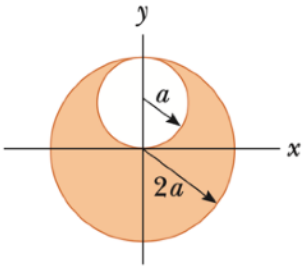
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 66 - a.a. 2023-2024

Quesito 1 (fino a 12)
Una sfera di raggio 2a fatta di materiale non conduttivo ha una densità volumetrica di carica uniforme ρ. Assumiamo che il materiale non abbia alcuna influenza sul campo elettrico. Una cavita' sferica di raggio a e' ricavata all'interno della sfera nella posizione illustrata in figura.
Si dimostri che il campo elettrico all'intero della cavita' e' pari a $\vec{E} = \frac{\rho a}{3\epsilon_0}\hat{y}$.



La distribuzione di carica in esame puo' essere considerata come la sovrapposizione di una sfera uniformemente carica con densita' ρ e raggio 2a con centro nell'origine e una sfera di densità -ρ e raggio a con centro nel punto di coordinate (0,a,0). Per il principio di sovrapposizione, in ogni punto all'interno della cavita' il campo elettrico puo' essere calcolato come la sovrapposizione dei due campi dovuto alle sue sfere uniformemente cariche, ciascuno valutato per una distanza dal centro della sfera minore del raggio della sfera.
Partiamo quindi dalla distribuzione di carica sferica con densita' uniforme: data la simmetria del problema, il campo elettrico e il potenziale elettrostatico nel punto generico P dipenderanno solo dalla distanza r dal centro di simmetria della distribuzione, cioè il centro della sfera carica di raggio, in cui collochiamo l'origine di un sistema di coordinate sferiche; l'angolo polare e l'angolo azimutale saranno irrilevanti, ossia
$\varphi(P) = \varphi(r,\theta,\phi) = \varphi(r)$; $\vec{E}(P) = \vec{E}(r,\theta,\phi) = \vec{E}(r)$.
Inoltre, dal momento che $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r}$, cioè il campo elettrico e' diretto come $\hat{r}$ perche' le derivate rispetto a θ e ϕ del potenziale elettrostatico sono nulle.
Allora, sfruttando la simmetria, per calcolare il campo elettrico applichiamo la legge di Gauss il cui enunciato e':
Legge di Gauss: Considerata una superficie chiusa arbitraria Σ il flusso del campo elettrico attraverso Σ è uguale alla quantità di carica totale contenuta all'interno di Σ divisa per la costante dielettrica del vuoto; formalmente abbiamo
$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = Q_{int}(\Sigma)/\epsilon_0$**, dove, per definizione,**
$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E}(r)\cdot d\vec{s}$ e $Q_{int}(\Sigma) = \int_{V(\Sigma)} dV\rho(r)$.

Allora per valutare il campo in un punto P a r<Raggio della distribuzione (interno alla distribuzione) scegliamo come superficie Σ attraverso la quale valutare il flusso del campo elettrico una superficie sferica con centro in O e raggio proprio pari a r (distanza del punto P dall'origine). Il calcolo del flusso mi da $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma E(r)\hat{r}\cdot d\vec{s}$ Sulla superficie sferica Σ gli elementini di superficie saranno $d\vec{s} = ds\hat{r}$ inoltre $E(r)$ e' costante su Σ quindi puo' essere fattorizzato nell'integrale $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = E(r)\int_\Sigma ds = E(r)\ 4\pi r^2$.
$Q_{int}(\Sigma) = \int_{V(\Sigma)} dV\rho(r) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$. Quindi si ha
$E(r)\ 4\pi r^2 = \rho\frac{4}{3\epsilon_0}\pi r^3 \Rightarrow$

$\vec{E}(r) = \rho \frac{\vec{r}}{3\epsilon_0}$

Applicando questo risultato alle due distribuzioni sferiche e sommando abbiamo:

