

Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 65 - a.a. 2023-2024

Quesito 1 (fino a 12)

Si calcoli il campo elettrico in ogni punto dello spazio prodotto da una distribuzione uniforme di carica di forma sferica con raggio $a=10$ cm e densità volumetrica $\rho = \frac{3}{4}10^{-7}$ C/m³. Si stabilisca

la differenza di potenziale V_{AB} tra un punto che dista 50 cm dal centro della sfera e la superficie della distribuzione sferica: $V_{AB} = \phi(A) - \phi(B) = \phi(r = 50 \text{ cm}) - \phi(r = a)$.

Quanta energia $W_{q_0, A \rightarrow B}$ occorre spendere per spostare una carica puntiforme di valore $q_0 = -10^{-15}$ C dal punto A al punto B ?

Calcolare come cambia la mappa del campo elettrico nello spazio, il lavoro, $W_{q_0, A \rightarrow B}$, la differenza di potenziale V_{AB} se attorno alla distribuzione di carica è collocata uno strato sferico cavo di un materiale conduttore neutro, di piccolo spessore (2 mm), e raggio interno $R_c = 20$ cm. Quale sarà il potenziale elettrostatico a cui si trova il conduttore cavo ?

Partiamo dalla distribuzione di carica sferica con densità uniforme: data la simmetria del problema, il campo elettrico e il potenziale elettrostatico nel punto generico P dipenderanno solo dalla distanza r dal centro di simmetria della distribuzione, cioè il centro della sfera carica di raggio a , in cui collochiamo l'origine di un sistema di coordinate sferiche; l'angolo polare e l'angolo azimutale saranno irrilevanti, ossia

$$\varphi(P) = \varphi(r, \theta, \phi) = \varphi(r); \quad \vec{E}(P) = \vec{E}(r, \theta, \phi) = \vec{E}(r).$$

Inoltre, dal momento che $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r}$, cioè il campo elettrico è diretto come \hat{r} perché

le derivate rispetto a θ e ϕ del potenziale elettrostatico sono nulle.

Allora, sfruttando la simmetria, per calcolare il campo elettrico applichiamo la legge di Gauss il cui enunciato è:

Legge di Gauss: Considerata una superficie chiusa arbitraria Σ il flusso del campo elettrico attraverso Σ è uguale alla quantità di carica totale contenuta all'interno di Σ divisa per la costante dielettrica del vuoto; formalmente abbiamo

$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = Q_{int}(\Sigma)/\epsilon_0$, dove, per definizione,

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} \quad \text{e} \quad Q_{int}(\Sigma) = \int_{V(\Sigma)} dV\rho(r).$$

Allora per valutare il campo in un punto P a $r > a$ (esterno alla distribuzione) scegliamo come superficie Σ attraverso la quale valutare il flusso del campo elettrico una superficie sferica con centro in O e raggio proprio pari a r (distanza del punto P dall'origine). Il calcolo del flusso mi dà

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} E(r)\hat{r} \cdot d\vec{s} \quad \text{Sulla superficie sferica } \Sigma \text{ gli elementini di superficie saranno } d\vec{s} = ds\hat{r}$$

inoltre $E(r)$ è costante su Σ quindi può essere fattorizzato nell'integrale $\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = E(r) \int_{\Sigma} ds =$

$$E(r) 4\pi r^2.$$

$$Q_{int}(\Sigma) = \int_{V(\Sigma)} dV\rho(r) = \rho \int_{V(r < a)} dV$$

perché la densità di carica $\rho(r) = \rho$ per $r < a$, $\rho(r) = 0$ per $r > a$.

Pertanto $Q_{int}(\Sigma) = \rho \frac{4}{3} \pi a^3 = Q_0$ dove con Q_0 si intende la carica totale della distribuzione
 $Q_0 = \rho \frac{4}{3} \pi a^3 = \pi \times 10^{-7} \times 10^{-3} = \pi \times 10^{-10} \text{ C}$.

