \theta', \end{aligned} \quad (4.18)$$

dove

$$\kappa(\theta') = \frac{\Sigma(D_L \theta')}{\Sigma_{crit}}, \quad \Sigma_{crit} = \frac{1}{4\pi} \frac{D_S}{D_L D_{LS}}, \quad (4.19)$$

sono rispettivamente la densità superficiale adimensionale della lente (nota anche come *convergenza*) e la densità di massa critica.  $\kappa(\boldsymbol{\theta})$  caratterizza la forza dell'effetto di lente gravitazionale; infatti a seconda del valore di  $\kappa$  si possono avere moltiplicazioni, ingrandimenti e distorsioni dell'immagine  $I$ . Si parla di effetto forte per  $\kappa > 1$ , mentre l'effetto debole si verifica per  $\kappa \ll 1$ .

Poichè la densità di massa critica dipende dalla distanza angolare, la forza di una lente dipenderà anche dalla distanza relativa della sorgente e dell'osservatore dalla lente.

Nel limite di campo debole,  $\kappa$  è legato alla proiezione del potenziale gravitazionale Newtoniano,  $\phi(\boldsymbol{\theta})$ , mediante l'equazione di Poisson,

$$\nabla^2 \phi = 2\kappa \quad (4.20)$$

per cui

$$\phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\boldsymbol{\theta}') \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| d^2\theta', \quad \alpha'(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\boldsymbol{\theta}') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} d^2\theta'. \quad (4.21)$$

Dalla (4.21) si nota la relazione tra il potenziale  $\phi$  e l'angolo di deflessione ridotto  $\alpha'$ . Differenziando la (4.17) rispetto a  $\boldsymbol{\theta}$  otteniamo

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha'_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left( \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right) = \delta_{ij} - \partial_i \partial_j \phi. \quad (4.22)$$

L'equazione (4.22) descrive la funzione della lente gravitazionale, ossia come un punto del piano della sorgente è legato alla sua immagine mediante il campo gravitazionale Newtoniano  $\phi$ . Questa relazione viene descritta dalla *matrice di ingrandimento*  $M(\boldsymbol{\theta})$  definita dall'equazione (4.22) come

$$\begin{aligned} M^{-1}(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \\ &= (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

dove dalla (4.20)

$$\kappa = \frac{1}{2} (\partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2) \phi, \quad (4.24)$$

mentre

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} (\partial_1 \partial_1 - \partial_2 \partial_2) \phi, \quad \gamma_2 = \partial_1 \partial_2 \phi. \quad (4.25)$$

Dalla decomposizione (4.23) della matrice d'ingrandimento si nota che l'effetto di lente gravitazionale agisce in due modi. Il primo, dato da  $(1 - \kappa)$ , è quello di ingrandire isotropicamente la sorgente, mentre il secondo, dato da  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , è quello di distorcere l'immagine.  $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2)$  è la *shear gravitazionale*. Questo termine è responsabile della trasformazione dell'immagine delle galassie in anelli o enormi archi.

Gli autovalori della matrice di shear sono

$$\zeta_{1,2} = \pm \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} = \pm \gamma, \quad (4.26)$$

per cui gli autovalori della matrice di ingrandimento sono

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 - \kappa - \gamma, \\ \lambda_2 &= 1 - \kappa + \gamma.\end{aligned}$$

Scegliamo un sistema di riferimento in cui la matrice (4.23) sia diagonale e consideriamo una sorgente circolare per la quale l'equazione delle linee isofote è  $y_1^2 + y_2^2 = r^2$ . L'equazione delle lenti ci assicura che i punti sul piano della sorgente che soddisfano questa equazione vengono mappate nei punti  $(x_1, x_2)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Quindi

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2 = (1 - \kappa - \gamma)^2 x_1^2 + (1 - \kappa + \gamma)^2 x_2^2, \quad (4.28)$$

che rappresenta l'equazione di un'ellisse sul piano della lente. Così una sorgente circolare, sufficientemente piccola confrontata con la scala della lente, viene deformata in un'ellisse quando  $\kappa$  e  $\gamma$  sono entrambi non nulli. Gli assi dell'ellisse sono

$$a = \frac{1}{1 - \kappa - \gamma}, \quad b = \frac{1}{1 - \kappa + \gamma}. \quad (4.29)$$

Ovviamente l'ellisse si riduce ad un cerchio se  $\gamma = 0$ . L'angolo di orientazione dell'ellisse sarà

$$\psi = \arctan \left( \frac{\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) - |\gamma(\boldsymbol{\theta})|}{\gamma_2(\boldsymbol{\theta})} \right) \quad (4.30)$$

e si definisce l'ellitticità dell'immagine complessa come

$$\epsilon \equiv \frac{a - b}{a + b} e^{2i\psi}, \quad (4.31)$$

mentre la sua polarizzazione complessa

$$\chi \equiv \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} e^{2i\psi}, \quad (4.32)$$

e queste due quantità sono legate dalla relazione

$$\chi = \frac{2\epsilon}{1 + |\epsilon|^2}.$$

Esprimendo l'ellitticità e la polarizzazione dell'immagine rispetto allo shear  $\gamma$  e alla convergenza  $\kappa$ , si ottiene

$$\epsilon = \frac{\gamma}{1 - \kappa} e^{2i\psi}, \quad \chi = \frac{2(1 - \kappa)\gamma}{(1 - \kappa)^2 + \gamma} e^{2i\psi}. \quad (4.33)$$

Definendo lo shear ridotto complesso

$$g \equiv \frac{\gamma}{1 - \kappa}, \quad (4.34)$$

allora

$$\epsilon = |g|e^{2i\psi}, \quad \chi = \frac{2|g|}{1 + |g|^2}e^{2i\psi}. \quad (4.35)$$

