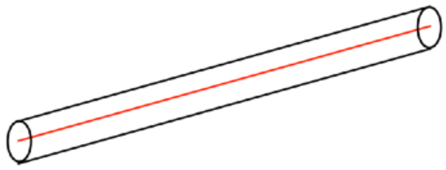
Scritto 68 - I° esonero - a.a. 2024-2025



Quesito 1: (fino a 10)

Un condensatore cilindrico è costituito da una superficie cilindrica di raggio interno r_i = 2cm e un filo metallico sull'asse del cilindro di raggio r_0=25 μm teso tra le due basi distanti L=2m l'una dall'altra. Il filo e' al potenziale di 1kV e la parete cilindrica al potenziale 0. Si calcoli la capacità del condensatore, la carica sulle armature, il campo elettrico all'interno del condensatore (assumendo simmetria cilindrica). Con quale velocita' un elettrone estratto dalla parete metallica del cilindro con energia cinetica trascurabile raggiunge il filo metallico centrale ?

Il sistema ha simmetria cilindrica, pertanto $\varphi(r,\phi.z)=\varphi(r)$, con r = distanza dall'asse di simmetrica cilindrica, e $\vec{E}=E(r)\hat{r}$. Se assumiamo che sul conduttore interno (filo) ci sia una carica Q=λL (distribuita uniformemente data l'approssimata simmetria cilindrica L>>r), possiamo calcolare il campo elettrico a distanza r dall'asse applicando la legge di Gauss a una superficie cilindrica chiusa di raggio r e altezza arbitraria h, ottenendo

$$\Phi_C(\vec{E})=\int_C E(r)\hat{(r)}\cdot d\vec{s}=\int_{S_L} E(r)\hat{(r)}\cdot ds\hat{r}=E(r)\ 2\pi rh=\frac{Q_{int}(C)}{\epsilon_0}=\frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Pertanto $\vec{E}(r)=\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$.

La differenza di potenziale tra le due armature del condensatore (filo e parete metallica del cilindro) e'

$$\Delta V=\varphi(r_0)-\varphi(r_i)=\int_{r_0}^{r_i}\vec{E}(r)\cdot d\vec{l}=\int_{r_0}^{r_i}\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}\cdot dr\hat{r}=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)=2k\lambda\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right).$$

Da questa relazione si ottiene $\lambda=\dfrac{\Delta V}{2k\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}=\dfrac{2\pi\epsilon_0\Delta V}{\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}=\dfrac{1\text{ kV}}{2\times9\times10^9\ln\left(\frac{0.02}{25\times10^{-6}}\right)}=$

=8.3 x 10^{-9} C/m.

Questa ddp e' zero solo se λ=0, ossia se tutta la carica del filo e' spostata sulla parete del cilindro.

$$\vec{E}(r)=\frac{2\pi\epsilon_0\Delta V}{\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}\frac{1}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}=\frac{\Delta V}{\ln(r_i/r_0)r}\hat{r}=\frac{149.6\text{ V}}{r\text{ (m)}}\hat{r}.$$

In prossimità della parete cilindrica il campo vale $\vec{E}_{parete\ cil}=\dfrac{149.6\text{ V}}{0.02}\hat{r}=7480\text{ V/m }\hat{r}$

In prossimità del filo il campo vale $\vec{E}_{filo}=\dfrac{149.6\text{ V}}{25\times10^{-6}}\hat{r}=5.98\text{ MV/m }\hat{r}.$

Quindi applicando la definizione, la capacita' del condensatore cilindrico e' $C=\dfrac{\Delta Q_{1->2}}{\varphi_1-\varphi_2}=$

$$\frac{\lambda L}{2k\lambda\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}=\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}=\frac{2}{2\times9\times10^9\ln\left(\frac{0.02}{25\times10^{-6}}\right)}=16.6\text{ pF.}$$

L'energia cinetica dell'elettrone quando raggiunge il filo e' uguale all'energia potenziale iniziale che e' $E_p=e\Delta V$ = 1 keV = 1.6 x 10^{-16} J = 0.5 m_e v^2 => v = $\sqrt{\dfrac{2E_p}{m_e}}=\sqrt{\dfrac{3.2\times10^{-16}}{9\times10^{-31}}}$ = 1.88x10^7m/s.