Applicando l'eguaglianza che viene dalla legge di Gauss abbiamo

$$E(r) 4\pi r^2 = Q_0/\epsilon_0 \Rightarrow E(r) = k \frac{Q_0}{r^2} \hat{r} \text{ dove } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

$$E(r) = k \frac{Q_0}{r^2} \hat{r} = 2.8 \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Per valutare il campo in un punto P a $r < a$ (esterno alla distribuzione) scegliamo come superficie Σ' attraverso la quale valutare il flusso del campo elettrico una superficie sferica con centro in O e raggio proprio pari a r (distanza del punto P dall'origine). Il calcolo formale del flusso da lo stesso risultato del caso precedente: $E(r) 4\pi r^2$. Invece $Q_{int}(\Sigma') = \int_{V(\Sigma')} dV \rho(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$. Quindi si

ha

$$E(r) 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3\epsilon_0} \pi r^3 \Rightarrow$$

$$\vec{E}(r) = \rho \frac{\vec{r}}{3\epsilon_0} = Q_0 \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 a^3} = k Q_0 \frac{\vec{r}}{a^3} = 2.8 \times 10^3 \vec{r}$$

Quindi il campo elettrico e' determinato in ogni punto dello spazio e ha l'andamento:

$$\vec{E} = \begin{cases} k \frac{Q_0}{r^2} \hat{r} = 2.8 \frac{\hat{r}}{r^2} \text{ V/m} & r > a \\ k \frac{Q_0 \vec{r}}{a^2} = 2.8 \times 10^3 \vec{r} \text{ V/m} & r \leq a \end{cases}$$

Si osservi che il campo elettrico all'esterno della distribuzione, come sempre accade in presenza di una distribuzione di carica con simmetria sferica (ossia in cui $\rho = \rho(r)$, la densita' di carica dipende solo dalla distanza dall'origine - si noti che il caso di distribuzione uniforme rientra in questo caso) ha la forma di un campo Coulombiano $k \frac{Q_0}{r^2} \hat{r}$ dove Q_0 e' la carica totale della distribuzione.

Pertanto anche il potenziale elettrostatico all'esterno della distribuzione ha la forma Coulombiana:

$\varphi(r) = k \frac{Q_0}{r} = \frac{2.8}{r} \text{ V}$ per $r > a$. All'interno della distribuzione ($r < a$) il potenziale elettrostatico avra' un'altra espressione.

La differenza di potenziale richiesta $V_{AB} = \phi(A) - \phi(B) = \phi(r = 50 \text{ cm}) - \phi(r = a)$ coinvolge punti esterni (e al limite) della distribuzione di carica, quindi puo' essere calcolata facilmente

$$V_{AB} = \phi(A) - \phi(B) = \phi(r = 50 \text{ cm}) - \phi(r = a) = \frac{2.8}{r_A} - \frac{2.8}{r_B} = \frac{2.8}{0.5} \text{ V} - \frac{2.8}{0.1} \text{ V} = -22.4 \text{ V}$$

Calcoliamo $W_{q_0, A \rightarrow B}$ ricordando che la differenza di potenziale tra il punto A e B e' uguale all'energia che bisogna spendere contro la forza elettrostatica per portare la carica unitaria da A a B. Il potenziale in un punto generico $\phi(P)$ puo' essere inteso come l'energia che bisogna spendere contro le forze del campo per portare la carica unitaria positiva dall'infinito nella posizione P, quindi

$W_{q_0, A \rightarrow B} = q_0 (\phi(B) - \phi(A)) = -10^{-15} \text{ C} \times 22.4 \text{ V} = -22.4 \times 10^{-15} \text{ J}$. Questa energia risulta correttamente negativa, che vuol dire che non ci costa fatica spostare una carica negativa dalla distanza di 50 cm alla distanza di 10 cm dal centro della distribuzione di carica che infatti e' positiva e quindi attrae cariche negative.

