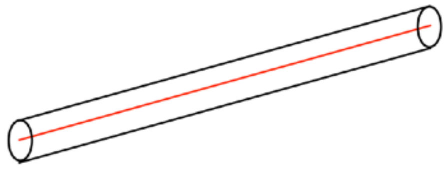
Scritto 68 - Iº esonero - a.a. 2024-2025

Quesito 1: (fino a 10)



Un condensatore cilindrico è costituito da una superficie cilindrica di raggio interno r_i = 2cm e un filo metallico sull'asse del cilindro di raggio r_0=25 μm teso tra le due basi distanti L=2m l'una dall'altra. Il filo e' al potenziale di 1kV e la parete cilindrica al potenziale 0. Si calcoli la capacità del condensatore, la carica sulle armature, il campo elettrico all'interno del condensatore (nella regione centrale, dove è possibile assumere simmetria cilindrica). Con quale velocita' un elettrone estratto dalla parete metallica del cilindro con energia cinetica trascurabile raggiunge il filo metallico centrale ?

Il sistema ha simmetria cilindrica, pertanto $\varphi(r,\phi.z) = \varphi(r)$, con r = distanza dall'asse di simmetrica cilindrica, e $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Se assumiamo che sul conduttore interno (filo) ci sia una carica Q=λL (distribuita uniformemente data l'approssimata simmetria cilindrica L>>r), possiamo calcolare il campo elettrico a distanza r dall'asse applicando la legge di Gauss a una superficie cilindrica chiusa di raggio r e altezza arbitraria h, ottenendo

$$\Phi_C(\vec{E}) = \int_C E(r)\hat{(r)} \cdot d\vec{s} = \int_{S_L} E(r)\hat{(r)} \cdot ds\hat{r} = E(r)\ 2\pi r h = \frac{Q_{int}(C)}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Pertanto $\vec{E}(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$.

La differenza di potenziale tra le due armature del condensatore (filo e parete metallica del cilindro) e'

$$\Delta V = \varphi(r_0) - \varphi(r_i) = \int_{r_0}^{r_i} \vec{E}(r) \cdot d\vec{l} = \int_{r_0}^{r_i} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} \cdot dr\hat{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right) = 2k\lambda \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right).$$

Da questa relazione si ottiene $\lambda = \dfrac{\Delta V}{2k \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)} = \dfrac{2\pi\epsilon_0 \Delta V}{\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)} = \dfrac{1\ \mathrm{kV}}{2 \times 9 \times 10^9 \ln\left(\frac{0.02}{25 \times 10^{-6}}\right)} =$

=8.3 x 10^{-9} C/m.

Questa ddp e' zero solo se λ=0, ossia se tutta la carica del filo e' spostata sulla parete del cilindro.

$$\vec{E}(r) = \frac{2\pi\epsilon_0 \Delta V}{\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)} \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} = \frac{\Delta V}{\ln(r_i/r_0) r}\hat{r} = \frac{149.6\ \mathrm{V}}{r\ (\mathrm{m})}\hat{r}.$$

In prossimità della parete cilindrica il campo vale $\vec{E}_{parete\ cil} = \dfrac{149.6\ \mathrm{V}}{0.02}\hat{r} = 7480\ \mathrm{V/m}\ \hat{r}$

In prossimità del filo il campo vale $\vec{E}_{filo} = \dfrac{149.6\ \mathrm{V}}{25 \times 10^{-6}}\hat{r} = 5.98\ \mathrm{MV/m}\ \hat{r}$.

Quindi applicando la definizione, la capacita' del condensatore cilindrico e' $C = \dfrac{\Delta Q_{1->2}}{\varphi_1 - \varphi_2}$ =

$$\frac{\lambda L}{2k\lambda \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)} = \frac{2}{2 \times 9 \times 10^9 \ln\left(\frac{0.02}{25 \times 10^{-6}}\right)}$$ = 16.6 pF.

