Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 69 - a.a. 2024-2025

Quesito 1 (fino a 10)
Calcolare il coefficiente di auto induzione di un solenoide ideale di raggio R=5 cm e densita' lineare di spire pari a n=10^5/m. Si calcoli inoltre il potenziale vettore in tutti i punti dello spazio se il filamento e' percorso da una corrente stazionaria pari a 1 A.

Il campo prodotto dal solenoide in ogni punto interno e' pari a $\vec{B} = \mu_0 n i \hat{z}$. Il flusso concatenato con una singola spira del solenoide e' $\Phi_{1s}(\vec{B}) = \pi R^2 \mu_0 i n$. Il flusso concatenato con tutto i solenoide interno e' $\Phi_{sol}(\vec{B}) = n^2 h \pi R^2 \mu_0$, dove h e' la lunghezza molto grande del solenoide. Perciò la auto-induttanza del circuito, definita da $L = \Phi(\vec{B})/i$,
$L = n^2 h \pi R^2 \mu_0$, Quindi la auto-induttanza per unita' di lunghezza risulta pari a $L = \pi n^2 \mu_0 R^2$.

Per il calcolo del potenziale vettore occorre ricordare che $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ e che
$\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{V_\infty} \dfrac{\vec{J}(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ di conseguenza il potenziale vettore, funzione solo della distanza dall'asse del solenoide (per simmetria) risulta perpendicolare alla direzione z e parallelo a $\hat{\phi}$; ossia $\vec{A} \parallel \vec{J} \parallel \hat{\phi}$ e $\vec{A} \perp \vec{B}$.
Pertanto, dato un circuito chiuso circolare C contenuto in un piano perpendicolare all'asse del solenoide e con centro sull'asse, orientato in verso antiorario, il modulo di A assume sempre lo stesso valore in tutti i punti di C ed e' possibile scrivere

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \oint_C A(r)\hat{\phi}\cdot dl\hat{\phi} = A(r)2\pi r.$$

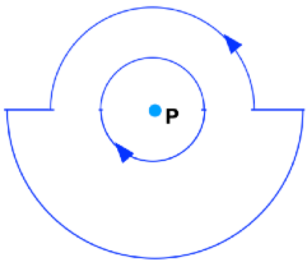
Inoltre per il teorema di Stokes, chiamata Σ_C una arbitraria superficie che abbia come bordo C, si ha

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma_C} \nabla\wedge\vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma_C} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma_C} \mu_0 i n\hat{z}\cdot ds\hat{z} = \begin{cases} \mu_0 i n \pi r^2 & r < R \\ \mu_0 i n \pi R^2 & r \geq R \end{cases}$$

Eguagliando le due espressioni della circuitazione di A si ottiene:

$$\vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i n r}{2}\hat{\phi} & r < R \\ \dfrac{\mu_0 i n R^2}{2r}\hat{\phi} & r \geq R \end{cases}$$

Quesito 2 (fino a 10 punti)
Calcolare il campo magnetico prodotto nel punto P, centro di curvatura di tutti i tratti di circonferenza che compongono i due circuiti percorsi entrambi dalla corrente i che scorre nel verso indicato dalle frecce in figura. I raggi di curvatura sono R per il percorso circolare e 2R e 3R per il circuito esterno



Si applica la 2a formula di Laplace ai due circuiti.

Il circuito interno da $\vec{B}_i(0) = -\dfrac{\mu_0 i}{4\pi}\displaystyle\oint \dfrac{Rd\phi\hat{\phi}\wedge(-R\hat{r})}{R^3} = -\dfrac{\mu_0 i}{2R}\hat{z}$.