Se consideriamo una nuova situazione in cui alla distribuzione di carica aggiungiamo un conduttore cavo concentrico con carica complessiva nulla, la simmetria sferica del sistema si conserva. Chiamati R_i e R_e il raggio interno ed esterno del conduttore cavo, si ottiene facilmente il risultato seguente:

$$\vec{E} = \begin{cases} k \frac{Q_0}{r^2} \hat{r} = 2.8 \frac{\hat{r}}{r^2} \text{ V/m} & r > R_e \\ 0 & R_i < r < R_e \\ k \frac{Q_0}{r^2} \hat{r} = 2.8 \frac{\hat{r}}{r^2} \text{ V/m} & a < r < R_i \\ k \frac{Q_0}{a^2} \vec{r} = 2.8 \times 10^3 \vec{r} \text{ V/m} & r \leq a \end{cases}$$

Perché applicando la legge di Gauss a superfici sferiche di raggio generico nelle 4 regioni di interesse ($r < a$, $a < r < R_i$, r nel conduttore, r esterno al conduttore) la carica totale contenuta nelle superfici sferiche risulta in ogni regione esattamente uguale a quella che si aveva nella prima configurazione (perché il conduttore è neutro) tranne che per r interno al conduttore, dove però sappiamo che il campo è nullo. Quindi l'applicazione della legge di Gauss non può che portare allo stesso campo elettrico della configurazione precedente, tranne la regione $R_i < r < R_e$ dove il campo è nullo. Il potenziale elettrostatico per i punti esterni all'intero sistema sarà Coulombiano,

quindi, come prima, $\phi(r) = k \frac{Q_0}{r} = \frac{2.8}{r} \text{ V}$ per $r > R_e$. Nel conduttore il potenziale elettrostatico sarà uniforme e pari al valore determinato per continuità a $r=R_e$: ossia $\phi_C = k \frac{Q_0}{R_e} = \frac{2.8}{0.202} \text{ V} \approx 13.9 \text{ V}$.

Per $a < r < R_i$ il potenziale avrà nuovamente un andamento di tipo $1/r$ (Coulombiano), in particolare

$$\phi(r) - \phi_C = \int_r^{R_i} \vec{E} \cdot d\vec{l} = kQ_0 \int_r^{R_i} \frac{dr}{r^2} = 2.8 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_i} \right) \text{ V}$$

$$\phi(r) = 13.9 \text{ V} - 2.8/0.2 + \frac{2.8}{r} \text{ V} = -0.1 \text{ V} + \frac{2.8}{r} \text{ V}$$

$$V'_{AB} = \phi'(A) - \phi'(B) = \phi'(r = 50 \text{ cm}) - \phi'(r = a) = \frac{2.8}{r_A} + 0.1 \text{ V} - \frac{2.8}{r_B} \text{ V} = 0.1 \text{ V} + V_{AB} = -22.3 \text{ V}$$

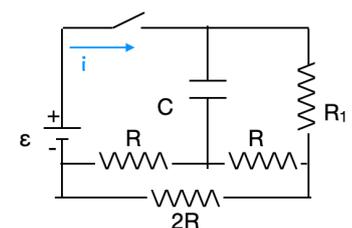
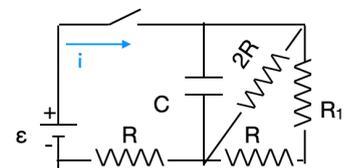
differisce dal risultato del primo caso solo per +0.1 V.

$$W_{q_0, A \rightarrow B} \text{ in questo caso sarà } q_0 (\phi'(B) - \phi'(A)) = -22.3 \times 10^{-15} \text{ J}.$$

Quesito 2 (fino a 12)

Considerati i due circuiti in figura, in cui $R=1 \text{ k}\Omega$ e $R_1=2500 \Omega$, $C=500 \text{ pF}$ e $\epsilon=5 \text{ V}$. Immaginiamo che l'interruttore sia chiuso da molto tempo. si confronti la carica sulle armature del condensatore e l'energia immagazzinata nel condensatore nei due casi.

