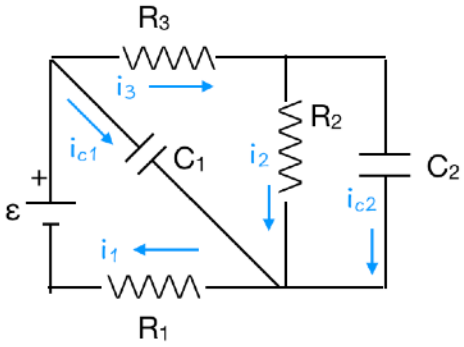
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 69 - a.a. 2024-2025

Quesito 1 (fino a 12 punti)
Considerato il circuito in figura, in funzione da molto tempo,



1) si calcoli il valore di tutte le correnti e il rapporto tra l'energia immagazzinata nei due condensatori U1/U2.

2) Si scrivano (senza risolvere) equazioni ai nodi e alle maglie sufficienti a determinare tutte le correnti in funzione del tempo (si considerino i condensatori scarichi all'accensione del circuito).

Si considerino i valori: ε=10 V, R1=R2=2R3 = 1 kΩ , C1 = 5C2 = 1 nF.

Il circuito in funzione da molto tempo e' assimilabile a un'unica maglia costituita dalle tre resistenze in serie connesse al generatore:

$i_1 = i_2 = i_3 = i_g = \dfrac{\epsilon}{R_1 + R_2 + R_3} = 10\ \text{V}/2500\ \Omega = 4\ \text{mA}.$ La ddp ai capi di C1 e'

$V_1 = \epsilon - i_g R_1 = 10\ \text{V} - 4\ \text{mA} \times 1\ \text{k}\Omega = 6\ \text{V}$, mentre la ddp ai capi di C2 e'

$V_2 = i_g R_2 = 4\ \text{mA} \times 1\ \text{k}\Omega = 4\ \text{V}$

1) U1/U2 = $\dfrac{C_1 V_1^2}{C_2 V_2^2} = 5\dfrac{6^2}{4^2} = 11.25$

2) Nella fase transiente le correnti $i_1,\ i_{C_1}, i_3, i_2,\ i_{C_2}$ dipendono dal tempo e sono correlate alle cariche sulle armature dei condensatori: in particolare $Q_1 = C_1 V_1 = \int_0^t i_{C_1}(t')dt'$ inoltre $Q_2 = C_2 V_2 = \int_0^t i_{C_2}(t')dt'$. Per determinarle dobbiamo scrivere 5 equazioni indipendenti equazioni ai nodi e alle maglie. Le equazioni ai nodi sono $\begin{cases} i_1 = i_{C_1} + i_3 \\ i_3 = i_{C_2} + i_2 \end{cases}$. Le equazioni alle maglie sono

$$\begin{cases} \epsilon = \frac{1}{C_1}\int_0^t i_{C_1}(t')dt' + i_1(t)R_1 \\ \epsilon = i_3(t)R_3 + i_2(t)R_2 + i_1(t)R_1 \\ i_2(t)R_2 = \frac{1}{C_2}\int_0^t i_{C_2}(t')dt' \\ \epsilon = i_3(t)R_3 + \frac{1}{C_2}\int_0^t i_{C_2}(t')dt' + i_1(t)R_1 \\ \frac{1}{C_1}\int_0^t i_{C_1}(t')dt' = i_1(t)R_1 + i_2(t)R_2 \end{cases}$$

Basta combinare 3 delle equazioni alle maglie le 2 equazioni ai nodi per determinare tutte le 5 correnti risolvendo un sistema di equazioni differenziali.

Quesito 2 (fino a 12 punti)

Un nucleo di Ferro (numero atomico Z=26) puo' essere descritto come una distribuzione sferica uniforme di carica con raggio R=4 fm (1 fm = 10^{-15} m). Un protone si avvicina al nucleo in direzione radiale e ne raggiunge la superficie alla velocità *v.* Quale deve essere il valore minimo di di *v* affinché il protone raggiunga il centro del nucleo di Ferro. Si ricordi che la massa del protone e' m_p = 1.67 x 10^{-27} kg.

Il nucleo di ferro e' approssimato come una distribuzione uniforme di carica positiva e forma sferica, con densità di carica $\rho = 26e/(\frac{4}{3}\pi R^3) = \frac{26 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 3}{4\pi\ 4^3 \times 10^{-15\times 3}}$ = 0.155 x 10^{26} C/m^3.

Il protone ha energia iniziale pari a $E_i = \frac{1}{2}m_p v^2 + e\varphi(R)$. La velocità v minima affinché il p raggiunga il centro del nucleo e' $E_i = \frac{1}{2}m_p v^2 + e\varphi(R) = e\varphi(0) = E_f$.

Quindi $v = \sqrt{2e(\varphi(0) - \varphi(R))/m_p}$.