Quesito 2: (fino a 10)
Si calcoli in tutti i punti dello spazio il campo elettrico e il potenziale elettrostatico prodotti da una sfera uniformemente carica di raggio a e densità volumetrica uniforme ρ collocata al centro di una sfera conduttrice neutra e cava con raggio della cavità pari a 2a e raggio esterno pari a 3a. Si calcoli la densità superficiale di carica sulle superfici interne ed esterne del conduttore.

Il sistema ha simmetria sferica, quindi adottiamo un sistema di riferimento con origine O nel centro della sfera carica (centro di simmetria) e usiamo coordinate sferiche.
Il potenziale elettrostatico dipenderà dolo dalla distanza da O cosi' come il campo elettrico che sara' diretto radialmente visto che $\overrightarrow{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \ldots$ dal momento che le derivate del potenziale rispetto agli angoli (polare e azimutale) sono nulle. La presenza della sfera uniformemente carica di raggio R_0 all'interno della cavita' sferica del conduttore induce carica elettrica sulla superficie interna del conduttore, con densita' superficiale tale che $\sigma_i \, 4\pi R_i^2 = -\rho\frac{4}{3}\pi R_0^3$ perche' se applichiamo la legge di gauss a una qualunque superficie chiusa S i cui punti siano tutti interni al conduttore troviamo un flusso nullo, perche' il campo e' nullo nel volume del conduttore, il che implica che la carica totale interna a S, somma della carica indotta sulla superficie della cavita' sferica e della carica della sferetta interna, deve essere nulla.
Quindi $\sigma_i = -\rho\frac{R_0^3}{3R_i^2} = -\frac{\rho a}{12}$. D'altra parte il conduttore e' neutro quindi la carica totale sulla superficie interna deve essere uguale e opposta alla carica sulla superficie esterna
$\sigma_i R_i^2 = -\sigma_e R_e^2$,
Quindi $\sigma_e = \rho\frac{R_0^3}{3R_e^2} = \frac{\rho a}{27}$.
Il campo elettrico a distanza r da O puo' essere calcolato applicando la legge di Gauss a superfici sferiche S di raggio r, ottenendo
$\Phi_S(\overrightarrow{E}) = \int_S E(r)\hat{r}\cdot ds\hat{r} = 4\pi r^2 E(r)$. Per Gauss questa quantità sara' uguale alla quantità di carica interna a S divisa per la costante dielettrica del vuoto.

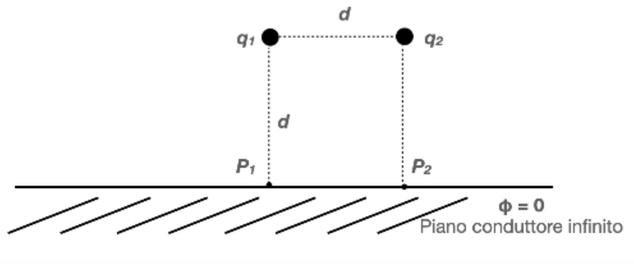
La carica Q all'interno di S e' $Q_{int}(A) = \int_{V_S} \rho(r)dV = \begin{cases} r < R_0 & \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \\ R_0 < r < R_i & \rho\frac{4}{3}\pi R_0^3 \\ R_i < r < R_e & 0 \\ R_e < r & \rho\frac{4}{3}\pi R_0^3 \end{cases}$

Quindi il campo elettrico e' $\overrightarrow{E} = \begin{cases} r < R_0 & \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} = \frac{kQr}{R_0^3}\hat{r} \\ R_0 < r < R_i & \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \\ R_i < r < R_e & 0 \\ R_e < r & \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \end{cases}$