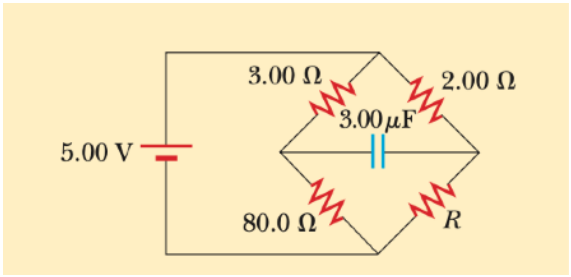
$\vec{E}_{cav} = \rho \frac{\vec{r}}{3\epsilon_0} + (-\rho)\frac{\vec{r'}}{3\epsilon_0}$ dove $\vec{r}$ e' la distanza di un punto della cavita' dal centro della sfera di raggio 2a e $\vec{r'}$ e' la distanza dello stesso punto dal centro della cavita'. Osserviamo che, chiamato $\vec{a} = a\hat{y}$ il vettore che descrive la posizione del centro della cavita' nel sistema di riferimento generale (con origine nel centro della sfera di raggio 2a), si ha

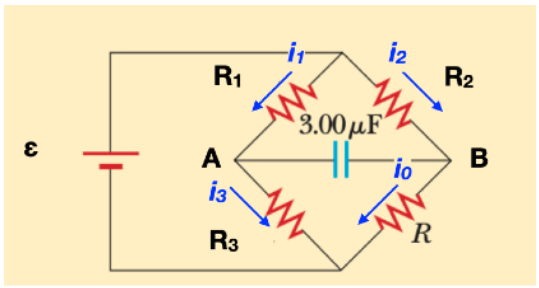
$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r'} \rightarrow \vec{a} = \vec{r} - \vec{r'}$.

Quindi $\vec{E}_{cav} = = \frac{a\rho\hat{y}}{3\epsilon_0}$.

***Quesito 2* (fino a 12)**

Si consideri il circuito in figura. Si determini la carica sulle armature del condensatore in funzione di R. Quando vale la carica quando R = 10 Ω. La carica del condensatore puo' essere zero ? In caso di risposta affermativa, per quale valore di R ? Inoltre quale e' il massimo valore della carica sulle armature del condensatore e per quale valore di R lo si ottiene. Sperimentalmente ha senso considerare il limite di $R \rightarrow \infty$. Quale sarebbe la carica sulle armature del condensatore in questo limite ?





In generale a regime il condensatore e' carico e nel ramo in cui esso e' collocato non scorre corrente. Chiamiamo la differenza di potenziale tra le armature $\Delta V = \varphi(A) - \varphi(B)$. Abbiamo quindi

$i_2 = i_0$, $i_1 = i_3$, e quindi $i_1(R_1 + R_3) = i_2(R_2 + R)$

Quindi $\Delta V = \varphi(A) - \varphi(B) =$

$i_2R_2 - i_1R_1 = i_3R_3 - i_0R = i_2R_2 - R_1i_2\frac{R_2 + R}{R_1 + R_3} =$

$i_2\frac{R_1R_2 + R_2R_3 - R_1R_2 - R_1R}{R_1 + R_3}$. Inoltre abbiamo

$\epsilon = R_{eq}i_g$ con $i_g = i_1 + i_2 = i_2\left(\frac{R + R_2 + R_1 + R_3}{R_1 + R_3}\right)$.

$R_{eq} = \frac{(R + R_2)(R_1 + R_3)}{R + R_1 + R_2 + R_3}$

Allora $\epsilon = R_{eq}i_2\left(\frac{R + R_2 + R_1 + R_3}{R_1 + R_3}\right) = i_2\frac{(R + R_2)(R_1 + R_3)}{R + R_1 + R_2 + R_3}\frac{R + R_2 + R_1 + R_3}{R_1 + R_3} =$

$i_2\frac{(R + R_2)(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3}$

Quindi $i_2 = \epsilon\frac{R_1 + R_3}{(R + R_2)(R_1 + R_3)}$

Quindi $\Delta V = \varphi(A) - \varphi(B) = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 - R_1R_2 - R_1R}{R_1 + R_3}\ \epsilon\frac{R_1 + R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + RR_1 + RR_3} =$

$\epsilon \dfrac{R_2R_3 - R_1R}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R + R_1R}$

Infine $Q(R) = C\ \Delta V(R)$.

Si ha $Q = C\epsilon \dfrac{R_2R_3 - R_1R}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R + R_1R} = 15 \times 10^{-6} \dfrac{160 - 3R}{166 + 83R}$ e quindi quando R=10 Ω,

$15 \times 10^{-6} \dfrac{160 - 30}{6 + 160 + 800 + 30}$ = 1.96 x 10^{-6} C.

La carica sul condensatore puo' essere zero se $R = \dfrac{R_2R_3}{R_1} = 53.3\ \Omega$.