Per legare l'ellitticità della sorgente a quella dell'immagine, rilevando visione quantitativa della deformazione dell'immagine, bisogna fare un'analisi più generale del fenomeno. Sappiamo che la sorgente è caratterizzata dal quadrimomento della sua brillantezza superficiale, definito come

$$Q_{ij}^S = \frac{\int d^2\beta (\beta_i - \beta_{0i})(\beta_j - \beta_{0j})W(I(\boldsymbol{\beta}))}{\int d^2\beta W(I(\boldsymbol{\beta}))}, \quad (4.36)$$

con  $\boldsymbol{\beta}_0$  il centro ottico della sorgente

$$\boldsymbol{\beta}_0 = \frac{\int d^2\beta \boldsymbol{\beta} W(I(\boldsymbol{\beta}))}{\int d^2\beta W(I(\boldsymbol{\beta}))}, \quad (4.37)$$

e la quantità  $W(I)$  è una funzione peso dipendente dall'intensità. Analogamente l'immagine è descritta da un quadrimomento

$$Q_{ij}^I = \frac{\int d^2\theta (\theta_i - \theta_{0i})(\theta_j - \theta_{0j})W(I(\boldsymbol{\theta}))}{\int d^2\theta W(I(\boldsymbol{\theta}))}, \quad (4.38)$$

dove per analogia si è posto

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \frac{\int d^2\theta \boldsymbol{\theta} W(I(\boldsymbol{\theta}))}{\int d^2\theta W(I(\boldsymbol{\theta}))}. \quad (4.39)$$

Utilizzando il quadrimomento  $Q_{ij}$  si può definire l'ellitticità complessa

$$\epsilon = \frac{Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}}{Q_{11} + Q_{22} + 2(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2)}, \quad (4.40)$$

per ottenere la relazione che lega l'ellitticità dell'immagine  $\epsilon^I$  in funzione dell'ellitticità della sorgente  $\epsilon^S$

$$\epsilon^S = \begin{cases} \frac{\epsilon^I - g}{1 - g^*\epsilon^I} & |g| \leq 1 \\ \frac{1 - g\epsilon^*I}{\epsilon^{*I} - g^*} & |g| > 1 \end{cases} \quad (4.41)$$

Un'importante conseguenza della distorsione della lente è l'amplificazione. Mediante l'equazione della lente, l'elemento di angolo solido  $d\Omega_S$  viene mappato nell'angolo solido  $d\Omega_L$ . Dal teorema di Liouville e dall'assenza di emissione o assorbimento di fotoni nella deflessione gravitazionale della luce, segue la conservazione della luminosità della superficie della sorgente. La variazione dell'angolo solido sotto cui la sorgente è vista implica che il

flusso ricevuto da una sorgente è amplificato o ridotto. Questa amplificazione è quantificata dalla matrice  $M(\boldsymbol{\theta})$ . Definiamo

$$\mu \equiv \det M(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\det M^{-1}(\boldsymbol{\theta})} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2}, \quad (4.42)$$

come l'amplificazione globale. Si nota subito che se  $(1 - \kappa)^2 - \gamma^2 = 0$ , l'amplificazione diverge. Questa condizione comporta la formazione di immagini multiple, grandi archi e anelli di Einstein con un'amplificazione molto grande. I punti del piano dell'immagine in cui l'amplificazione è infinita formano le linee critiche, mentre i corrispondenti punti sul piano della sorgente formano le caustiche. La forma delle caustiche e delle linee critiche dipendono dalla configurazione della lente, funzione dalla distanza tra osservatore, lente e sorgente, e dalla geometria e distribuzione della massa all'interno della lente. Per una data configurazione, le proprietà delle immagini dipendono dalla posizione della sorgente rispetto alle linee caustiche e dalla morfologia intrinseca della sorgente. Sostanzialmente le immagini fortemente deflesse sono delle buone tracce delle linee critiche e quindi rivelano molte proprietà della configurazione della lente. Per esempio, un perfetto anello circolare corrisponde ad una sorgente allineata con la lente, osservatore e distribuzione circolare di materia. La linea critica è un cerchio perfetto descritto dall'anello, mentre la linea caustica è un punto singolo del piano della sorgente.

## 4.2 Materia oscura

Nel 1933 l'astronomo Fritz Zwicky, valutando la stima della massa di ammassi di galassie, notò una discordanza nei risultati derivanti da due differenti metodi di stima. In particolare vide che per l'ammasso della Chioma la stima della massa dinamica era 400 volte più grande di quella basata sulla luminosità. Fu così che ipotizzò l'esistenza di un altro tipo di materia presente nell'universo alla quale si diede il nome di *materia oscura*.

Il suo risultato però non suscitò grande interesse nella comunità scientifica tanto che continuò a dedicarsi alle scoperte di supernove extragalattiche e a catalogare le galassie visibili nell'universo. Solo negli anni '70 il problema sulla materia oscura divenne oggetto di ricerca. Nel 2008, grazie allo studio di innumerevoli immagini riprese dal telescopio CFHT, si è evidenziata la possibile presenza di materia oscura negli spazi intergalattici.

L'idea di fondo per ipotizzare l'esistenza della materia oscura negli ammassi di galassie sfrutta la deformazione, indotta dal campo gravitazionale di un ammasso di una o più galassie, delle immagini dello sfondo tramite l'utilizzo del concetto di lente gravitazionale. Il vantaggio del lensing gravitazionale risiede nel fatto che la determinazione della densità superficiale dell'ammasso è indipendente dalla natura fisica della materia che lo compone e dal suo stato dinamico.

Vi sono due modi per determinare la distribuzione superficiale di materia  $\Sigma(\boldsymbol{\xi})$  dell'ammasso. Il primo consiste nello studio degli *archi giganti* che si formano quando la galassia (che funge da sorgente) si trova vicino ad una caustica dell'ammasso. Dalle proprietà di questi archi è possibile stimare  $\Sigma(\boldsymbol{\xi})$ . Questo metodo studia quindi l'effetto di *lensing forte*.

Il secondo metodo invece sfrutta l'effetto di *lensing debole*, ossia lo studio delle distorsioni delle immagini dello sfondo in *archetti*. Uno studio statistico di tali immagini permette di ottenere  $\Sigma(\boldsymbol{\xi})$ .

Analizziamo nel dettaglio il primo metodo. La formazione di archi giganti riguarda gli ammassi regolari, caratterizzati da un'approssimata simmetria sferica. Le immagini di una sorgente estesa prossima ad una castica sono proprio segmenti d'arco. La formazione di *archi tangenziali* (segmenti dell'anello di Einstein relativo ad un ammasso regolare) fornisce un'informazione non banale riguardo l'ammasso in esame. Infatti la densità superficiale centrale  $\Sigma_0$  per questo tipo di fenomeno deve essere

$$\Sigma_0 > \Sigma_{cr}, \quad (4.43)$$

ottenendo così un limite inferiore per la densità centrale. Dal momento che tale arco traccia proprio l'anello di Einstein, è immediato dedurre il valore dell'angolo di Einstein  $\theta_E$ . Infatti

$$m = \pi (\theta_E D_L)^2 \Sigma_{cr}, \quad (4.44)$$

con  $D_L$  distanza dell'ammasso. Questa quantità è facilmente misurabile coombinando il redshift osservato e la legge di Hubble.  $\Sigma_{cr}$  richiede la conoscenza della distanza della sorgente, difficile da misurare in modo diretto. L'amplificazione dell'immagine permette di superare questa difficoltà: infatti le righe spettrali della sorgente posseggono lo stesso redshift di quelle presenti nell'immagine e quindi si ottiene il valore della massa dell'ammasso. I modelli di lenti basati sulla simmetria assiale prevedono l'esistenza di una coppia di archi tangenziali situati nell'anello di Einstein in posizioni simmetriche rispetto al centro della lente. Generalmente si osserva un solo arco. Ciò è dovuto probabilmente ad una perturbazione, seppur piccola, della simmetria assiale della lente che produce un forte indebolimento di uno dei due archi tangenziali.

