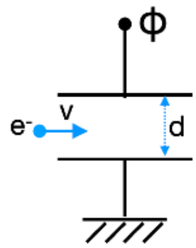
Scritto 68 - Iº esonero - a.a. 2024-2025

Quesito 1: (fino a 10)

Nella figura a destra, il condensatore ad armature quadrate e parallele di area $A = 0.1\ \mathrm{m}^2$ a distanza $d = 2\ \mathrm{cm}$ ha una delle armature collegata a massa e l'altra mantenuta al potenziale $\phi = 1\ \mathrm{V}$. Si calcoli la carica sulle armature, l'energia elettrostatica e il campo elettrico all'interno del condensatore. Si dimostri che integrando la densità di energia associata al campo elettrico sul volume del condensatore si ottiene l'energia elettrostatica. Infine, considerato un elettrone che entra nel condensatore con velocità orizzontale di 3x10⁶ m/s, inizialmente alla stessa distanza dalle due armature, stabilire lo spostamento in direzione verticale e l'angolo θ di deflessione all'uscita dal condensatore.



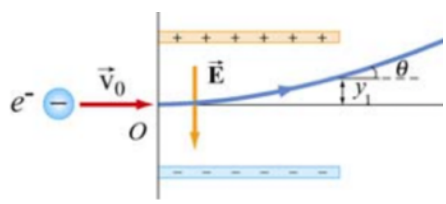
C = Q/DeltaV, quindi calcolando la capacita' di puo' ottenere la carica nota la differenza di potenziale. Per un condensatore ad armature piane e parallele la capacita' e' pari $C = (\text{def}) = \dfrac{\Delta Q_{1\to 2}}{\varphi_1 - \varphi_2} = \dfrac{A\sigma}{\sigma d/\epsilon_0}$ dato che la carica uguale e opposta sulle due armature (di area A) corrisponde a distribuzione superficiale di carica di valore opposto (σ e -σ). Quindi il campo all'interno vale $\vec{E} = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}$ (scelgo l'asse z perpendicolare alle armature e rivolto verso l'alto).

Quindi la differenza di potenziale e' $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi(d) - \varphi(0) = -\displaystyle\int_{z=0}^{z=d} \vec{E}\cdot dz\hat{z}$ = $\displaystyle\int_{z=0}^{z=d} \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}\cdot dz\hat{z}$ $=\sigma d/\epsilon_0$. Quindi la carica Q = 1V x $0.1 \times 8.85 \times 10^{-12}/0.02$ = 0.45 pC.

La densita' di energia elettrostatica e' pari a $\dfrac{dU_e}{dV} = \dfrac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$. Integrandola sul volume tra le due armature (unica regione in cui c'e' un campo elettrico diverso da zero) si ha

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 \times Ad = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}Ad.$$

D'altra parte l'energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore e' data da $U_e = \dfrac{1}{2}Q\Delta V = \dfrac{1}{2}\sigma A \times \dfrac{\sigma d}{\epsilon_0}$ che coincide con l'espressione ottenuta precedentemente.



Un elettrone sara' soggetto alla forza $\vec{F} = q_{e^-}\vec{E} = -e(-\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}) = \dfrac{e\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}$ uniforme che determinerà un moto uniformemente accelerato in direzione verticale z(t)=$z_0 + v_{z_0}t + \dfrac{1}{2}\dfrac{e\sigma}{\epsilon_0 m_e}t^2$.

E' noto che $v_{z_0} = 0,\ \ z_0 = d/2$. Inoltre il moto in direzione orizzontale non e' alterato da alcuna forza => $x(t) = x_0 + v_{x_0}t$. Allora l'elettrone uscirà dal volume del condensatore quando $x(\tilde{t}) = x_0 + v_{x_0}\tilde{t} = \sqrt{A} = v\tilde{t}$.