Il circuito esterno invece

$$\vec{B}_e(0) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{2Rd\phi\hat{\phi}\wedge(-2R\hat{r})}{8R^3} + \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-pi}^{0} \frac{3Rd\phi\hat{\phi}\wedge(-3R\hat{r})}{27R^3} = \frac{\mu_0 i}{8R}\hat{z} + \frac{\mu_0 i}{12R}\hat{z}.$$

Il campo complessivo e' quindi $\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 i}{R}\hat{z}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) = -\frac{7\mu_0 i}{24R}\hat{z}$

Quesito 3 (fino a 10 punti)

Un fascio di ossigeno 4 volte ionizzato attraversa una d.d.p di 5 MV e successivamente entra in un campo magnetico uniforme di modulo pari a 1.5 T diretto perpendicolarmente alla velocità del fascio. Calcolare la distanza tra le traiettorie degli isotopi ^{16}O e ^{18}O dopo che il fascio ha percorso una semicirconferenza. Si ricordi che l'ossigeno ha numero atomico Z=8.

Stimiamo la massa degli ioni ^{16}O e ^{18}O come 16 e 18 volte la massa del protone: 26.72 e 30.06 $\times 10^{-27}\mathrm{kg}$. La carica di entrambi gli ioni e' 4e = 6.4 x 10^{-19} C.

Accelerati da una ddp di 5 MV, ogni ione acquista una energia cinetica pari all'energia potenziale iniziale $4e\Delta V$ = 20 MeV = $32\times10^{6}\times10^{-19}$ J. Nel campo magnetico uniforme percorrono traiettorie circolari di raggio dato dall'eguaflianza della forza centripeta cn la forza di Lorentz:

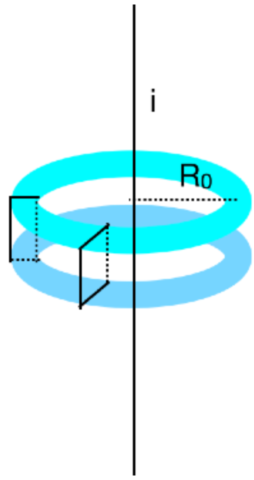
$m\frac{v^2}{R} = 4evB.$ Pertanto $R = \frac{mv}{4eB} = \frac{m}{4eB}\sqrt{\frac{2U_p}{m}} = \frac{1}{4eB}\sqrt{2U_p m}.$

$$R_{^{18}O} - R_{^{16}O} = \frac{\sqrt{2U_p}}{4eB}\left(\sqrt{m_{^{18}O}} - \sqrt{m_{^{16}O}}\right) = \frac{\sqrt{6.4\times10^{-12}}}{6\times1.6\times10^{-19}}\times10^{-13}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2.67}\right)$$

$\simeq 2.6\ \mathrm{cm}$

Quesito 4 (fino a 12 punti)

Si calcoli il flusso del campo magnetico prodotto da un filo rettilineo di lunghezza infinita parallelo all'asse z, percorso dalla corrente di I_0 = 50 A concatenato con un avvolgimento costituito da 10^5 spire collocate su un toro circolare di raggio medio R_0=8.5 cm a sezione rettangolare di lati 3 cm (in direzione z) e 1 cm in direzione radiale il cui centro è un punto del filo conduttore. Se la corrente nel filo rettilineo varia nel tempo secondo la legge $I(t) = I_0\cos^2(\omega t)$ con ω=2πν e ν=10 Hz, stimare la corrente indotta nella bobina toroidale assumendo che essa abbia una resistenza ohmica di 10 Ω.