Il secondo metodo prevede l'utilizzo di alcune relazioni valide nel regime di lensing debole. Come abbiamo visto precedentemente, l'immagine di una sorgente estesa subisce un'alterazione causata dall'effetto di convergenza  $\kappa$  e di shear  $\gamma$ . Supponendo che le galassie sullo sfondo si trovino alla stessa distanza  $D_S$  e che sia  $D_S$ , che  $D_L$  siano misurabili osservativamente, allora è nota  $\Sigma_{cr}$ .

$$\Sigma(\boldsymbol{\xi}) = \kappa(\boldsymbol{\theta}) \Sigma_{cr} \quad (4.45)$$

avrà come incognita solo  $\kappa(\boldsymbol{\theta})$ . Questa quantità non è misurabile in maniera diretta. Tuttavia è possibile valutare osservativamente lo shear ridotto  $g$  per poi risalire al valore di  $\kappa$ . Non conoscendo i valori di  $\epsilon_S$  relativi alle galassie dello sfondo, possiamo supporre che tali galassie non siano statisticamente correlate e quindi consideriamo le loro orientazioni completamente casuali. Pertanto i corrispondenti valori medi  $\langle \epsilon_S \rangle$  soddisfano la condizione

$$\langle \epsilon_S \rangle = 0.$$

Questa condizione comporta che la (4.41) prenda la forma

$$g = \begin{cases} \langle \epsilon^I \rangle & |g| \leq 1 \\ 1/\langle \epsilon^{*I} \rangle & |g| > 1 \end{cases} . \quad (4.46)$$

Nel limite di lensing debole si ha che  $\kappa(\boldsymbol{\theta}) < 1$ , quindi  $|g| < 1$ . Dalla definizione di shear ridotto e dall'equazione (4.46) segue che

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = g(\boldsymbol{\theta}) = \langle \epsilon^I \rangle, \quad (4.47)$$

quindi lo shear complesso diviene una quantità osservabile e misurabile direttamente. Utilizzando le relazioni (4.24) e (4.25), si mette in relazione la shear con la convergenza

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \mathcal{D}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \kappa(\boldsymbol{\theta}') d^2\theta', \quad (4.48)$$

dove

$$\mathcal{D} = \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2 - 2i\theta_1\theta_2}{|\boldsymbol{\theta}|^4}. \quad (4.49)$$

Formalmente questa relazione è un prodotto di convoluzione, quindi può essere invertita. Pertanto

$$\begin{aligned} \kappa(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\pi} \int \mathcal{D}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \gamma(\boldsymbol{\theta}') d^2\theta' \\ &= \frac{1}{\pi} \int \mathcal{D}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \langle \epsilon^I \rangle d^2\theta, \end{aligned} \quad (4.50)$$

ottenendo così la relazione tra la convergenza e l'ellitticità dell'immagine. Si determina così il valore della densità superficiale di massa dell'ammasso mediante la relazione (4.45).

Da questo studio si ricava così una stima della massa di un ammasso di galassie che funge da lente gravitazionale. Questa stima, come abbiamo già detto, non dipende dallo stato termodinamico della galassia.

L'uso di telescopi a raggi X ha mostrato che l'emissione di raggi X degli ammassi di galassie è spazialmente estesa, con caratteristiche di distribuzione che si differenziano in funzione della struttura del potenziale gravitazionale dell'ammasso: il gas, infatti, tende a concentrarsi nelle zone in cui questo ha un valore minore. La distribuzione dell'emissione X fornisce così una vera e propria mappa del campo gravitazionale dell'ammasso e permette di risalire alla distribuzione della massa che lo produce.

Dal confronto delle stime derivanti dai due metodi di indagine, si è arrivati all'ipotesi dell'esistenza della materia oscura, dove per materia oscura si intende quel tipo di materia che non dà luogo ad un'emissione ottica e che non è stata ancora rivelata direttamente.

# Conclusioni

A conclusione di questo lavoro di tesi, si può affermare di aver riottenuto i risultati proposti da Einstein nel 1915, in merito alla deflessione della luce indotta dal campo gravitazionale solare. In particolare si è dimostrato, utilizzando i concetti di relatività generale, che il valore dell'angolo di deflessione della luce per mezzo del sole è circa  $1.75''$  d'arco, al contrario del risultato proposto da Soldner nel 1804. Si è ritrovato poi il risultato corretto, calcolando la sezione d'urto quantistica, al *leading order*, del processo d'interazione del fotone con il campo gravitazionale nel limite di campo debole. Sono stati studiati e approfonditi gli aspetti della relatività generale e delle sue implicazioni sulla dinamica dei corpi. È stata acquisita, inoltre, la capacità di calcolare il vertice d'interazione e la sezione d'urto in processi di scattering quantistici. Dallo studio di lenti gravitazionale per ammassi di galassie, si è introdotto uno dei temi fondamentali della fisica moderna: il problema dell'esistenza della materia oscura.

La formulazione della relatività generale, introdotta per rimuovere la contraddizione tra relatività ristretta e gravitazione Newtoniana, ha dato sviluppo a nuovi ambiti della fisica contemporanea. In seguito alla formulazione della teoria di Hubble nel 1929 sull'espansione dell'Universo, la teoria di Einstein è stata il punto fondamentale per i successivi sviluppi in ambito cosmologico che hanno portato alla formulazione del *modello cosmologico di Friedmann-Lemaître* e della teoria del *Big Bang*; a seguire la formulazione dell'*inflazione*, e dell'*energia oscura*. Gli sviluppi in questi ambiti portano con sé ancora problemi irrisolti: restano infatti aperte le questioni riguardanti gli istanti iniziali dell'universo e l'esistenza delle onde gravitazionali.