L'energia cinetica dell'elettrone quando raggiunge il filo e' uguale all'energia potenziale iniziale che e' $E_p = e\Delta V$ = 1 keV = 1.6 x 10^{-16} J = 0.5 m_e v^2 => v = $\sqrt{\dfrac{2E_p}{m_e}} = \sqrt{\dfrac{3.2\times10^{-16}}{9\times10^{-31}}}$ = 1.88x10^7m/s.

Quesito 2: (fino a 10)
Si calcoli in tutti i punti dello spazio il campo elettrico e il potenziale elettrostatico prodotti da una sfera uniformemente carica di raggio a e densità volumetrica ρ collocata al centro di una sfera conduttrice cava con raggio della cavità pari a 2a e raggio esterno pari a 3a. Si calcoli la densità superficiale di carica sulle superfici interne ed esterne del conduttore.

Il sistema ha simmetria sferica, quindi adottiamo un sistema di riferimento con origine O nel centro della sfera carica (centro di simmetria) e usiamo coordinate sferiche.
Il potenziale elettrostatico dipenderà dolo dalla distanza da O cosi' come il campo elettrico che sara' diretto radialmente visto che $\overrightarrow{E} = -\nabla\varphi = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \ldots$ dal momento che le derivate del potenziale rispetto agli angoli (polare e azimutale) sono nulle. La presenza della sfera uniformemente carica di raggio R_0 all'interno della cavita' sferica del conduttore induce carica elettrica sulla superficie interna del conduttore, con densita' superficiale tale che $\sigma_i\ 4\pi R_i^2 = -\rho\dfrac{4}{3}\pi R_0^3$ perche' se applichiamo la legge di gauss a una qualunque superficie chiusa S i cui punti siano tutti interni al conduttore troviamo un flusso nullo, perche' il campo e' nullo nel volume del conduttore, il che implica che la carica totale interna a S, somma della carica indotta sulla superficie della cavita' sferica e della carica della sferetta interna, deve essere nulla.
Quindi $\sigma_i = -\rho\dfrac{R_0^3}{3R_i^2}$. D'altra parte il conduttore e' neutro quindi la carica totale sulla superficie interna deve essere uguale e opposta alla carica sulla superficie esterna $\sigma_i R_i^2 = -\sigma_e R_e^2$,
Quindi $\sigma_e = \rho\dfrac{R_0^3}{3R_e^2}$.
Il campo elettrico a distanza r da O puo' essere calcolato applicando la legge di Gauss a superfici sferiche S di raggio r, ottenendo
$\Phi_S(\overrightarrow{E}) = \displaystyle\int_S E(r)\hat{r}\cdot ds\hat{r} = 4\pi r^2 E(r)$. Per Gauss questa quantità sara' uguale alla quantità di carica interna a S divisa per la costante dielettrica del vuoto.

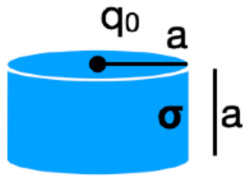
La carica Q all'interno di S e' $Q_{int}(A) = \displaystyle\int_{V_S}\rho(r)dV = \begin{cases} r < R_0 & \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \\ R_0 < r < R_i & \rho\frac{4}{3}\pi R_0^3 \\ R_i < r < R_e & 0 \\ R_e < r & \rho\frac{4}{3}\pi R_0^3 \end{cases}$

Quindi il campo elettrico e' $\overrightarrow{E} = \begin{cases} r < R_0 & \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} = \frac{kQr}{R_0^3}\hat{r} \\ R_0 < r < R_i & \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \\ R_i < r < R_e & 0 \\ R_e < r & \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \end{cases}$

Il potenziale elettrostatico (fissato 0 a r->inf)