Inoltre la carica e' $Q(R = 0) = 14.45 \times 10^{-6}$ C, e $Q(R = +\infty) = -0.54 \times 10^{-6}$ C.
Analizzando la delicata di Q rispetto a R si vede che non e' mai nulla ma anzi sempre negativa => la carica decresce sempre al crescere di R. Pertanto la carica massima (sull'armatura A) si ha per R=0 e vale $Q(R = 0) = 14.45 \times 10^{-6}$ C. Il limite di $R \to \infty$ corrisponde ad interrompere il ramo in cui abbiamo R in tal caso al carica e' minima (negativa sull'armatura A) e pari a $Q(R = +\infty) = -0.54 \times 10^{-6}$ C.

Quesito 3 (fino a 12)

Nel modello di Niels Bohr's del 1913 dell'atomo di Idrogeno, il singolo elettrone si muove su un'orbita circolare di raggio 5.29 x 10^{-11} m con velocita' 2.19 x 10^6 m/s. Assumendo che il moto avvenga in senso antiorario qual e' la grandezza, direzione e verso del momento magnetico dovuto al moto dell'elettrone ? Qual e' il valore del campo magnetico al centro dell'atomo ?

Il momento magnetico associato al moto dell'elettrone e' quello corrispondente alla spira circolare di raggio pari al raggio dell'orbita dell'e- percorsa dalla corrente data dal moto circolare dell'elettrone: $\vec{m} = I\vec{S}$ con $\vec{S} = \pi r_e^2 \hat{n}$

$|I| = |e|/T$ con T periodo del moto circolare uniforme dell'elettrone quindi

$|I| = |e|/(2\pi r_e/v) = \dfrac{|e|v}{2\pi r_e}$

Se assumiamo che moto avvenga in direzione antioraria allora la chiamato z l'asse perpendicolare al piano, passante per la posizione del nucleo atomico, attorco a cui si avvolge in modo antiorario la traiettoria dell'elettrone allora fissiamo $\hat{n} = \hat{z}$. La corrente che scorre in senso antiorario e negativa, quindi

$$\vec{m} = I\vec{S} = -\frac{|e|v}{2\pi r_e}\pi r_e^2 \hat{z} = -\frac{|e|vr_e}{2}\hat{z}.$$

$$|\vec{m}| = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 2.19 \times 10^6 \times 5.29 \times 10^{-11}}{2}$$ = 9.3 x 10^{-24} A m^2.

Il campo magnetico al centro dell'atomo e' prodotto da una spira circolare γ percorsa dalla corrente $I = -\dfrac{|e|v}{2\pi r_e}$. Quindi un tratto $d\vec{l} = dl\hat{\phi} = r_e d\phi\hat{\phi}$ della spira γ

contribuisce al campo magnetico con il termine $d\vec{B}(O) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I \dfrac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$ dove $\vec{r} = -r_e\hat{r}$

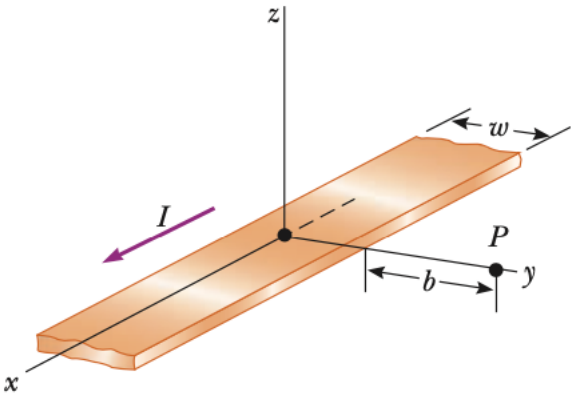
e' il vettore con origine nel tratto di linea del circuito che raggiunge l'origine O in cui e' collocato il protone.

Quindi $\vec{B}(O) = -\oint_\gamma \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl\hat{\phi} \wedge r_e\hat{r}}{r_e^3}$. Dal momento che $\hat{\phi} \wedge (-\hat{r}) = \hat{z}$ si ha

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I\hat{z}}{4\pi}\oint_\gamma \frac{dl}{r_e^2} = \frac{\mu_0 I\hat{z}}{4\pi r_e^2}\oint_\gamma dl = \frac{\mu_0 I\hat{z}}{4\pi r_e^2}\, 2\pi r_e = \frac{\mu_0 I}{2r_e}\hat{z} = \frac{\mu_0 |e| v}{4\pi r_e^2}\hat{z}$$

Quesito 4

Si calcoli il campo magnetico nel punto P assumendo che la striscia metallica sottile (di spessore trascurabile) in figura sia percorsa da una corrente I.



