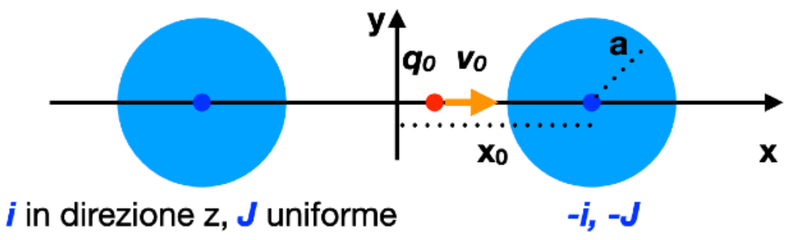
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 67 - a.a. 2023-2024

Quesito 1 (fino a 12)



Due fili conduttori rettilinei infiniti e paralleli sono mostrati in sezione in figura. I fili sono percorsi da una densità' di corrente uniforme nei due versi opposti per una corrente totale uguale e opposta.
Si calcoli, in funzione della coordinata x, il modulo (e si stabilisca la direzione e verso) della forza che agisce su una carica puntiforme che (per effetto di forze esterne) si muove sull'asse x con velocità costante v_0. In particolare di valuti il campo magnetico complessivo e la forza sulla carica nei seguenti punti appartenenti all'asse x:

P_1 di coordinata $\mathrm{x} = -\mathrm{x}_0 - 2\mathrm{a}$,
P_2 di coordinata $\mathrm{x} = -\mathrm{x}_0$
P_3 di coordinata $\mathrm{x} = 0$
P_4 di coordinata $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$
P_5 di coordinata $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + 2\mathrm{a}$

La forza su una carica puntiforme in moto è data dalla forza di Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Quindi per rispondere alla domanda posta nel problema $\vec{F} = q_0 v_0 \hat{x} \wedge B(x)\hat{y}$. Infatti in ogni punto dell'asse x il campo magnetico, somma dei campi magnetici prodotti da due distribuzioni a simmetria cilindrica di corrente ciascuno con linee di campo che sono circonferenze coassiali con il cilindro di corrente, è diretto come $\hat{y}$. Consideriamo il campo prodotto dal singolo filo a sinistra in figura percorso dalla corrente complessiva i che e' data da $i = \int_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma J\hat{z} \cdot ds\hat{z} = J\pi a^2$.
Quindi la densità di corrente uniforme J=i/(π a^2). Usando un sistema di coordinate cilindriche che ha asse coincidente cn l'asse del cilindro e applicando la legge di Ampere a un circuito γ circolare di maggio r nel piano xy con centro sull'asse del cilindro si ha

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{c_\gamma}.$$

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi B(r) \qquad \text{e} \qquad \mu_0 i_{c_\gamma} = \begin{cases} \mu_0 \pi r^2 J = \mu_0 r^2 i/a^2 & r < a \\ \mu_0 i & r \geq a \end{cases}$$

quindi $\vec{B}_1 = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 r i}{2\pi a^2}\hat{\phi} & r < a \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi} & r \geq a \end{cases}$.

Il campo dovuto al filo a destra, espresso nel sistema di coordinate cilindriche con asse coincidente x=x0, y=0 e' $\vec{B}_2 = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 r i}{2\pi a^2}\hat{\phi} & r < a \\ -\dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi} & r \geq a \end{cases}$

Limitandoci ai punti dell'asse x e tornando a esprimere i due contributi al campo nel sistema di riferimento complessivo in figura si ha

$\overrightarrow{B}_1 = \begin{cases} \frac{\mu_0(x+x_0)i}{2\pi a^2}\hat{y} & -x_0 - a < x < -x_0 + a \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi(x+x_0)}\hat{y} & x \le -x_0 - a \text{ e } x \ge -x_0 + a \end{cases}$. Per il campo prodotto dall'altro filo si ha

$$\overrightarrow{B}_2 = \begin{cases} -\frac{\mu_0(x-x_0)i}{2\pi a^2}\hat{y} & x_0 - a < x < x_0 + a \\ -\frac{\mu_0 i}{2\pi(x-x_0)}\hat{y} & x \le x_0 - a \text{ e } x \ge x_0 + a \end{cases}$$