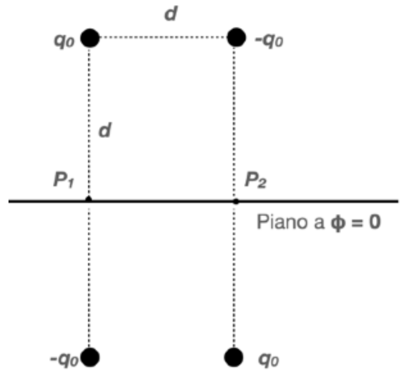
Il potenziale elettrostatico (fissato 0 a r->inf)

$$
\varphi(r) = \begin{cases}
r < R_0 & \dfrac{\rho}{6\epsilon_0}\left(R_0^2 - r^2\right) + \dfrac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_0} - \dfrac{1}{R_i} + \dfrac{1}{R_e}\right) = \dfrac{kQ(R_0^2 - r^2)}{2R_0^3} + \dfrac{kQ}{R_0} + \dfrac{kQ}{R_e} - \dfrac{kQ}{R_i} \\
R_0 < r < R_i & \dfrac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_i} + \dfrac{1}{R_e}\right) = \dfrac{kQ}{r} + \dfrac{kQ}{R_e} - \dfrac{kQ}{R_i} \\
R_i < r < R_e & \dfrac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 R_e} = \dfrac{kQ}{R_e} \\
R_e < r & \dfrac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r} = \dfrac{kQ}{r}
\end{cases}
$$

Quesito 3: (fino a 10)
Si consideri un piano conduttore infinito a potenziale nullo e due cariche puntiformi q1 e q2 uguali e opposte a distanza d tra di loro e a distanza d dal piano conduttore. Si calcoli la densità superficiale di carica indotta nel punti del piano che sono i più vicini a q1 e a q2.



Il problema si risolve con il metodo delle cariche immagine. Abbiamo due cariche e un piano conduttore a potenziale nullo, condizione che puo' essere ottenuta (per z>0, cioè al di sopra del piano conduttore) anche con q1 e q2 nelle loro posizioni originarie e due cariche uguali e opposte a ciascuna di essa nel semipiano z<0 collocate simmetricamente, come in figura. In P1 e P2 il campo elettrico puo' essere calcolato con le 4 cariche immagine, poi la densita' superficiale di carica sara' uguale a $\sigma = E\epsilon_0$,



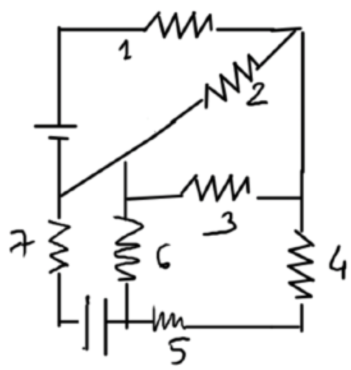
$$\vec{E}(P_1) = -2\frac{kq_0}{d^2}\hat{z} + \frac{2kq_0}{(\sqrt{2}d)^2}\cos\frac{\pi}{4}\hat{z} = -2\frac{kq_0}{d^2}\hat{z} + \frac{kq_0}{\sqrt{2}d^2}\hat{z} =$$

$$= \frac{kq_0}{d^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)\hat{z}.$$

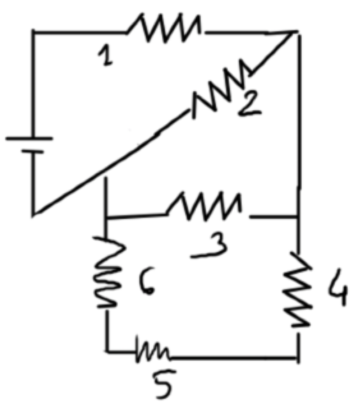
Per simmetria si ha $\vec{E}(P_2) = -\vec{E}(P_1) = \dfrac{kq_0}{d^2}\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{z}$.