Il filo percorso da corrente produce il campo magnetico $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi}$. Per una singola spira rettangolare il flusso del campo e'

$$\Phi(\vec{B})_{1s} = \int B(r)\hat{\phi}\cdot a\,dr\,\hat{\phi} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi}\ln\left(\frac{R_0 + b/2}{R_0 - b/2}\right).$$

Quindi il flusso complessivo attraverso il toro e'

$\Phi(\vec{B})_{toro} = N\Phi(\vec{B})_{1s} = N\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R_0 + b/2}{R_0 - b/2}\right)i(t)$. Per la legge di Faraday Neumann nel flamenco della bobina toroidale si avrà una forza elettromotrice indotta e quindi una corrente indotta pari a

$$i_{ind} = -\frac{1}{R_\Omega}\frac{d\Phi(\vec{B})_{toro}}{dt} = \frac{N}{R_\Omega}\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R_0 + b/2}{R_0 - b/2}\right)2I_0\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) =$$

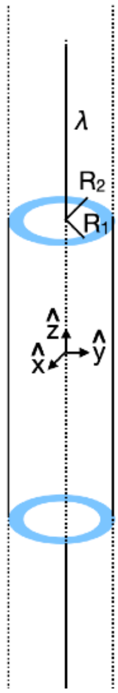
$$= \frac{10^5}{10}\frac{4\pi\times10^{-7}\ 0.03}{2\pi}\ln\left(\frac{9}{8}\right)\times50\times2\pi\times10\sin(2\omega t) =$$

$$= 10^5\times4\pi\times10^{-7}\ 0.03\ln\left(\frac{9}{8}\right)\times50\sin(2\omega t) = 22\times10^{-3}\ \mathrm{A}\ \sin(125.7t)$$

Quesito 5 (fino a 12 punti)

In figura e' rappresentato un filo infinito con densita' di carica uniforme λ e una distribuzione di corrente uniforme $\overrightarrow{J} = J_0\hat{z}$ compresa tra R_1 e R_2. Si calcoli la forza su una carica puntiforme q_0 con velocita' $\overrightarrow{v} = v_0\hat{z}$ a distanza r dall'asse per i casi:

1) $r < R_1$
2) $R_1 < r < R_2$
3) $R_2 < r$



Il campo elettrico in ogni punto dello spazio vale $\overrightarrow{E}\,\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$ dove $\hat{r}$ e' il versore che indica la direzione in cui cresce la distanza r dall'asse di simmetria cilindrica del sistema. Il campo magnetico puo' essere calcolato applicando la legge di Ampere, tenuto conto della simmetria cilindrica delle sorgenti che implica che $\overrightarrow{B} = B(r)\hat{\phi}$.

Si ottiene $$\begin{cases} \overrightarrow{B} = 0 & r < R_1 \\ \overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\hat{\phi} & R_1 \le r \le R_2 \\ \overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2r}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\hat{\phi} & r \ge R_2 \end{cases}$$

La forza su una carica puntiforme immersa in un campo elettrico e magnetico e' $\overrightarrow{F} = q_0\overrightarrow{E} + q_0\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$.

Quindi per $\overrightarrow{v} = v_0\hat{z}$, si ha

$$\begin{cases} \overrightarrow{F} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} & r < R_1 \\ \overrightarrow{F} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} - \frac{q_0\mu_0 J_0 v_0}{2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\hat{r} & R_1 \le r \le R_2 \\ \overrightarrow{F} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} - \frac{q_0\mu_0 J_0 v_0}{2r}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\hat{r} & r \ge R_2 \end{cases}$$

Per $\overrightarrow{v} = v_0\hat{r}$, si ha

$$\begin{cases} \overrightarrow{F} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} & r < R_1 \\ \overrightarrow{F} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} - \frac{q_0\mu_0 J_0 v_0}{2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\hat{z} & R_1 \le r \le R_2 \\ \overrightarrow{F} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} - \frac{q_0\mu_0 J_0 v_0}{2r}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\hat{z} & r \ge R_2 \end{cases}$$

Quesito 6 (fino a 8 punti)

Si discuta uno degli argomenti elencati:

4) Equivalenza tra una spira percorsa da corrente e un dipolo magnetico;
5) Analogie tra il potenziale elettrostatico e il potenziale vettore;
6) Densita' di corrente di spostamento;
7) Derivazione della legge di Faraday Neumann in forma differenziale dall'espressione integrale.

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $\quad d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\ dV$