Quindi nel punto P_1 si ha

$\overrightarrow{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi(x+x_0)}\hat{y} = \frac{\mu_0 i}{2\pi(-x_0-2a+x_0)}\hat{y} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi a}\hat{y}$ diretto verso il basso e

$\overrightarrow{B_2} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi(x-x_0)}\hat{y} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi(-x_0-2a-x_0)}\hat{y} = \frac{\mu_0 i}{4\pi(x_0+a)}\hat{y}$ diretto verso l'alto ma di modulo piu' piccolo rispetto a $\overrightarrow{B}_1$, quindi il campo complessivo

$\overrightarrow{B}(P_1) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\hat{y}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x_0+a}\right) = -\frac{\mu_0 i x_0}{4\pi a(x_0+a)}\hat{y}$;

La forza sulla carica sara' $\overrightarrow{F}(P_1) = -\frac{q_0 v_0 \mu_0 i x_0}{4\pi a(x_0+a)}\hat{z}$ (perpendicolare al piano della figura, verso entrante).

$\overrightarrow{B}(P_2) = \overrightarrow{B}_2(P_2) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi(x-x_0)}\hat{y} = \frac{\mu_0 i}{4\pi x_0}\hat{y}$ perche' $\overrightarrow{B}_1(P_2)$ e' nullo.

$\overrightarrow{F}(P_2) = \frac{q_0 v_0 \mu_0 i}{4\pi x_0}\hat{z}$ (perpendicolare al piano della figura, verso uscente).

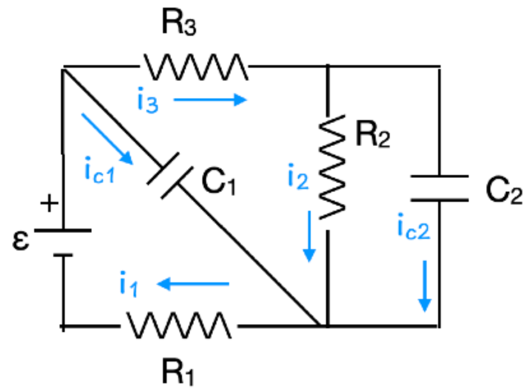
$\overrightarrow{B}(P_3) = 2\frac{\mu_0 i}{2\pi x_0}\hat{y} = \frac{\mu_0 i}{\pi x_0}\hat{y}$ perche' $\overrightarrow{B}_1(P_3)$ e $\overrightarrow{B}_2(P_3)$ sono uguali e concordi.

$\overrightarrow{F}(P_3) = \frac{q_0 v_0 \mu_0 i}{\pi x_0}\hat{z}$.

$\overrightarrow{B}(P_4) = \overrightarrow{B}_1(P_4) = \frac{\mu_0 i}{4\pi x_0}\hat{y}$ perche' $\overrightarrow{B}_2(P_4)$ e' nullo.

$\overrightarrow{B}(P_5) = \overrightarrow{B}(P_1) = -\frac{\mu_0 i x_0}{4\pi a(x_0+a)}\hat{y}$; la componente del campo B sull'asse y risulta una funzione pari si x: B(-x) = B(x). Di conseguenza $\overrightarrow{F}(P_5) = \overrightarrow{F}(P_1)$ e $\overrightarrow{F}(P_4) = \overrightarrow{F}(P_2)$.

Quesito 2 **(fino a 12)**
Si consideri il circuito in figura. Si determini la carica sulle armature dei condensatori a regime.
Si stabilisca poi l'andamento nel tempo della carica sulle armature di C2 a partire da un istante di tempo t0 in cui il resistore R3 ed il generatore sono sostituiti da interruttori aperto. Si consideri il bilancio energetico a partire da t0 nella maglia che contiene il condensatore C2.
Siano R1=1 kΩ, R2=500 Ω, R3=2 kΩ,
C1= 100 pF, C2 = 0.3 nF, ε=5 V.