Assumiamo poi che a un certo istante di tempo i due interruttori siano aperti contemporaneamente, interrompendo i circuiti. Dopo quanto tempo i due condensatori saranno scarichi ?



Nella fase di carica, quando gli interruttori sono chiusi, si raggiunge un regime asintotico in cui nei rami che contengono i condensatori non scorre corrente (possono quindi essere trattati come tratti aperti del circuito).

Nel primo circuito allora la resistenza eq e'

$$R_{eq} = R + \frac{2R(R_1 + R)}{3R + R_1} = 1 \text{ k}\Omega + \frac{2 \times 3500}{5.5} \text{ k}\Omega = 2.27 \text{ k}\Omega \Rightarrow I_g = 2.2 \text{ mA}$$

Nel secondo circuito la resistenza eq e'

$$R'_{eq} = R_1 + \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R_1 + R = 3.5 \text{ k}\Omega \Rightarrow I_g = 1.43 \text{ mA}$$

Nel primo circuito la diff. di potenziale ai capi del condensatore sara'

$V_C = \epsilon - i_g R = 5V - 2.27V = 2.73 \text{ V}$ (basta considerare la maglia formata da generatore condensatore e resistore R e utilizzare il bilanciamento delle differenze di potenziale su tutta la maglia). La carica sulle armature sara' $Q = 0.5 \text{ nF} \times 2.73 \text{ V} = 1.365 \text{ nC}$. L'energia immagazzinata nel condensatore e' $U = (1/2)V_C Q = 1.86 \text{ nJ}$.

Nel secondo circuito $V_C = i_g R_1 + (i_g/2)R = 1.43 \text{ mA} \times (2500 + 500) \Omega = 4.29 \text{ V}$.

La carica sulle armature sara' $Q' = 0.5 \text{ nF} \times 4.29 \text{ V} = 2.145 \text{ nC}$.

L'energia immagazzinata nel condensatore e' $U = (1/2)V_C Q = 4.6 \text{ nJ}$.

Quando gli interruttori vengono aperti, i condensatori si scaricano sulle resistenze si scarica

$$R_s = \frac{2R(R_1 + R)}{3R + R_1} = 1.27 \text{ k}\Omega \text{ e } R'_s = R_1 + \frac{3R \times R}{3R + R} = (2.5 + (3/4)) \text{ k}\Omega = 3.25 \text{ k}\Omega.$$

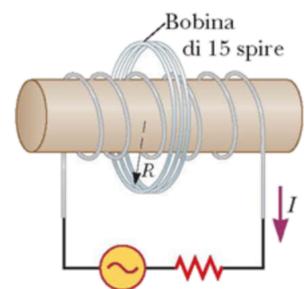
Il tempo di scarica del secondo circuito sara' quindi 2.56 volte piu' lungo del tempo di scarica del

$$\text{primo: } \tau'/\tau = \frac{CR'_s}{CR_s} = 3.25 \text{ k}\Omega / 1.27 \text{ k}\Omega = 2.56.$$

Approssimando il tempo in cui la carica complessiva diventa zero con 5τ , i due condensatori saranno scarichi dopo $5 \times 0.5 \text{ nF} \times 1.27 \text{ k}\Omega = 3.2 \mu\text{s}$ il primo, e dopo $5 \times 0.5 \text{ nF} \times 3.25 \text{ k}\Omega = 8.1 \mu\text{s}$.

Quesito 3 (fino a 12 punti)

Si calcoli il coefficiente di mutua induzione tra la bobina di 15 spire di raggio $R=20 \text{ cm}$ e il solenoide di raggio $R=10 \text{ cm}$ caratterizzato da un numero di spire per unita' di lunghezza $n = 1000/\text{m}$ e una lunghezza $L=20 \text{ cm}$. Si immagini che il solenoide sia collegato a un generatore di f.e.m. variabile nel tempo secondo la legge $\epsilon = V_0 \cos(\omega t)$ con $V_0 = 10 \text{ V}$ e $\omega = 10^3 \text{ s}^{-1}$ attraverso un resistore di valore $R=5\text{k}\Omega$. Si valuti la corrente indotta che scorre nelle spire della bobina di raggio $R=20 \text{ cm}$ chiusa s una resistenza di valore $R_0=50\Omega$.