## Appendice A

### Vertice gravitone/fotone/fotone

Consideriamo l'azione del campo elettromagnetico in presenza di un campo gravitazionale

$$S(x) = -\frac{1}{4} \int dx \sqrt{g(x)} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x), \quad (\text{A.1})$$

Per trovare il vertice d'interazione tra il campo gravitazionale esterno e il campo elettromagnetico bisogna calcolare la derivata funzionale dell'azione rispetto ai campi coinvolti.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(x)}{\partial g_{\lambda k}(y)} &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g(x)} \{ F_\mu^\lambda(x) F^{\mu k}(x) - \frac{1}{4} g^{\lambda k}(x) F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \} \delta(x-y) \\ &= \frac{\sqrt{g(x)}}{2} \{ F_\mu^\lambda(y) F^{\mu k}(y) - \frac{1}{4} g^{\lambda k}(y) F_{\mu\nu}(y) F^{\mu\nu}(y) \} \\ &\xrightarrow{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} \frac{1}{2} \{ F_\mu^\lambda(y) F^{\mu k}(y) - \frac{1}{4} \eta^{\lambda k}(y) F_{\mu\nu}(y) F^{\mu\nu}(y) \} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S(x)}{\partial g_{\lambda k}(y) \partial A_\epsilon(z)} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial F_\mu^\lambda(y)}{\partial A_\epsilon(z)} F^{\mu k}(y) + \frac{\partial F^{\mu k}(y)}{\partial A_\epsilon(z)} F_\mu^\lambda(y) \right. \\ &\quad \left. - \eta^{\lambda k} F^{\mu\nu}(y) \partial_\mu^y \delta_\nu^\epsilon \delta(x-y) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \eta^{\lambda\alpha} \left[ \partial_\mu^y \delta_\alpha^\epsilon \delta(y-z) - \partial_\alpha^y \delta_\mu^\epsilon \delta(y-z) \right] F^{\mu k}(y) \right. \\ &\quad \left. + F_\mu^\lambda \eta^{\mu\alpha} \eta^{k\beta} \left[ \partial_\alpha^y \delta_\beta^\epsilon \delta(y-z) - \partial_\beta^y \delta_\alpha^\epsilon \delta(y-z) \right] \right. \\ &\quad \left. - \eta^{\lambda k} F^{\mu\nu}(y) \partial_\mu^y \delta_\nu^\epsilon \delta(y-z) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^3 S(x)}{\partial g_{\lambda k}(y) \partial A_\epsilon(z) \partial A_\gamma(w)} = \\
 & = \frac{1}{2} \left\{ \eta^{\lambda\alpha} \left[ \partial_\mu^{(y)} \delta_\alpha^\epsilon \delta(y-z) - \partial_\alpha^y \delta_\mu^\epsilon \delta(y-z) \right] \left[ \partial^{y\mu} \delta^{k\gamma} \delta(y-w) - \partial^{y k} \delta^{\mu\gamma} \delta(y-w) \right] \right. \\
 & + \left( \partial_\mu^y \delta^{\lambda\gamma} \delta(y-w) - \partial^{y\lambda} \delta_\mu^\gamma \delta(y-w) \right) \eta^{\mu\alpha} \eta^{k\beta} \left( \partial_\alpha^y \delta_\beta^\epsilon \delta(y-z) - \partial_\beta^y \delta_\alpha^\epsilon \delta(y-z) \right) \\
 & \left. - \eta^{\lambda k} \left( \partial^{y\mu} \delta^{\nu\gamma} \delta(y-w) - \partial^{y\nu} \delta^{\mu\gamma} \delta(y-w) \right) \partial_\mu^y \delta_\nu^y \delta(y-w) \right\} \\
 & = \frac{1}{2} \left\{ \eta^{\lambda\alpha} \left[ \partial_\mu^{(y)} \delta_\alpha^\epsilon \delta(y-z) - \partial_\alpha^y \delta_\mu^\epsilon \delta(y-z) \right] \left[ \partial_\sigma^y \delta_\zeta^\gamma \delta(y-w) - \partial_\zeta^y \delta_\sigma \gamma \delta(y-w) \right] \times \right. \\
 & \times \eta^{\mu\sigma} \eta^{k\zeta} + \left( \partial_\mu^y \delta_\sigma^\gamma \delta(y-w) - \partial_\sigma^y \delta_\mu^\gamma \delta(y-w) \right) \left( \partial_\alpha^y \delta_\beta^\epsilon \delta(y-z) - \partial_\beta^y \delta_\alpha^\epsilon \delta(y-z) \right) \times \\
 & \left. \times \eta^{\lambda\sigma} \eta^{\mu\alpha} \eta^{k\beta} - \eta^{\lambda k} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\alpha} \left( \partial_\sigma^y \delta_\alpha^\gamma \delta(y-w) - \partial_\alpha^y \delta_\sigma^\gamma \delta(y-w) \right) \partial_\mu^y \delta_\nu^y \delta(y-w) \right\} \quad (\text{A.4})
 \end{aligned}$$

Valutiamo quest'ultima quantità nello spazio degli impulsi

$$\begin{aligned}
 & \int dy dz dw \frac{\partial^3 S(x)}{\partial g_{\lambda k}(y) \partial A_\epsilon(z) \partial A_\gamma(w)} e^{-i(qy+pz+p'w)} = \\
 & \int dy dz dw \frac{1}{2} \left\{ \eta^{\lambda\alpha} \left[ \partial_\mu^{(y)} \delta_\alpha^\epsilon \delta(y-z) - \partial_\alpha^y \delta_\mu^\epsilon \delta(y-z) \right] \eta^{\mu\sigma} \eta^{k\zeta} \times \right. \\
 & \times \left[ \partial_\sigma^y \delta_\zeta^\gamma \delta(y-w) - \partial_\zeta^y \delta_\sigma \gamma \delta(y-w) \right] + \eta^{\lambda\sigma} \left( \partial_\mu^y \delta_\sigma^\gamma \delta(y-w) - \partial_\sigma^y \delta_\mu^\gamma \delta(y-w) \right) \times \\
 & \times \eta^{\mu\alpha} \eta^{k\beta} \left( \partial_\alpha^y \delta_\beta^\epsilon \delta(y-z) - \partial_\beta^y \delta_\alpha^\epsilon \delta(y-z) \right) - \left( \partial_\sigma^y \delta_\alpha^\gamma \delta(y-w) - \partial_\alpha^y \delta_\sigma^\gamma \delta(y-w) \right) \times \\
 & \left. \times \eta^{\lambda k} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\alpha} \partial_\mu^y \delta_\nu^y \delta(y-z) \right\} e^{-i(qy+pz+p'w)} \quad (\text{A.5})
 \end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente ogni parte dell'integrale. Per la prima