A regime il circuito e' equivalente a una singola maglia con le resistenze 3,2 e 1 in serie => c'e' un'unica corrente di valore

$$i_3 = i_2 = i_1 = \frac{\epsilon}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{5\ \mathrm{V}}{(1000 + 500 + 2000)\Omega} = 1.43\ \mathrm{mA}.$$

La ddp ai capi di C1 e' $\Delta V_1 = i(R_2 + R_3) = 1.43\ 10^{-3} \times 2.5\ 10^3\ \mathrm{V} = 3.6\ \mathrm{V}$. Quindi la carica accumulata sulle armatore di C1 sara'

$$Q_1 = C_1 \Delta V_1 = 100\ \mathrm{pF} \times 3.6\mathrm{V} = 360\ \mathrm{pC}.$$

La ddp ai capi di C2 e' $\Delta V_2 = iR_2 = 1.43\ 10^{-3} \times 0.5\ 10^3\ \mathrm{V} = 0.715\ \mathrm{V}$. Quindi la carica

$$Q_2 = C_2 \Delta V_2 = 300\ \mathrm{pF} \times 0.715\mathrm{V} = 214\ \mathrm{pC}.$$

Quando R3 e il generatore vengono rimossi e sostituiti con interruttori aperti nella maglia chiusa composta da R2 e C2 non ci sono sorgenti di f.e.m. e il condensatore C2 si scarica sulla resistenza C2. L'energia inizialmente accumulata nel condensatore e'

$$U_{2_i} = \frac{Q_2^2}{2C_2} = 2.14^2 \times 10^4 \times 10^{-24}/(2 \times 3 \times 10^{-10})\ \mathrm{J} = 0.77 \times 10^{-10}\ \mathrm{J}$$

L'andamento nel tempo della corrente nel circuito di scarica sara' descritta dall'equazione

$$\Delta V_2(t) = \frac{Q_2(t)}{C_2} = \frac{Q_{2_i}}{C_2} - \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} dt' i(t') = R_2 i(t).$$

Al tempo t=t0 si ha $\frac{Q_{2_i}}{C_2} = R_2 i(t_0)$ quindi $i(t_0) = \frac{Q_{2_i}}{R_2 C_2} = \frac{214\ \mathrm{pC}}{150\ \mathrm{ns}} = 1.43\ \mathrm{mA}$. La soluzione dell'eq sara' un esponenziale decrescente $i(t - t_0) = i(t_0)e^{-(t-t_0)/\tau_2}$ con $\tau_2 = R_2 C_2 = 150 \times 10^{-9}$ s.
L'energia dissipata su R2 e'

$$E_{Joule_2} = \int_{t_0}^{\infty} dt R_2 i^2(t) = E_{Joule_2} = R_2 i^2(t_0)\left(-\frac{R_2 C_2}{2} e^{-\frac{2(t-t_0)}{R_2 C_2}}\right)\Bigg|_{t_0}^{\infty} = R_2 i^2(t_0)\frac{R_2 C_2}{2}.$$

Sostituendo a $i(t_0)$ la su espressione in termini di carica iniziale accumulata sulle armature deo condensatore $i(t_0) = \frac{Q_{2_i}}{R_2 C_2}$ si ottiene $E_{Joule_2} = U_{2_i} = \frac{Q_2^2}{2C_2}$.

Quesito 3 (fino a 12)

Si calcoli il campo elettrico e/o il potenziale elettrostatico sui punti dell'asse indicato in figura assumendo che il piano, con un foro al centro di raggio a, sia infinitamente esteso e su di esso sia depositata carica elettrica con densità superficiale σ >0. Si discuta l'esistenza di punti di equilibrio stabile e instabile per una carica puntiforme q_0 posizionata lungo l'asse.

Il potenziale e il campo elettrico sull'asse possono essere ottenuto come sovrapposizione dei campi (φ_p, $\overrightarrow{E}_p$) prodotti da un piano infinito con densità superficiale σ e dei campi (φ_d, $\overrightarrow{E}_d$) prodotti da un disco di raggio a con densità superficiale di carica -σ. Chiamato asse z l'asse su cui si vogliono determinare i campi si ha che

$$\overrightarrow{E}_p = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z < 0 \end{cases}$$

Inoltre, fissato arbitrariamente il potenziale nulla a z=0, si ha

$$\varphi(z > 0) - \varphi(z = 0) = -\int_0^{z>0} dz\hat{z} \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} \rightarrow \varphi(z > 0) = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}$$

$$\varphi(z < 0) - \varphi(z = 0) = \int_{z<0}^{0} dz\hat{z} \cdot \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} \rightarrow \varphi(z < 0) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}$$

Quindi $\varphi(z) = -\frac{\sigma|z|}{2\epsilon_0}$ in ogni punto dello spazio.