Calcoliamo il coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti (1=solenoide, 2=bobina) calcolando

$$M_{12} = \Phi_2(\vec{B}_1)/i_1 \text{ oppure } M_{21} = \Phi_1(\vec{B}_2)/i_2.$$

$$\text{Scegliamo } M_{12} = \frac{\mu_0 I n \times N \pi R_s^2}{I} = 4\pi \cdot 10^{-7} \times 1000 \times 15\pi \cdot 0.1^2 = 0.59 \cdot 10^{-3} \text{ H (si noto che il$$

raggio R_s che entra in gioco e' il raggio del solenoide perche' all'esterno del solenoide il campo magnetico, e quindi il suo contributo al flusso concatenato con le spire della bobina, e' nullo).

Nel filamento del solenoide, collegato a una resistenza e ad un generatore di forza elettromotrice oscillante scorrera' una corrente variabile nel tempo in modo oscillante: $I = I_0 \cos(\omega t + \phi_0)$.

Se trascurano l'autoinduttanza del solenoide (si veda la nota [*] in verde),

$I_0 = V_0/R$ e $\phi_0 = 0$ ossia $I = \epsilon/R = V_0 \cos(\omega t)/R$. Il campo magnetico all'interno del

solenoide $\vec{B} = \mu_0 i(t) n \hat{z}$ e' quindi variabile nel tempo e il suo flusso concatenato con la bobina e' anche esso variabile nel tempo.

In particolare abbiamo $i_1(t)M_{12} = \Phi_2(\vec{B}_1)$ e quindi $f.e.m. \text{ indotta} = \epsilon = -\frac{d\Phi_2(\vec{B}_1)}{dt} = -M \frac{di_1(t)}{dt} = -M I_0(-\omega \sin(\omega t + \phi_0)) = MI_0\omega \sin(\omega t + \phi_0)$ con $M = 0.59 \cdot 10^{-3} \text{ H}$.

La pulsazione ω è nota dai dati del problema.

[*] In effetti l'ampiezza della corrente I_0 non è banalmente calcolabile se vogliamo tener conto dell'auto-induttanza del solenoide.

$$L = \frac{\mu_0 I n \times L n \pi R_s^2}{I} = \mu_0 n^2 L \pi R_s^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \times 1000^2 \times 0.2 \times \pi \cdot 0.1^2 = 7.9 \cdot 10^{-3} \text{ H} > M.$$

Nel nostro problema quindi non è trascurabile rispetto a M.

Considerata l'equazione del circuito:

$$\epsilon + \epsilon_{\text{indotta}} = RI(t) \text{ quindi } \epsilon - L \frac{dI}{dt} = RI(t) \text{ si dimostra che}$$

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{ e } \tan \phi_0 = \frac{\omega L}{R}.$$

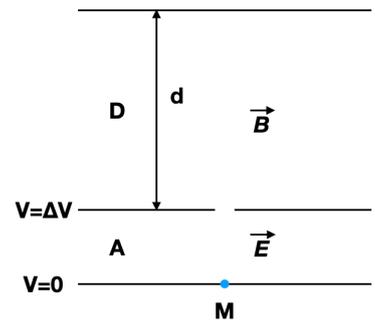
Nel nostro caso $\tan \phi_0 = \frac{\omega L}{R} = 7.9 / 5000 \sim 0 \Rightarrow \phi_0 \simeq 0$ e $I_0 \simeq \frac{V_0}{R}$, quindi possiamo approssimare

$$f.e.m. \text{ indotta} \simeq MI_0\omega \sin(\omega t + \phi_0) = MV_0\omega \sin(\omega t)/R_0 = 0.59 \cdot 10^{-3} \text{ H} \times 10 \text{ V} \times 10^3 \text{ s}^{-1} \sin(t/10^3) = 5.9 \text{ V} \times \sin(t/10^3).$$

La corrente indotta sarà $0.12 \text{ A} \times \sin(t/10^3)$.