In definitiva,

$$\Delta z = z(\tilde{t}) - z_0 = \frac{e\sigma}{2\epsilon_0 m_e}\frac{A}{v^2} = \frac{2\pi keQ}{v^2 m_e} = \frac{2\pi\ 9\times 10^9 \times 1.6\times 10^{-19}}{3^2\times 10^{12}\times 9\times 10^{-31}}0.45\times 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

$$\simeq 50\times 10^{-22}/10^{-15} = 500\ \mu\mathrm{m}.$$

La componente y della velocita' all'uscita dal condensatore e'

$v(\tilde{t}) = \frac{e\sigma}{\epsilon_0 m_e}\tilde{t} = \frac{4\pi k e\sigma}{m_e}\frac{\sqrt{A}}{v} = \frac{4\pi k e Q}{m_e v\sqrt{A}} = \frac{4\pi \ 9\times10^9\times1.6\times10^{-19}}{3\times10^6\times9\times10^{-31}\times\sqrt{0.1}}\times0.45\times10^{-12} =$

$2\Delta z(\tilde{t})v/\sqrt{A}$ $= 500\ \mu\text{m}\times3\times10^6\ (\text{m/s})/0.316\ \text{m}$ = 5000 m/s.

L'angolo θ che la traiettoria dell'elettrone forma con l'asse orizzontale all'uscita dal condensatore e'

$$\tan\theta = v_y/v_x = \frac{5\times10^3}{0.3\times10^8} = 1.67\times10^{-4} \simeq \theta.$$

Quesito 2: (fino a 10)

Si calcoli in tutti i punti dello spazio il campo elettrico e il potenziale elettrostatico prodotti da una sfera uniformemente carica di raggio a e densità volumetrica ρ collocata al centro di una sfera conduttrice cava con raggio della cavità pari a 2a e raggio esterno pari a 3a. Si calcoli la densità superficiale di carica sulle superfici interne ed esterne del conduttore.

Il sistema ha simmetria sferica, quindi adottiamo un sistema di riferimento con origine O nel centro della sfera carica (centro di simmetria) e usiamo coordinate sferiche.

Il potenziale elettrostatico dipenderà dolo dalla distanza da O cosi' come il campo elettrico che sar' diretto radialmente visto che $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \ldots$ dal momento che le derivate del potenziale rispetto agli angoli (polare e azimutale) sono nulle. La presenza della sfera uniformemente carica di raggio R_0 all'interno della cavita' sferica del conduttore induce carica elettrica sulla superficie interna del conduttore, con densita' superficiale tale che

$\sigma_i\ 4\pi R_i^2 = -\rho\frac{4}{3}\pi R_0^3$ perche' se applichiamo la legge di gauss a una qualunque superficie chiusa S i cui punti siano tutti interni al conduttore troviamo un flusso nullo, perche' il campo e' nullo nel volume del conduttore, il che implica che la carica totale interna a S, somma della carica indotta sulla superficie della cavita' sferica e della carica della sferetta interna, deve essere nulla.

Quindi $\sigma_i = -\rho\frac{R_0^3}{3R_i^2}$. D'altra parte il conduttore e' neutro quindi la carica totale sulla superficie interna deve essere uguale e opposta alla carica sulla superficie esterna $\sigma_i R_i^2 = -\sigma_e R_e^2$,

Quindi $\sigma_e = \rho\frac{R_0^3}{3R_e^2}$.

Il campo elettrico a distanza r da O puo' essere calcolato applicando la legge di Gauss a superfici sferiche S di raggio r, ottenendo

$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S E(r)\hat{r}\cdot ds\hat{r} = 4\pi r^2 E(r)$. Per Gauss questa quantità sara' uguale alla quantità di carica interna a S divisa per la costante dielettrica del vuoto.