Il potenziale prodotto da un disco uniformemente carico (con densità di carta superficiale uniforme e dal valore generico σ) sui punti dell'asse dipende solo da z e puo' essere considerato come la somma di contributi di anelli infinitesimi di raggio variabile tra 0 e a, a cui compete una densità' di carica lineare λ tale che λ 2π r = σ 2π r dr , quindi λ = σ dr.

Il potenziale prodotto dall'anello in un punto generico alla coordinata z si ottiene integrando i contributo colombiani di archi infinitesimali contenuti la carica λ r dϕ, quindi

$$\varphi(z)_{anello} = \int_0^{2\pi} k\frac{dq}{r} = \int_0^{2\pi} k\frac{\lambda r d\phi}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{k(\sigma dr)r}{\sqrt{r^2+z^2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi k\sigma r dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\varphi(z)_d = 2\pi k\sigma\int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi k\sigma\sqrt{r^2+z^2}\Big|_0^a =$$

$$2\pi k\sigma\left(\sqrt{a^2+z^2} - |z|\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{a^2+z^2} - |z|\right)$$

Il campo elettrico dovuto al disco, su cui esista una densita' di carica uniforme dal valore generico σ, sarà per simmetria diretto come z e dipenderà' solo da z (nei punti dell'asse) quindi possiamo calcolarlo come

$$\vec{E}_d = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z} = -2\pi k\sigma\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - z/|z|\right)\hat{z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\hat{z}.$$

Al disco occorre attribuire una densità' superficiale di carica -σ, quindi il campo complessivo e' $\vec{E} = \vec{E}_p(\sigma) + \vec{E}_d(-\sigma) = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\hat{z}$

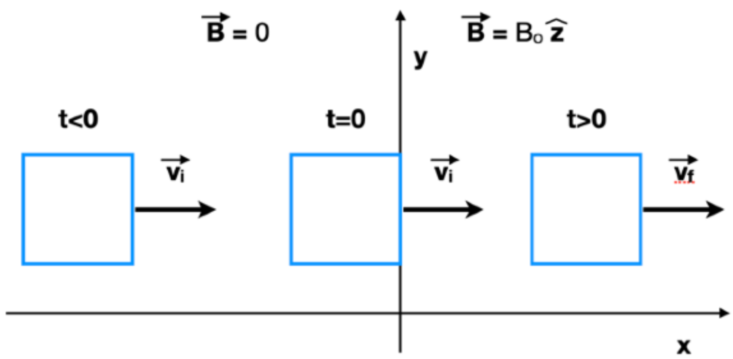
Il potenziale complessivo e' $\varphi(z) = -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{a^2+z^2}$.

Nel punto O=(0,0,0) una carica e' soggetta a forza nulla, quindi e' in equilibrio. Tuttavia si tratta di un equilibrio instabile. Infatti se q0 e' positiva, appena essa viene spostata dal punto O (sia verso z>0 che a z<0) e' soggetta a una forza repulsiva che la allontana da O.

Se q0 e' negativa e se viene spostata dalla posizione di eq. esclusivamente in direzione z, essa e' attratta dal piano quindi ricondotta verso O. Tuttavia questa situazione si verifica solo per spostamenti nella direzione z; per qualunque altro spostamento in x,y (ed eventualmente anche z) si ha uno sbilanciamento delle componenti xy della forza che allontanerebbe ulteriormente la carica da O. Quindi O e' un punto di equilibrio instabile consistentemente con il fatto generale che in elettrostatica non esistono punti di eq. stabili isolati dalle sorgenti (proprietà delle soluzioni delle funzioni armoniche soluzioni dell'eq di Laplace a cui soddisfa i; potenziale elettronico in punti in cui la densità' volumetrica di carica e' nulla).