$$\begin{aligned}
 & \int dy dz dw \eta^{\lambda\alpha} \left[ \partial_\mu^{(y)} \delta_\alpha^\epsilon \delta(y-z) - \partial_\alpha^y \delta_\mu^\epsilon \delta(y-z) \right] \eta^{\mu\sigma} \eta^{k\zeta} \times \\
 & \quad \times \left[ \partial_\sigma^y \delta_\zeta^\gamma \delta(y-w) - \partial_\zeta^y \delta_\sigma \gamma \delta(y-w) \right] e^{-i(qy+pz+p'w)} \\
 & = \int dy dz dw \eta^{\lambda\alpha} \left[ -\partial_\mu^{(z)} \delta_\alpha^\epsilon \delta(y-z) + \partial_\alpha^z \delta_\mu^\epsilon \delta(y-z) \right] \eta^{\mu\sigma} \eta^{k\zeta} \times \\
 & \quad \times \left[ -\partial_\sigma^w \delta_\zeta^\gamma \delta(y-w) + \partial_\zeta^w \delta_\sigma \gamma \delta(y-w) \right] e^{-i(qy+pz+p'w)} \\
 & = \int dy dz dw \eta^{\lambda\alpha} \left[ (-ip_\mu) \delta_\alpha^\epsilon - (-ip_\alpha) \delta_\mu^\epsilon \right] \eta^{\mu\sigma} \eta^{k\zeta} \left[ (-ip'_\sigma) \delta_\zeta^\gamma - (-ip'_\zeta) \delta_\sigma \gamma \right] \times \\
 & \quad \times e^{-i(qy+pz+p'w)} \delta(y-z) \delta(y-w) \\
 & = \int dy \eta^{\lambda\alpha} \left[ p_\mu \delta_\alpha^\epsilon - ip_\alpha \delta_\mu^\epsilon \right] \eta^{\mu\sigma} \eta^{k\zeta} \left[ p'_\zeta \delta_\sigma^\gamma - p'_\sigma \delta_\zeta^\gamma \right] e^{-i(qy+pz+p'w)} \\
 & = \eta^{\lambda\alpha} \left[ p_\mu \delta_\alpha^\epsilon - ip_\alpha \delta_\mu^\epsilon \right] \eta^{\mu\sigma} \eta^{k\zeta} \left[ p'_\zeta \delta_\sigma^\gamma - p'_\sigma \delta_\zeta^\gamma \right] \delta^{(4)}(q+p+p') \\
 & = \left( p^\sigma \eta^{\epsilon\lambda} \eta^{k\zeta} - p^\lambda \eta^{\epsilon\sigma} \eta^{k\zeta} \right) \left( \delta_\sigma^\gamma p'_\zeta - \delta_\zeta^\gamma p'_\sigma \right) \delta^{(4)}(q+p+p') \\
 & = \left( p^\sigma \eta^{\epsilon\lambda} p'^k - p'_\sigma p^\sigma \eta^{\epsilon\lambda} \eta^{k\gamma} - p^\lambda p'^k \eta^{\epsilon\gamma} + p^\lambda p'^\epsilon \eta^{k\gamma} \right) \delta^{(4)}(q+p+p') \quad (\text{A.6})
 \end{aligned}$$

Per la seconda

$$\begin{aligned}
& \int dy dz dw \eta^{\lambda\sigma} (\partial_\mu^y \delta_\sigma^\gamma \delta(y-w) - \partial_\sigma^y \delta_\mu^\gamma \delta(y-w)) \eta^{\mu\alpha} \eta^{k\beta} \times \\
& \quad \times \left( \partial_\alpha^y \delta_\beta^\epsilon \delta(y-z) - \partial_\beta^y \delta_\alpha^\epsilon \delta(y-z) \right) e^{-i(qy+pz+p'w)} \\
&= \int dy dz dw \eta^{\lambda\sigma} (-\partial_\mu^w \delta_\sigma^\gamma \delta(y-w) + \partial_\sigma^w \delta_\mu^\gamma \delta(y-w)) \eta^{\mu\alpha} \eta^{k\beta} \times \\
& \quad \times (-\partial_\alpha^z \delta_\beta^\epsilon \delta(y-z) + \partial_\beta^z \delta_\alpha^\epsilon \delta(y-z)) e^{-i(qy+pz+p'w)} \\
&= \int dy dz dw \eta^{\lambda\sigma} ((-ip'_\mu) \delta_\sigma^\gamma - (-ip'_\sigma) \delta_\mu^\gamma) \eta^{\mu\alpha} \eta^{k\beta} ((-ip_\alpha) \delta_\beta^\epsilon - (-ip_\beta) \delta_\alpha^\epsilon) \times \\
& \quad \times e^{-i(qy+pz+p'w)} \delta(y-w) \delta(y-z) \\
&= \int dy \eta^{\lambda\sigma} (p'_\mu \delta_\sigma^\gamma - p'_\sigma \delta_\mu^\gamma) \eta^{\mu\alpha} \eta^{k\beta} (p_\beta \delta_\alpha^\epsilon - p_\alpha \delta_\beta^\epsilon) e^{-i(qy+pz+p'w)} \delta(y-w) \delta(y-z) \\
&= \eta^{\lambda\sigma} \eta^{\mu\alpha} \eta^{k\beta} (p'_\mu \delta_\sigma^\gamma p_\beta \delta_\alpha^\epsilon - p'_\mu \delta_\sigma^\gamma p_\alpha \delta_\beta^\epsilon - p'_\sigma \delta_\mu^\gamma p_\beta \delta_\alpha^\epsilon + p'_\sigma \delta_\mu^\gamma p_\alpha \delta_\beta^\epsilon) \delta^{(4)}(q+p+p') \\
&= \left( \eta^{\lambda\gamma} p'^\epsilon p^k - p'_\mu p^\mu \eta^{k\epsilon} \eta^{\lambda\gamma} - p'^\lambda p^k \eta^{\gamma\epsilon} + p'^\lambda p^\gamma \eta^{k\epsilon} \right) \delta^{(4)}(q+p+p') \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Per la terza