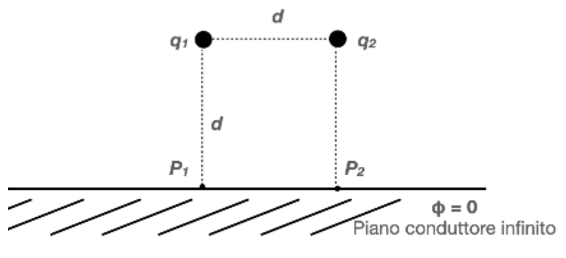
La carica Q all'interno di S e' $Q_{int}(A) = \int_{V_S}\rho(r)dV = \begin{cases} r < R_0 & \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \\ R_0 < r < R_i & \rho\frac{4}{3}\pi R_0^3 \\ R_i < r < R_e & 0 \\ R_e < r & \rho\frac{4}{3}\pi R_0^3 \end{cases}$

Quindi il campo elettrico e' $\vec{E} = \begin{cases} r < R_0 & \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} = \frac{kQr}{R_0^3}\hat{r} \\ R_0 < r < R_i & \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \\ R_i < r < R_e & 0 \\ R_e < r & \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \end{cases}$

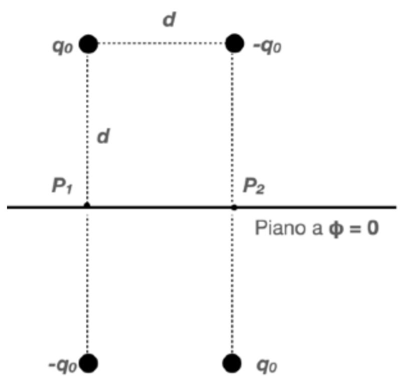
Il potenziale elettrostatico (fissato 0 a r->inf)

$$\varphi(r) = \begin{cases} r < R_0 & \frac{\rho}{6\epsilon_0}\left(R_0^2 - r^2\right) + \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e}\right) = \frac{kQ(R_0^2 - r^2)}{2R_0^3} + \frac{kQ}{R_0} + \frac{kQ}{R_e} - \frac{kQ}{R_i} \\ R_0 < r < R_i & \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e}\right) = \frac{kQ}{r} + \frac{kQ}{R_e} - \frac{kQ}{R_i} \\ R_i < r < R_e & \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 R_e} = \frac{kQ}{R_e} \\ R_e < r & \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{kQ}{r} \end{cases}$$

Quesito 3: (fino a 10)
Si consideri un piano conduttore infinito a potenziale nullo e due cariche puntiformi q1 e q2 uguali e opposte a distanza d tra di loro e a distanza d dal piano conduttore. Si calcoli la densità superficiale di carica indotta nel punti del piano che sono i più vicini a q1 e a q2.



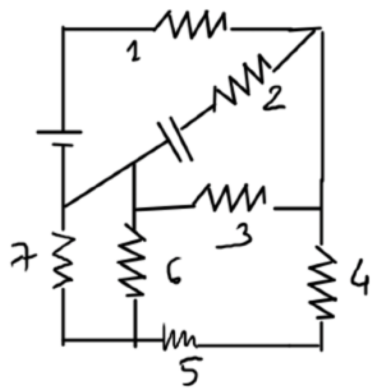
Il problema si risolve con il metodo delle cariche immagine. Abbiamo due cariche e un piano conduttore a potenziale nullo, condizione che puo' essere ottenuta (per z>0, cioè al di sopra del piano conduttore) anche con q1 e q2 nelle loro posizioni originarie e due cariche uguali e opposte a ciascuna di essa nel semipiano z<0 collocate simmetricamente, come in figura. In P1 e P2 il campo elettrico puo' essere calcolato con le 4 cariche immagine, poi la densita' superficiale di carica sara' uguale a $\sigma = E\epsilon_0$,



$$\vec{E}(P_1) = -2\frac{kq_0}{d^2}\hat{z} + \frac{2kq_0}{(\sqrt{2}d)^2}\cos\frac{\pi}{4}\hat{z} = -2\frac{kq_0}{d^2}\hat{z} + \frac{kq_0}{\sqrt{2}d^2}\hat{z} =$$
$$= \frac{kq_0}{d^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)\hat{z}.$$

Per simmetria si ha $\vec{E}(P_2) = -\vec{E}(P_1) = \frac{kq_0}{d^2}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{z}$.