Quesito 4 (fino a 12) [discussione qualitativa e/o quantitativa]

Si discuta il moto di una spira quadrata di lato *a*, resistenza ohmica R e massa m, che inizialmente trasla, in assenza di attrito, sul piano xy con velocita' iniziale v_i nella direzione dell'asse x. A un certo punto la spira entra in una regione dello spazio (x>0) in cui c'e' un campo magnetico uniforme perpendicolare al piano del suo moto. Si discuta anche la situazione dal punto di vista energetico. *Denominiamo $x_S(t)$ la coordinata del lato destro della spira per descriverne il moto.*



La spira ha un moto traslatorio rettilineo uniforme fino a quando il suo lato destro parallelo all'asse y non supera la coordinata x=0.
Per descrivere il moto della spira uso la coordinata x(t) del lato verticale destro della spira.
Infatti, quando la spira e' parzialmente nella regione a campo magnetico diverso da zero, ossia quando 0<x(t)<a, il flusso del campo magnetico concatenato con la spira (che indico con γ, curva

chiusa che decido di orientare in senso antiorario) e' variabile nel tempo e pari a $\Phi(\overrightarrow{B})_\gamma = \int_{\Sigma_\gamma} d\vec{s} \cdot \overrightarrow{B}(x)$ dove $\overrightarrow{B}(x) = 0$ per x<0 e $\overrightarrow{B}(x) = B_0\hat{z}$ per x>0.

La superficie Σ_γ per comodità' di calcolo e' scelta come superficie piana, con bordo γ, composta dagli elementini $d\vec{s} = ds\hat{z} = dxdy\hat{z}$.

Quindi $\Phi(\overrightarrow{B})_\gamma = \int_{\Sigma_\gamma} d\vec{s} \cdot \overrightarrow{B}(x) = \int_o^{x(t)} dx \int_0^a dy\hat{z} \cdot B_0\hat{z} = B_0 a x(t)$.

Questo flusso variabile nel tempo determinerà' per la legge di Faraday Neumann una f..e.m. e quindi una corrente indotta

$i(t) = \frac{\epsilon(t)}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\overrightarrow{B})_\gamma}{dt} = -\frac{B_0 a v(t)}{R}$. Si osservi che la corrente (definita come circolante in senso anti-orario) e' negativa.

La presenza della corrente nella spira, che si trova in una region dello spazio in cui c'è un campo magnetico determina una forza che si oppone al moto. Con la prima formula di Laplace si ha $\overrightarrow{F} = i(t)\oint_\gamma d\vec{l} \wedge \overrightarrow{B}$. I tratti orizzontali della spira contribuiscono all'integrale con componenti della forza uguali ed opposti, il lato a sinistra e' in una regione di campo nullo, quindi

$\overrightarrow{F} = i(t)\oint_\gamma d\vec{l} \wedge \overrightarrow{B} = i(t)\int_0^a dy\hat{y} \wedge B_0\hat{z} = i(t)B_0 a\hat{x}$ che si oppone al moto visto che i(t)<0.

Quindi possiamo scrivere l'equazione del moto (per 0<x<a) come segue

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{B_0^2 a^2 v(t)}{R}$$

Quindi $\int_{v_i}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\frac{B_0^2 a^2}{mR}\int_0^t dt = -\frac{B_0^2 a^2}{mR}t$

$v(t) = v_i e^{-\frac{B_0^2 a^2}{mR}t}$.

Inoltre,

$m\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{B_0^2 a^2 v(t)}{R} \Rightarrow dv = -\frac{B_0^2 a^2}{mR}dx$, quindi $v(t) = v_i - \frac{B_0^2 a^2}{mR}x(t)$.

Quindi la velocita' diminuisce esponenzialmente con il tempo e linearmente con la coordinata x, fino a raggiungere il valore corrispondete a x(t)=a, ossia $v_f = v_i - \frac{B_0^2 a^3}{mR}$.

L'istante di tempo in cui questo accade e' dato da

$$v_i - \frac{B_0^2 a^3}{mR} = v_i e^{-\frac{B_0^2 a^2 t_f}{mR}}$$

Ossia $t_f = -\frac{mR}{B_0^2 a^2}\ln\left(1 - \frac{B_0^2 a^3}{mRv_i}\right) = -\frac{mR}{B_0^2 a^2}\ln\left(\frac{v_f}{v_i}\right)$.