$$\begin{aligned}
& \int dy dz dw \left( \eta^{\lambda k} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\alpha} (\partial_\sigma^y \delta_\alpha^\gamma \delta(y-w) \right. \\
& \quad \left. - \partial_\alpha^y \delta_\sigma^\gamma \delta(y-w)) \partial_\mu^y \delta_\nu^y \delta(y-w) \right) e^{-i(qy+pz+p'w)} \\
&= \int dy dz dw \eta^{\lambda k} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\alpha} (-\partial_\sigma^w \delta_\alpha^\gamma \delta(y-w) + \partial_\alpha^w \delta_\sigma^\gamma \delta(y-w)) \times \\
& \quad \times (-\partial_\mu^z \delta_\nu^y \delta(y-z)) e^{-i(qy+pz+p'w)} \\
&= \int dy dz dw \eta^{\lambda k} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\alpha} ((-ip'_\sigma) \delta_\alpha^\gamma - (-ip'_\alpha) \delta_\sigma^\gamma) (+ip_\mu \delta_\nu^y) \times \\
& \quad \times e^{-i(qy+pz+p'w)} \delta(y-w) \delta(y-z) \\
&= \eta^{\lambda k} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\alpha} (p'_\alpha \delta_\sigma^\gamma - p'_\sigma \delta_\alpha^\gamma) p_\mu \delta_\nu^y \delta^{(4)}(q+p+p') \\
&= \left( p'^\epsilon p^\gamma \eta^{\lambda k} - p'_\sigma p^\sigma \eta^{\lambda k} \eta^{\epsilon\gamma} \right) \delta^{(4)}(q+p+p') \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Quindi otteniamo

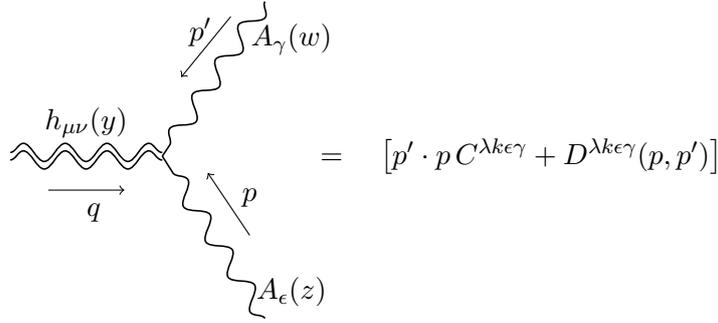
$$\begin{aligned}
& \int dy dz dw \frac{\partial^3 S(x)}{\partial g_{\lambda k}(y) \partial A_\epsilon(z) \partial A_\gamma(w)} e^{-i(qy+pz+p'w)} = \\
&= \frac{\delta^{(4)}(q+p+p')}{2} \left( (p'^k p^\gamma \eta^{\epsilon\lambda} - p'_\sigma p^\sigma \eta^{\epsilon\lambda} \eta^{k\gamma} - p'^k p^\lambda \eta^{\epsilon\gamma} + p'^\epsilon p^\lambda \eta^{k\gamma}) \right. \\
& \quad \left. + (p'^\epsilon p^k \eta^{\lambda\gamma} - p'_\mu p^\mu \eta^{k\epsilon} \eta^{\lambda\gamma} - p'^\lambda p^k \eta^{\gamma\epsilon} + p'^\lambda p^\gamma \eta^{k\epsilon}) - (p'^\epsilon p^\gamma \eta^{\lambda k} - p'_\sigma p^\sigma \eta^{\lambda k} \eta^{\epsilon\gamma}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\delta^{(4)}(q+p+p')}{2} \left( p'^k p^\sigma \eta^{\epsilon\lambda} - p'_\sigma p^\sigma \eta^{\epsilon\lambda} \eta^{k\gamma} - p'^k p^\lambda \eta^{\epsilon\gamma} + p'^\epsilon p^\lambda \eta^{k\gamma} + p'^\epsilon p^k \eta^{\lambda\gamma} \right. \\
 &\quad \left. - p'_\mu p^\mu \eta^{k\epsilon} \eta^{\lambda\gamma} - p'^\lambda p^k \eta^{\gamma\epsilon} + p'^\lambda p^\gamma \eta^{k\epsilon} - p'^\epsilon p^\gamma \eta^{\lambda k} + p'_\sigma p^\sigma \eta^{\lambda k} \eta^{\epsilon\gamma} \right) \\
 &= -\frac{\delta^{(4)}(q+p+p')}{2} \left( p'_\sigma p^\sigma \left( \eta^{\epsilon\lambda} \eta^{k\gamma} + \eta^{k\epsilon} \eta^{\lambda\gamma} - \eta^{\lambda k} \eta^{\epsilon\gamma} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \eta^{\lambda k} p'^\epsilon p^\gamma - \eta^{\lambda\gamma} p'^\epsilon p^k - \eta^{\epsilon\lambda} p'^k p^\gamma + \eta^{\epsilon\gamma} p'^k p^\lambda - \eta^{k\gamma} p'^\epsilon p^\lambda + \eta^{\gamma\epsilon} p'^\lambda p^k - \eta^{k\epsilon} p'^\lambda p^\gamma \right) \right) \\
 &= -\frac{\delta^{(4)}(q+p+p')}{2} \left[ p' \cdot p C^{\lambda k \epsilon \gamma} + D^{\lambda k \epsilon \gamma}(p, p') \right] \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

Avendo posto

$$C^{\lambda k \epsilon \gamma} = \eta^{\epsilon\lambda} \eta^{k\gamma} + \eta^{k\epsilon} \eta^{\lambda\gamma} - \eta^{\lambda k} \eta^{\epsilon\gamma} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
 D^{\lambda k \epsilon \gamma}(p, p') &= \eta^{\lambda k} p'^\epsilon p^\gamma - \eta^{\lambda\gamma} p'^\epsilon p^k - \eta^{\epsilon\lambda} p'^k p^\gamma \\
 &\quad + \eta^{\epsilon\gamma} p'^k p^\lambda - \eta^{k\gamma} p'^\epsilon p^\lambda + \eta^{\gamma\epsilon} p'^\lambda p^k - \eta^{k\epsilon} p'^\lambda p^\gamma \tag{A.11}
 \end{aligned}$$



**Figura A.1** Diagramma di Feynmann per l'interazione gravitone-fotone-fotone

Quindi il vertice d'interazione sarà

$$V^{\lambda k \epsilon \gamma}(p, p') = p' \cdot p C^{\lambda k \epsilon \gamma} + D^{\lambda k \epsilon \gamma}(p, p') \tag{A.12}$$

In questo calcolo abbiamo supposto che tutti i momenti fossero entranti come si vede nella Figura A.1. In realtà bisognerebbe prendere il momento  $p'$  uscente e questo comporterebbe la comparsa di un meno a fattor comune nella (A.9).