Quindi $\sigma(P_1) = \frac{q_0}{4\pi d^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)$ e $\sigma(P_2) = \frac{q_0}{4\pi d^2}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

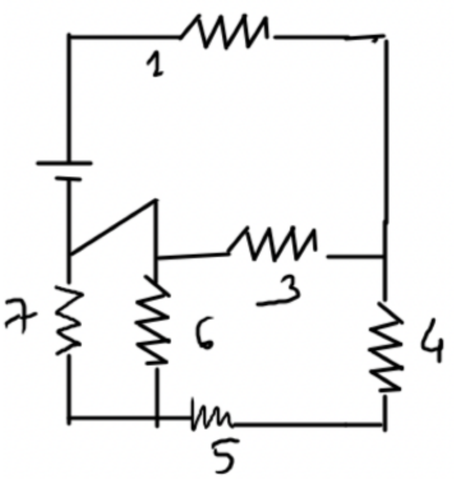


Quesito 4: (fino a 10) Il circuito in figura si trova in condizioni di funzionamento di regime; si calcoli la potenza erogata dal generatore e la carica sulle armature del condensatore. Si assuma R1=R3=R5=1kΩ, R2=R4=2kΩ, R6=R7=3kΩ, ε=20 V, C=10nF.

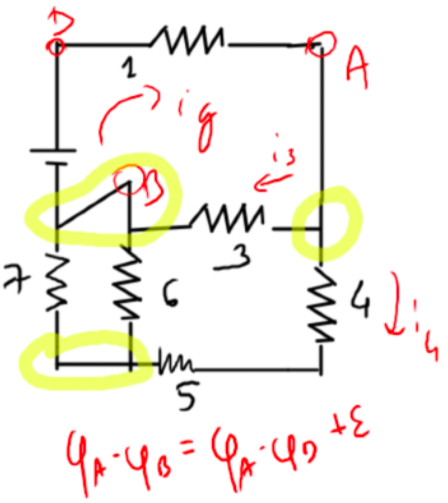
A regime non circola corrente nel ramo del condensatore che sara' completamente carico (si veda lo schema 1). La potenza erogata dal generatore e' $P_{erogata} = \epsilon i_g$, occorre quindi calcolare la corrente che scorre nel ramo del generatore. La carica sulle armature del condensatore e' $Q_C = C(\varphi_A - \varphi_B)$ (si veda schema 2).
I due nodi sono indicati in giallo nello schema 2.

La differenza di potenziale tra i due nodi e' uguale e $\epsilon - i_g R_1$.
Inoltre $\varphi_A - \varphi_B = \epsilon - i_g R_1$. $Q_C = - C i_4 R_6 = C(\epsilon - i_g R_1)$.

La resistenza eq del circuito si ricava con queste considerazioni:
R_4, R_5 sono in serie. Inoltre R_7, R_6 sono in parallelo, $R_{67} = \dfrac{R_6 R_7}{R_6 + R_7}$, e il loro parallelo e' in serie con $R_{45} = R_4 + R_5$. Poi R_{45} = 3 kΩ e R_{67}=1.5 kΩ sono in serie (4.5 kΩ) e la loro serie e' in parallelo con R_3 (818 Ω). Infine R1 e' in serie con l'equivalente delle altre.
In definitiva, $R_{eq} = R_1$+0.818 kΩ = 1.818 kΩ.
Quindi $i_g = \epsilon / R_{eq} = 20/1818\ \text{A} = 11\ \text{mA}$.
$P_{erogata} = \epsilon i_g = 220\ \text{mW}$.
$Q_C = C(\epsilon - i_g R_1)$ = (20 - 11)x10^{8}= 0.9 nC.



1. CIRCUITO A REGIME



2. NODI E CORRENTI A REGIME

Quesito 5: (fino a 8)

Si discuta un argomento a scelta tra i seguenti:

- Si discutano le proprietà della carica elettrica e i fenomeni di elettrizzazione di materiali isolanti a partire dalla descrizione atomica della materia.
- Si discutano le proprietà generali dei conduttori all'equilibrio elettrostatico dal punto di vista microscopico e macroscopico e si dimostri il fenomeno dello schermo elettrostatico.
- Si discuta l'energia elettrostatica di un dipolo elettrico immersa in un campo elettrico esterno.