La striscia conduttrice puo' essere schematizzata come la successione di infiniti fili metallici di lunghezza infinita. Il campo in P e' la sovrapposizione dei campi magnetici di Biot Savard prodotti da ciascuno di questi fili in cui scomponiamo la striscia quindi
Il singolo tratto infinitesimo della striscia di larghezza dy e' percorso da una corrente

idy tale che $\int_{-w/2}^{w/2} idy = iw = I.$

Quindi il singolo tratto infinitesimo (corrispondente a un filo) in posizione y (con $-w/2 < y < w/2$) produce il P il campo magnetico

$$d\vec{B}(y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b + w/2 - y)}\hat{z} = \frac{\mu_0 (I/w)dy}{2\pi(b + w/2 - y)}\hat{z}.$$

Quindi

$$\vec{B}(P) = \int_{-w/2}^{w/2} \frac{\mu_0 (I/w)dy}{2\pi(b + w/2 - y)}\hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi w}\int_{-w/2}^{w/2} \frac{-2\pi dy}{2\pi(b + w/2) - 2\pi y}\hat{z} =$$

$$-\frac{\mu_0 I\hat{z}}{2\pi w}\ln\Big(2\pi(b + w/2) - 2\pi y\Big)\Big|_{-w/2}^{w/2} = -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{2\pi w}\ln\frac{2\pi b + \pi w - \pi w}{2\pi b + \pi w + \pi w} = -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{2\pi w}\ln\frac{b}{b + w} =$$

$$\frac{\mu_0 I\hat{z}}{2\pi w}\ln\frac{b + w}{b}$$

Quesito 5

Si calcoli in funzione dei parametro geometrici del sistema, indicati in figura, l'auto-induttanza per unita' di lunghezza di un cavo coassiale.
Il cavo coassiale (di cui in figura 5.1 e' rappresentato un tratto) e' un sistema di due conduttori infinitamente lunghi, un filo centrale e una guaina cilindrica conduttrice coassiale al filo. Filo e guaina sono separati da un mezzo isolante (immaginiamo il vuoto). I due conduttori sono percorsi dalla stessa corrente in versi opposti, perche' ad una estremità' del cavo essi sono collegati tra di loro a un resistore e dall'altra attraverso un generatore di f.e.m. La schematizzazione come circuito elettrico e' illustrata in

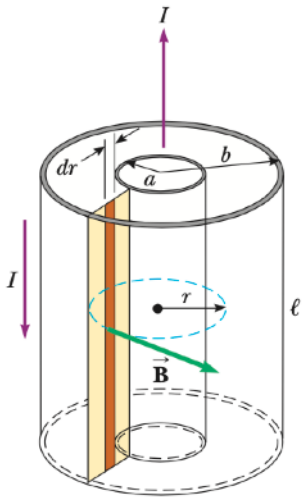


Fig 5.1: Cavo coassiale

Fig. 5.2.

Il cavo coassiale e' un sistema a simmetria cilindrica in cui campo magnetico e potenziale vettore dipenderanno solo dalla distanza r dall'asse (che chiamiamo z, orientato nel verso della corrente che scorre nel filo interno) della struttura cilindrica delle sorgenti. Quindi potremo applicare la legge di Ampere sfruttando le simmetrie del sistema per calcolare il campo magnetico.

Quindi $\vec{A} = A(r)\hat{z}$ (il potenziale vettore e' sempre parallelo alle correnti sorgenti del campo magnetico) e $\vec{B} = \vec{B}(r) = B(r)\hat{\phi}$ (le linee di campo del campo magnetico si avvolgono attorno alle sorgenti secondo la regola della mano destra).

L'enunciato generale della legge di Ampere dice che dato un percorsi chiuso γ arbitrario, la circuitazione del campo magnetico su γ e'

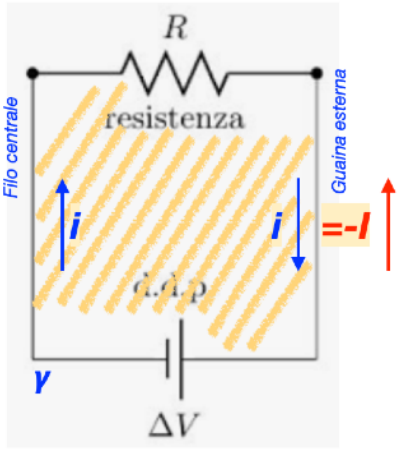


Fig. 5.2: schema elettrico equivalente del cavo coassiale, collegato a un generatore e a un resistore

$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o i_{c_\gamma}$ **dove** i_{c_γ} **e' la corrente concatenata con il circuito γ, ossia per definizione,**

$i_{c_\gamma} = \int_{\Sigma_\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{s}$ dove Σ_γ e' una superficie aperta arbitraria che ha come bordo la curva γ e $\vec{J}$ e' il vettore densità di corrente.