Quesito 4 (fino a 12 punti)

Si consideri il dispositivo in figura. Una regione in cui si ha un campo elettrico uniforme accelera particelle di carica unitaria e massa M variabile. Queste successivamente entrano in una regione in cui si ha un campo magnetico uniforme uscente dal piano della figura. Si discuta quanto differiscono i raggi di curvatura (R_1, R_2) di particelle di uguale carica uguale $q_1 = q_2 = |e|$ e massa che differisce del 10% ($M_2 = 1.1 \times M_1$). In particolare si valuti il rapporto R_2/R_1 .



Si stabilisca quale deve essere il segno di q_1 e q_2 se $\Delta V > 0$. Si stabilisca anche il verso della curvatura delle traiettorie nel campo magnetico: con riferimento alla figura, le traiettorie delle particelle cariche curveranno verso destra o verso sinistra ?

Le cariche sotto l'effetto del campo elettrico acquistano una energia pari a $E_p^{\text{iniziale}} + E_k^{\text{iniziale}} = q_i \Delta V + E_k^{\text{finale}}$. Si noti che le particelle sono accelerate se la loro carica è negativa, visto che $\Delta V > 0$. Definiamo sul piano della figura un sistema cartesiano con origine al centro della fessura che consente il passaggio delle particelle nella regione in cui c'è campo magnetico, asse x orizzontale che punta verso destra e asse y verticale che punta verso l'alto. La forza di Lorentz a cui sono soggette all'ingresso nella regione in cui abbiamo il campo magnetico ($\vec{F}(0,0) = q_i v \hat{y} \wedge B \hat{z} = q_i v B \hat{x}$) è quindi diretta in direzione come $-\hat{x}$, quindi le particelle percorreranno traiettorie circolari (con centro di curvatura sull'asse x) curvando verso sinistra. Il raggio di curvatura è dato dalla relazione seguente in cui l'accelerazione centripeta è eguagliata alla forza di Lorentz.

$$m v^2 / R = q_i v B, \text{ quindi } \frac{m_i v_i}{q_i B} = R_i.$$

$$\text{Inoltre } \frac{1}{2} m_i v_i^2 = q_i \Delta V, \text{ da cui } v_i = \sqrt{\frac{2 q_i \Delta V}{m_i}}.$$

Allora $\frac{m_i v_i}{q_i B} = R_i = \sqrt{\frac{2\Delta V m_i}{q_i B^2}}$

Quindi $R_2/R_1 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \sim 1.05$

Quesito 5 (fino a 8 punti)

Si discuta **solo uno** degli argomenti elencati:

- 1) Il fenomeno dello schermo elettrostatico.
- 2) Le condizioni di continuità e discontinuità del campo elettrico nell'attraversamento di uno strato superficiale di carica. Si discutano le implicazioni per i conduttori all'equilibrio elettrostatico.
- 3) Si enunci la legge di Faraday Neumann ed esempi di applicazione.
- 4) Si discuta la legge di Ampere e i suoi limiti.

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \hat{z}$	$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right) \hat{z}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)\right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \hat{\phi}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho} + d\rho dz \hat{\phi} + \rho d\rho d\phi \hat{z}$	$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$
Volume infinitesimo	$dv = dx dy dz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Operatori differenziali ed elementi di linea, superficie e volume in coordinate cartesiane (sinistra), cilindriche (centro) e sferiche (destra).

$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{F/m}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}$,

$k = 1/(4\pi \epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$

$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{Kg}$, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{Kg}$, $M_{\text{He}} \approx 4 m_p$; $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$

Campo \vec{E} prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2} \hat{r}$

Campo \vec{E} e potenziale $\varphi(r, \vartheta)$ di dipolo: $\vec{E}(r, \vartheta) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}$; $\varphi(r, \vartheta) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Campo \vec{B} prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r, \vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$;

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} dV$; $d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} dV$