## Appendice B

# Calcolo della sezione d'urto quantistica

L'ampiezza di probabilità media di transizione per lo scattering del fotone è data da

$$\begin{aligned} \langle |iS_{fi}^{(1)}|^2 \rangle &= \frac{\kappa^2}{16V^2 E_p E_{p'}} \sum_{\lambda\lambda'} h_{\mu\nu}(q) \epsilon_\beta^*(p', \lambda') V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, p') \epsilon_\alpha(p, \lambda) \times \\ &\quad \times h_{\rho\sigma}^*(q) \epsilon_\kappa(p', \lambda') V^{\rho\sigma\epsilon\kappa*}(p, p') \epsilon_\epsilon^*(p, \lambda) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

In questa sezione effettueremo i calcoli espliciti della (B.1). Osserviamo inizialmente che per la (A.9) e (3.15) si ottiene

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(q) V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, p') &= -2\pi\delta(q_0) \frac{M\kappa}{2q^2} \frac{\delta^{(4)}(q+p-p')}{2} \\ &\quad \times (\eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0) \left[ p' \cdot p C^{\mu\nu\alpha\beta} + D^{\mu\nu\alpha\beta}(p, p') \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Ponendo per comodità il fattore a fronte uguale a  $J$  otteniamo

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(q) V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, p') &= \\ &= J (\eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0) \left[ p' \cdot p \left( \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\mu} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} \right) - \eta^{\mu\nu} p'^\alpha p^\beta + \eta^{\mu\beta} p'^\alpha p^\nu \right. \\ &\quad \left. + \eta^{\alpha\mu} p'^\nu p^\beta - \eta^{\alpha\beta} p'^\nu p^\mu + \eta^{\nu\beta} p'^\alpha p^\mu - \eta^{\alpha\beta} p'^\mu p^\nu + \eta^{\nu\alpha} p'^\mu p^\beta \right] \\ &= J \left\{ p' \cdot p \left( 4\eta^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} \right) - 4p'^\alpha p^\beta + p'^\alpha p^\beta + p'^\alpha p^\beta - \eta^{\alpha\beta} p' \cdot p + p'^\alpha p^\beta \right. \\ &\quad \left. - \eta^{\alpha\beta} p' \cdot p + p'^\alpha p^\beta - 2 \left[ \left( \eta^{\alpha\beta} - \delta_0^\alpha \delta_0^\beta - \delta_0^\alpha \delta_0^\beta \right) p' \cdot p - p'^\alpha p^\beta + \delta_0^\beta p'^\alpha p^0 + \delta_0^\alpha p'^0 p^\beta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \eta^{\alpha\beta} p'^0 p^0 + \delta_0^\beta p'^\alpha p^0 - \eta^{\alpha\beta} p'^0 p^0 + \delta_0^\alpha p'^0 p^\beta \right] \right\} \\ &= -2J \left\{ \left( \eta^{\alpha\beta} - 2\delta_0^\alpha \delta_0^\beta \right) p' \cdot p - p'^\alpha p^\beta + 2\delta_0^\beta p'^\alpha p^0 + 2\delta_0^\alpha p'^0 p^\beta - 2\eta^{\alpha\beta} p'^0 p^0 \right\} \\ &= -2J \left\{ \left( \eta^{\alpha\beta} - 2\delta_0^\alpha \delta_0^\beta \right) p' \cdot p - p'^\alpha p^\beta + 2E\delta_0^\beta p'^\alpha + 2E\delta_0^\alpha p^\beta - 2E^2\eta^{\alpha\beta} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

poichè per un campo statico esterno l'energia del fotone è conservata, ossia  $E_p = E_{p'} = E$ . Dalla (B.1) e utilizzando la relazione di completezza sui vettori di polarizzazione del fotone otteniamo