Allora per calcolare il campo magnetico in un punto generico P dello spazio che dista r dall'asse del sistema, scegliamo come γ la circonferenza di raggio r a cui appartiene il punto P contenuta nel piano perpendicolare all'asse z. Orientata γ in senso antiorario si ha

$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_\gamma B(r)\hat{\phi} \cdot dl\hat{\phi}$ Dal momento che B(r) e' costante su tutti i punti della circonferenza (caratterizzati appunto dal farro che r e' uguale per tutti) possiamo fattorizzarlo nell'integrale e ottenere $\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(e)\oint_\gamma dl = B(r)\ 2\pi r.$

$$i_{c_\gamma} = \begin{cases} i - i = 0 & r > b \\ i & a < r < b \\ i/(\pi a^2)\pi r^2 = ir^2/a^2 & r < a \end{cases}$$

Allora

$$B(r)\ 2\pi r = \begin{cases} 0 & r > b \\ \mu_0 i & a < r < b \\ \mu_0 i r^2/a^2 & r < a \end{cases}$$ quindi

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} 0 & r > b \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi} & a < r < b \\ \frac{\mu_0 i r}{2\pi a^2}\hat{\phi} & r < a \end{cases}$$

L'auto induttanza e' definita come $L = \Phi_\gamma(\vec{B})/i$ dove i e' la corrente che scorre nel circuito γ e il $\vec{B}$ e' il campo magnetico prodotto da questa corrente. Il flusso del campo magnetico che entra in gioco nella formula e' il flusso concatenato con γ ossia attraverso un qualunque superficie aperta che ha come bordo γ.

Qual e' quindi in questo caso il circuito γ ? In figura c'e' una rappresentazione del circuito corrispondente al cavo coassiale che e' utilizzato per connettere un generatore di f.e.m. a un dispositivo che dissipa potenza. In figura 5.2 l'area tratteggiata, ossia tutta la superficie piana che ha come bordo il circuito γ corrisponde al rettangolo giallo di Fig. 5.1 che ha un lato di lunghezza infinita e l'altro di lunghezza b-a.

Il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito e' il flusso del campo magnetico tra i due conduttori quindi calcoliamo

$$iL = \Phi_\gamma(\vec{B}) = \int_{\Sigma_\gamma} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma_\gamma} B(r)\hat{\phi}\cdot dr dz\hat{\phi} = \int_z^{z+l} dz \int_{r=a}^{r=b} dr \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}$$

Perche' Σ_γ = porzione del piano rz tale che $a < r < b$, $z_0 < z < z_0 + l$ con z_0 arbitrario e l = lunghezza del cavo coassiale.

Quindi $L = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_z^{z+l} dz \int_{r=a}^{r=b} dr \frac{1}{r} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$.

In definitiva l'autoinduttanza per unita' di lunghezza e' data da $L/l = = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

Quesito 6 (fino a 8 punti)

Si discuta ***solo uno*** degli argomenti elencati:

1) Relazione tra la seconda formula di Laplace e l forza di Lorentz.
2) Caratteristiche del campo elettrico e del potenziale prodotti da un dipolo elettrico.
3) Equivalenza tra dipolo magnetico e spira percorsa da corrente.
4) Campo magnetico in un solenoide toroidale.

	Cartesiane	Cilindriche	Sferiche
Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla\cdot\mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla\times\mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}} +$ $(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}} +$ $(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi})\hat{\mathbf{r}} +$ $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz\hat{\mathbf{x}} +$ $dxdz\hat{\mathbf{y}} +$ $dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}} +$ $r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dxdydz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

Operatori differenziali ed elementi di linea, superficie e volume in coordinate cartesiane (sinistra), cilindriche (centro) e sferiche (destra).

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\, m_p$; $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ mol^{-1}

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ e potenziale $\varphi(r,\vartheta)$ di dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$; $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\,dV$