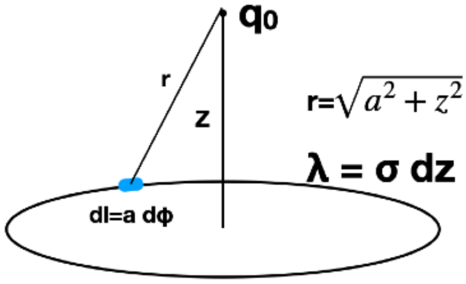
$$\varphi(r)=\begin{cases} r<R_0 & \frac{\rho}{6\epsilon_0}\left(R_0^2-r^2\right)+\frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_e}\right)=\frac{kQ(R_0^2-r^2)}{2R_0^3}+\frac{kQ}{R_0}+\frac{kQ}{R_e}-\frac{kQ}{R_i} \\ R_0<r<R_i & \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_e}\right)=\frac{kQ}{r}+\frac{kQ}{R_e}-\frac{kQ}{R_i} \\ R_i<r<R_e & \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 R_e}=\frac{kQ}{R_e} \\ R_e<r & \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r}=\frac{kQ}{r} \end{cases}$$

Quesito 3: (fino a 10)
Si consideri una carica Q distribuita uniformemente sulla superficie laterale di un cilindretto di raggio a e altezza h=a. Si calcoli l'energia potenziale di una carica puntiforme q_0, dello stesso segno di Q, collocata al centro di una base del cilindretto. *Suggerimento: si consideri la superficie cilindrica come sovrapposizione di anelli carichi.*



La superficie cilindrica puo' essere interpretata come la sovrapposizione di anelli uniformemente carichi con densita' lineare $\lambda=\sigma\ dz$ in modo tale che

$$\Sigma\ \lambda\ 2\pi a=\int \sigma dz\ 2\pi a=\sigma a\ 2\pi a=Q 2\pi a^2.$$



Rispetto ad ogni anello la carica q0 si trova su un punto dell'asse a distanza da piano dell'anello variabile da 0 ad a'.
Quindi si puo' calcolare l'energia potenziale della carica come

$E_p=q_0\varphi=\int_{z=0}^{z=a} q_0\ d\varphi(z)$ dove $d\varphi(z)$ e' il contributo infinitesimo al potenziale dovuto all'anello per il quale la carica si trova alla distanza z dal suo centro.
Il potenziale che un anello γ uniformemente carico (con densita' λ) produce nel punto P a distanza z sull'asse e' dati da $\varphi(z)=\int_\gamma \frac{k\lambda\ dl}{r}=\int_0^{2\pi}\frac{k\lambda\ ad\phi}{\sqrt{a^2+z^2}}=\frac{k2\pi a\sigma\ dz}{\sqrt{a^2+z^2}}$

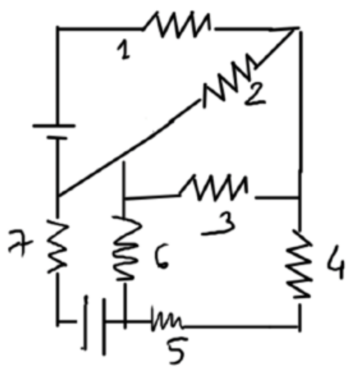
Quindi

$$\varphi(\vec{r}_{q_0})=\int_0^a dz\frac{k2\pi a\sigma}{\sqrt{a^2+z^2}}=k2\pi a\sigma\int_0^a dz\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}=k2\pi a\sigma\ln|z+\sqrt{a^2+z^2}\Big|_0^a=$$

$$k2\pi a\sigma\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+a^2}}{a}\right|=k2\pi a\sigma\ln(1+\sqrt{2})=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\ln(1+\sqrt{2})$$

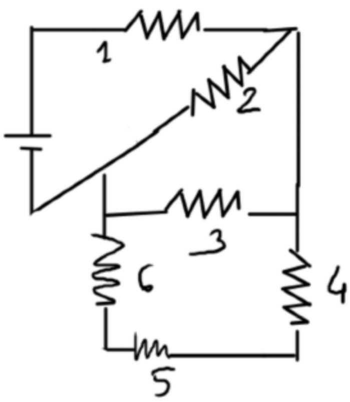
L'energia potenziale della particella e' $E_p=q_0\varphi=q_0\ k2\pi a\sigma\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=\frac{q_0Q}{4\pi\epsilon_0 a}\ln(1+\sqrt{2}).$

Quesito 4: (fino a 10) Il circuito in figura si trova in condizioni di funzionamento di regime; si calcoli la potenza erogata dal generatore e la carica sulle armature del condensatore. Si assuma R1=R3=R5=2kΩ, R2=R4=3kΩ, R6=R7=1kΩ, ε=30 V, C=20nF.