$$\begin{aligned}
 \langle |iS_{fi}^{(1)}|^2 \rangle &= \frac{4J^2\kappa^2}{16V^2E_pE_{p'}} \left\{ \left( \eta^{\alpha\beta} - 2\delta_0^\alpha\delta_0^\beta \right) p' \cdot p - p'^\alpha p^\beta + 2E\delta_0^\beta p'^\alpha + 2E\delta_0^\alpha p^\beta \right. \\
 &\quad \left. - 2E^2\eta^{\alpha\beta} \right\} \left\{ \left( \eta^{\epsilon\kappa} - 2\delta_0^\epsilon\delta_0^\kappa \right) p' \cdot p - p'^\epsilon p^\kappa + 2E\delta_0^\kappa p'^\epsilon + 2E\delta_0^\epsilon p^\kappa - 2E^2\eta^{\epsilon\kappa} \right\} \\
 &\quad \times \sum_{\lambda\lambda'} \epsilon_\beta^*(p', \lambda') \epsilon_\kappa(p', \lambda') \epsilon_\alpha(p, \lambda) \epsilon_\epsilon^*(p, \lambda) \\
 &= \frac{4J^2\kappa^2}{16V^2E_pE_{p'}} \left\{ \left( \eta^{\alpha\beta} - 2\delta_0^\alpha\delta_0^\beta \right) p' \cdot p - p'^\alpha p^\beta + 2E\delta_0^\beta p'^\alpha + 2E\delta_0^\alpha p^\beta - 2E^2\eta^{\alpha\beta} \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \left( \eta^{\epsilon\kappa} - 2\delta_0^\epsilon\delta_0^\kappa \right) p' \cdot p - p'^\epsilon p^\kappa + 2E\delta_0^\kappa p'^\epsilon + 2E\delta_0^\epsilon p^\kappa - 2E^2\eta^{\epsilon\kappa} \right\} 2\eta_{\beta\kappa}\eta_{\alpha\epsilon} \\
 &= \frac{8J^2\kappa^2}{16V^2E_pE_{p'}} \left\{ \left( \eta_{\epsilon\kappa} - 2\delta_{\epsilon 0}\delta_{\kappa 0} \right) p' \cdot p - p'_\epsilon p_\kappa + 2E\delta_{\kappa 0} p'_\epsilon + 2E\delta_{\epsilon 0} p_\kappa - 2E^2\eta_{\epsilon\kappa} \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \left( \eta^{\epsilon\kappa} - 2\delta_0^\epsilon\delta_0^\kappa \right) p' \cdot p - p'^\epsilon p^\kappa + 2E\delta_0^\kappa p'^\epsilon + 2E\delta_0^\epsilon p^\kappa - 2E^2\eta^{\epsilon\kappa} \right\} \\
 &= \frac{8J^2\kappa^2}{16V^2E_pE_{p'}} \left\{ (4 - 2 - 2 + 4) (p' \cdot p)^2 - p'^\epsilon p^\kappa (\eta_{\epsilon\kappa} - 2\delta_{\epsilon 0}\delta_{\kappa 0}) p' \cdot p \right. \\
 &\quad + 2E\delta_0^\kappa p'^\epsilon (\eta_{\epsilon\kappa} - 2\delta_{\epsilon 0}\delta_{\kappa 0}) p' \cdot p + 2E\delta_0^\epsilon p^\kappa (\eta_{\epsilon\kappa} - 2\delta_{\epsilon 0}\delta_{\kappa 0}) p' \cdot p \\
 &\quad - 2E^2\eta^{\epsilon\kappa} (\eta_{\epsilon\kappa} - 2\delta_{\epsilon 0}\delta_{\kappa 0}) p' \cdot p - p'_\epsilon p_\kappa (\eta^{\epsilon\kappa} - 2\delta_0^\epsilon\delta_0^\kappa) p' \cdot p - 2E\delta_0^\kappa p'^\epsilon p'_\epsilon p_\kappa \\
 &\quad - 2E\delta_0^\epsilon p^\kappa p'_\epsilon p_\kappa + 2E^2\eta^{\epsilon\kappa} p'_\epsilon p_\kappa + 2E\delta_{\kappa 0} p'_\epsilon (\eta^{\epsilon\kappa} - 2\delta_0^\epsilon\delta_0^\kappa) p' \cdot p - 2E\delta_{\kappa 0} p'_\epsilon p'^\epsilon p^\kappa \\
 &\quad + 4E^2\delta_{\kappa 0} p'_\epsilon \delta_0^\kappa p'^\epsilon + 4E^2\delta_{\kappa 0} p'_\epsilon \delta_0^\epsilon p^\kappa - 4E^3\delta_{\kappa 0} p'_\epsilon \eta^{\epsilon\kappa} + 2E\delta_{\epsilon 0} p_\kappa (\eta^{\epsilon\kappa} - 2\delta_0^\epsilon\delta_0^\kappa) p' \cdot p \\
 &\quad - 2E\delta_{\epsilon 0} p_\kappa p'^\epsilon p^\kappa + 4E^2\delta_{\epsilon 0} p_\kappa \delta_0^\kappa p'^\epsilon + 4E^2\delta_{\epsilon 0} p_\kappa \delta_0^\epsilon p^\kappa - 4E^3\delta_{\epsilon 0} p_\kappa \eta^{\epsilon\kappa} + 2E^2\eta_{\epsilon\kappa} p'^\epsilon p^\kappa \\
 &\quad \left. - 2E^2\eta_{\epsilon\kappa} (\eta^{\epsilon\kappa} - 2\delta_0^\epsilon\delta_0^\kappa) p' \cdot p - 4E^3\eta_{\epsilon\kappa} \delta_0^\kappa p'^\epsilon - 4E^3\eta_{\epsilon\kappa} \delta_0^\epsilon p^\kappa + 4E^4\eta_{\epsilon\kappa} \eta^{\epsilon\kappa} \right\} \\
 &= \frac{8J^2\kappa^2}{16V^2E_pE_{p'}} \left\{ 2(p' \cdot p)^2 - (p' \cdot p)^2 + 2E^2 p' \cdot p + 2E^2 p' \cdot p - 4E^2 p' \cdot p \right. \\
 &\quad + 2E^2 p' \cdot p - 4E^2 p' \cdot p - 8E^2 p' \cdot p + 4E^2 p' \cdot p - (p' \cdot p)^2 + 2E^2 p' \cdot p + p'^2 p^2 \\
 &\quad - 2E^2 p'^2 - 2E^2 p^2 + 2E^2 p' \cdot p + 2E^2 p' \cdot p - 4E^2 p' \cdot p - 2E^2 p'^2 + 4E^2 p'^2 \\
 &\quad + 4E^4 - 4E^4 + 2E^2 p' \cdot p - 4E^2 p' \cdot p - 2E^2 p^2 + 4E^4 + 4E^2 p^2 - 4E^4 \\
 &\quad \left. - 8E^2 p' \cdot p + 4E^2 p' \cdot p + 2E^2 p' \cdot p - 4E^4 - 4E^4 + 16E^4 \right\} \\
 &= \frac{8J^2\kappa^2}{16V^2E_pE_{p'}} \left\{ 2(p' \cdot p)^2 - 8E^2(p' \cdot p)^2 + p'^2 p^2 + 8E^4 \right\} \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

e dal momento che

$$p^2 = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = 0, \quad p' \cdot p = E^2 (1 - \cos \theta) \tag{B.5}$$

---

allora possiamo concludere dicendo che

$$\begin{aligned}\langle |iS_{fi}^{(1)}|^2 \rangle &= \frac{8J^2\kappa^2}{16V^2E_pE_{p'}} \left\{ 2E^4(1 - \cos\theta)^2 - 8E^4(1 - \cos\theta) + 8E^4 \right\} \\ &= \frac{8J^2\kappa^2}{16V^2E_pE_{p'}} 2E^4(1 + \cos\theta)^2 \\ &= \frac{4\kappa^2}{16V^2E_pE_{p'}} \left( \frac{M\kappa}{2q^2} \right)^2 (2\pi\delta(q_0))^2 16E^4 \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}\tag{B.6}$$

# Bibliografia

- [1] C. Corianò, L. Delle Rose, E. Gabrielli, L. Trentadue, “*Fermion Scattering in a Gravitational Background: Electroweak Corrections and Flavour Transitions*” (2013) arXiv:1312.7657v1.
- [2] E. Golowich, P. S. Gribosky, P.B. Pal, “*Gravitational Scattering of Quantum Particles*” (1989) doi:10.1119/1.16403.
- [3] R. Paszko, “*Teorias Semiclássica e Efettiva da Gravitação*” (2008) arXiv:0801.1835v2.
- [4] S. Weinberg, “*Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*” (1972).
- [5] A. Mason, “*Appunti di Relatività Generale*” (2005).
- [6] J. J. Sakurai, “*Advanced Quantum Mechanics*” (1967).
- [7] G. Bertone, “*Particle Dark Matter*” (2010).
- [8] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, “*Classical Mechanics*” (2001).