Quindi $\sigma(P_1) = \dfrac{q_0}{4\pi d^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)$ e $\sigma(P_2) = \dfrac{q_0}{4\pi d^2}\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

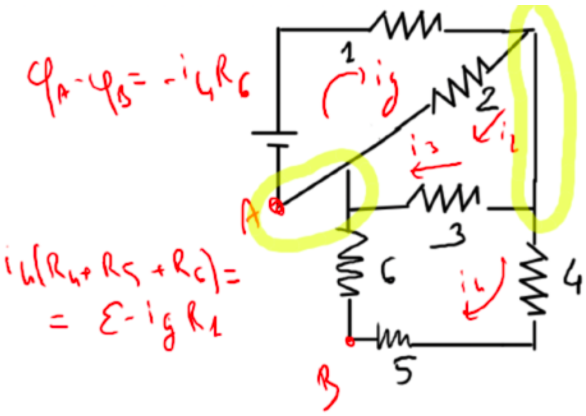
Quesito 4: (fino a 10) Il circuito in figura si trova in condizioni di funzionamento di regime; si calcoli la potenza erogata dal generatore e la carica sulle armature del condensatore. Si assuma R3=R5=1kΩ, R1=R2=R4=2kΩ, R6=R7=4kΩ, ε=10 V, C=10nF.



A regime non circola corrente nel ramo del condensatore che sara' completamente carico (si veda lo schema 1). La potenza erogata dal generatore e' $P_{erogata} = \epsilon i_g$, occorre quindi calcolare la corrente che scorre nel ramo del generatore. La carica sulle armature del condensatore e' $Q_C = C(\varphi_A - \varphi_B)$ (si veda schema 2).
I due nodi sono indicati in giallo nello schema 2.



SCHEMA 1. CIRCUITO A REGIME



SCHEMA 2. NODI E CORRENTI A REGIME

La differenza di potenziale tra i due nodi e' uguale e $\epsilon - i_g R_1$ ma anche a $i_4(R_4 + R_5 + R_6)$.

Inoltre $\varphi_A - \varphi_B = -i_4 R_6 = \dfrac{i_g R_1 - \epsilon}{R_4 + R_5 + R_6} R_6$

da cui si dedicano le relazioni

$Q_C = -C i_4 R_6 = \dfrac{i_g R_1 - \epsilon}{R_4 + R_5 + R_6} C R_6.$

La resistenza eq del circuito si ricava con queste considerazioni:

$R_4,\ R_5,\ R_6$ sono in serie. Inoltre $R_2,\ R_3$ sono in parallelo e ancora in parallelo con la serie $R_{456} = R_4 + R_5 + R_6 = 7\ \mathrm{k\Omega}$. Quindi $R_{2,..,6} = \dfrac{R_{456} R_2 R_3}{(R_2 + R_3)(R_{456} + (R_2 R_3)/(R_2 + R_3))} =$

$R_{2,..,6} = \dfrac{R_{456} R_2 R_3}{(R_2 + R_3) R_{456} + R_2 R_3} = 0.61\ \mathrm{k\Omega}.$

Infine,

$R_{eq} = R_1 + R_{2,..,6} =$ 2.61 kΩ. Quindi $i_g = \epsilon / R_{eq} = 10/2609\ \mathrm{A} = 3.8\ \mathrm{mA}.$

$P_{erogata} = \epsilon i_g = 38\ \mathrm{mW}.$

$Q_C = \dfrac{i_g R_1 - \epsilon}{R_4 + R_5 + R_6} C R_6 = \dfrac{0.0038 \times 2000 - 10}{7000} 10^{-8} \times 4000\ \mathrm{C}$ = 13.7 nC.

Quesito 5: (fino a 8)

Si discuta un argomento a scelta tra i seguenti:

- Si dimostri che in un circuito di carica di un condensatore (condensatore, resistore e generatore collegato in serie) l'energia erogata dal generatore è per metà dissipata nel resistore e per metà accumulata nel condensatore.
- Si dimostri la relazione che permette di esprimere il potenziale prodotto da due cariche uguali e poste separate dalla distanza d a una distanza r dalle cariche con r>>d.
- Si dimostri che il campo elettrico prodotto da una distribuzione di carica a simmetria sferica all'esterno della distribuzione è uguale al campo Coulombiano.