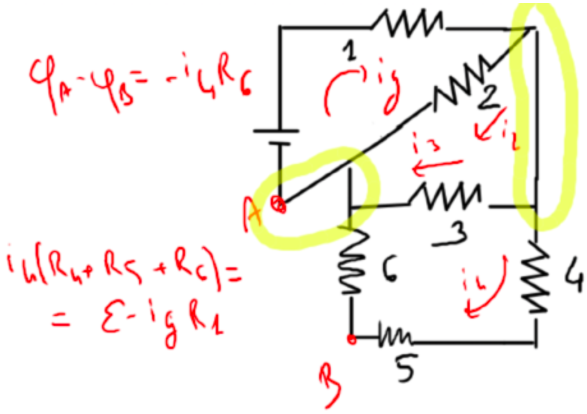


A regime non circola corrente nel ramo del condensatore che sara' completamente carico (si veda lo schema 1). La potenza erogata dal

generatore e' $P_{erogata} = \epsilon i_g$, occorre quindi calcolare la corrente che scorre nel ramo del generatore. La carica sulle armature del condensatore e' $Q_C = C(\varphi_A - \varphi_B)$ (si veda schema 2).
I due nodi sono indicati in giallo nello schema 2.
La differenza di potenziale tra i due nodi e' uguale e $\epsilon - i_g R_1$ ma anche a $i_4(R_4 + R_5 + R_6)$.
Inoltre



SCHEMA 1. CIRCUITO A REGIME



SCHEMA 2. NODI E CORRENTI A REGIME

$$\varphi_A - \varphi_B = -i_4 R_6 = \frac{i_g R_1 - \epsilon}{R_4 + R_5 + R_6} R_6$$

da cui si dedicano le relazioni

$$Q_C = -C i_4 R_6 = \frac{i_g R_1 - \epsilon}{R_4 + R_5 + R_6} C R_6.$$

La resistenza eq del circuito si ricava con queste considerazioni:
$R_4,\ R_5,\ R_6$ sono in serie. Inoltre $R_2,\ R_3$ sono in parallelo e ancora in parallelo con la serie $R_{456} = R_4 + R_5 + R_6 = 6\ \text{k}\Omega$. Quindi $R_{2,\ldots,6} = \dfrac{R_{456} R_2 R_3}{(R_2 + R_3)(R_{456} + (R_2 R_3)/(R_2 + R_3))} =$

$$R_{2,\ldots,6} = \frac{R_{456} R_2 R_3}{(R_2 + R_3) R_{456} + R_2 R_3} = \frac{6000 \times 2000 \times 3000}{5000 \times 6000 + 2000 \times 3000} = 1\ \text{k}\Omega.$$

Infine,
$R_{eq} = R_1 + R_{2,\ldots,6} = 3\ \text{k}\Omega$. Quindi $i_g = \epsilon / R_{eq} = 30/3000\ \text{A} = 10\ \text{mA}.$
$P_{erogata} = \epsilon i_g = 200\ \text{mW}.$

$$Q_C = \frac{i_g R_1 - \epsilon}{R_4 + R_5 + R_6} C R_6 = \frac{0.01 \times 2000 - 30}{6000} 2 \times 10^{-8} \times 1000\ \text{C} = 3.33\ \text{nC}.$$

Quesito 5: (fino a 8)
Si discuta un argomento a scelta tra i seguenti:
- Descrivere l'interazione tra i due dipoli elettrici $\vec{p}_1 = p_0 \hat{z}$ e $\vec{p}_2 = -p_0 \hat{z}$ collocati il primo nell'origine e il secondo alla distanza a lungo l'asse z o lungo l'asse x.
- Si dimostri che il quadrato del modulo del campo elettrico è proporzionale a una densità volumetrica di energia elettrostatica.
- Si discuta la legge di Ohm come conseguenza di un semplice modello di conduzione elettrica.