Da quel punto in poi, il flusso del campo magnetico e' costante, quindi non c'e' corrente indotta nella spira ne' alcuna forza.

Dal punto di vista energetico l'energia cinetica persa dalla spira

$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(v_i^2 - v_f^2) = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}m\left(v_i - \frac{B_0^2 a^3}{mR}\right)^2 = \frac{v_i B_0^2 a^3}{R} - \frac{1}{2}\frac{B_0^4 a^6}{mR^2}$

e' uguale all'energia dissipata per effetto Joule a seguito del flusso di corrente nella resistenza della spira. Infatti,

$$U_{Joule} = \int_0^{t_f} dtRi^2(t) = \int_0^{t_f} dtRB_0^2a^2v^2(t)/R^2 = \frac{B_0^2a^2}{R}\int_0^{t_f} dt\,v^2(t) = \frac{B_0^2a^2v_i^2}{R}\int_0^{t_f} dte^{-\frac{2B_0^2a^2}{mR}t} =$$

$$\frac{B_0^2a^2v_i^2}{R}\left(-\frac{mR}{2B_0^2a^2}\right)e^{-\frac{2B_0^2a^2}{mR}t}\Big|_0^{t_f} = \frac{1}{2}mv_i^2\left(1-e^{-\frac{2B_0^2a^2}{mR}t_f}\right) =$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2\left(1-e^{\frac{2B_0^2a^2}{mR}\frac{mR}{B_0^2a^2}\ln v_f/v_i}\right) = \frac{1}{2}mv_i^2\left(1-e^{2\ln v_f/v_i}\right) = \frac{1}{2}mv_i^2\left(1-\frac{v_f^2}{v_i^2}\right) = \frac{1}{2}m\left(v_i^2-v_f^2\right).$$

Per completezza risolviamo l'eq del moto della spira a partire da $v(t) = v_i - \frac{B_0^2a^2}{mR}x(t)$.

Quindi $x(t) = \frac{mR}{B_0^2a^2}\left(v_i - v(t)\right)$ per $t < t_f$.

E pertanto $x(t) = \frac{mR}{B_0^2a^2}v_i\left(1-e^{-\frac{B_0^2a^2}{mR}t}\right)$ per $t < t_f$.

Si osservi che il calcolo di $x(t_f)$, tenuto conto della relazione $t_f = -\frac{mR}{B_0^2a^2}\ln\left(1-\frac{B_0^2a^3}{mRv_i}\right)$, ci da subito $x(t_f) = a$.

Invece per $t > t_f$ il moto diventa rettilineo uniforme $x(t) = a + v_f(t - t_t)$.

Quesito 5 (fino a 8 punti)

Si discuta ***solo uno*** degli argomenti elencati:

1) Legge di Ohm.
2) Serie e parallelo di due condensatori.
3) Potenziale di dipolo elettrico a grandi distanze (derivazione).
4) Si dimostri la formula di Biot Savard (il campo elettrico dovuto a un filo rettilineo infinito percorso da corrente i) utilizzando la legge di Ampère.

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla\cdot\mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$
Rotore $\nabla\times\mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}}$ + $(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}}$ + $(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}}$ + $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}}$ + $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\mathbf{r}}$ + $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}}$ + $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz\hat{\mathbf{x}} + dxdz\hat{\mathbf{y}} + dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}} + d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}} + \rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}} + r\sin\theta drd\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} + rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dxdydz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

Operatori differenziali ed elementi di linea, superficie e volume in coordinate cartesiane (sinistra), cilindriche (centro) e sferiche (destra).

ε_0 =8.85 · 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 · 10^{-12} F/m
μ_0 = 4π · 10^{-7} H/m,
k = 1/ (4 π ε_0)= 9 · 10^9 Nm^2/C^2
|e| = 1.6 · 10^{-19} C, m_e = 9.1 · 10^{-31} Kg, m_p = 1.67 · 10^{-27} Kg, $M_{He} \simeq 4\, m_p$; N_A = 6.022 x 10^{23} mol^{-1}

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} dV; \qquad d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B}\ dV$