Occorre quindi calcolare il campo elettrico e quindi il potenziale elettrostatico all'interno di una sfera uniformemente carica.

Con la legge di Gauss applicata a una superficie sferica di raggio r<R si ha che E(r) =

$$E(r) = \frac{\rho 4\pi r^3}{3 \times 4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

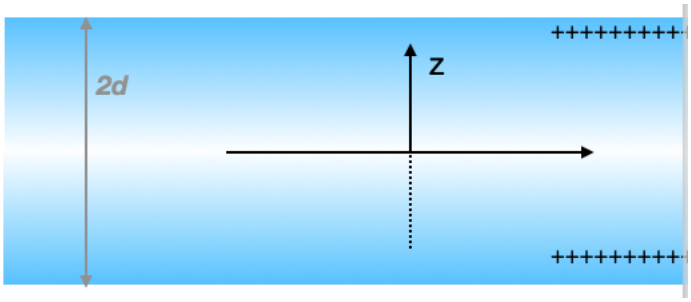
Allora $\varphi(0) - \varphi(R) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\int_0^R r\hat{r} \cdot dr\hat{r} = \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{0.155 \times 10^{26} \times 16 \times 10^{-30}}{6 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 4.68 \times 10^6$ V

Qundi $v = \sqrt{2 \times 1.6 \times 10^{-19} 4.68 \times 10^6)/1.67 \times 10^{-27}} \simeq 3 \times 10^7$ m/s. Il valore di questa velocità e' grande a sufficienza da richiedere l'uso di formule che tengano conto degli effetti relativistici e quindi quest astima e' da considerarsi solo un'indicazione.

Quesito 3 (fino a 12)

Si consideri uno strato planare di materiale isolante di spessore 2d=2cm e area delle facce parallele molto grande. All'interno dello strato è distribuita della carica con densità volumetrica variabile con la profondità z nel mezzo secondo la legge ρ=ρ0(z/d)^2 [lo zero dell'asse z sia sul piano equidistante dalle due facce di grande area dello strato di materiale]. Se ρ0 vale 100μC/m^3 si determini il potenziale elettrostatico in ogni punto dello spazio (z<-d, -d<z<d, z>d) e si dimostri che vale l'equazione di Poisson.

Si imponga che il potenziale sia nullo a z=|d|.



Per calcolare il campo elettrico si osserva che la distribuzione di carica e' invariante per traslazioni nella direzione x e y, quindi il campo (e il potenziale) puo' dipendere solo da z e sara' diretto come z: $\varphi(x,y,z)=\varphi(z)$; $\vec{E}=E(z)\hat{z}$. Inoltre, dato che $\rho(-z)=\rho(z)$, la componente E(z) del campo sara' una funzione dispari della coordinata z, cioè $E(-z)=-E(z)$ e quindi $\vec{E}(-z)=-\vec{E}(z)$. E' chiaro che il campo e' nullo a z=0, dato che la quantità di carica a z>0, e' uguale a quella a z<0. E' possibile considerare una superficie geometrica S chiusa cilindrica con una base nel piano z=0 e l'altra alla coordinata z a cui si vuole calcolare il valore del campo.

Il flusso del campo elettrico attraverso S sara' $\Phi(\vec{E})_S=\int_{B_z} E(z)\hat{z}\cdot ds\hat{z}$ dove Bz e' la base sul piano alla quota z; il contributo al flusso della superficie laterale e' nullo perche' sulla superficie laterale il campo e' perpendicolare agli elementi di superficie ($ds\hat{r}\perp\hat{z}$). Inoltre il contributo al flusso della base a z=0 e' nullo perche' il campo e' nullo.

Quindi se z>d dall'applicazione della legge di Gauss si ha

$$\Phi(\vec{E})_S=E(z)A=Q_{int}(S)/\epsilon_0=\frac{1}{\epsilon_0}\int_0^d dzA\rho_0 z^2/d^2=\frac{A\rho_0}{d^2\epsilon_0}\frac{z^3}{3}\Big|_0^d=\frac{A\rho_0 d}{3\epsilon_0}.$$

Se invece 0<z<d allora

$$\Phi(\vec{E})_S=E(z)A=Q_{int}(S)\epsilon_0=\frac{1}{\epsilon_0}\int_0^z dzA\rho_0 z^2/d^2=\frac{A\rho_0}{d^2\epsilon_0}\frac{z^3}{3}.$$

Pertanto $\vec{E}=\begin{cases}\frac{d\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z} & z>d\\ \frac{z^3\rho_0}{3\epsilon_0 d^2}\hat{z} & |z|<d\\ -\frac{d\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z} & z<-d\end{cases}$

Il potenziale elettrostatico sara' dato da

$$\varphi(z>d)-\varphi(z=d)=-\int_d^z\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_d^z\frac{d\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z}\cdot dz\hat{z}=-\frac{d\rho_0(z-d)}{3\epsilon_0}=-\frac{d\rho_0(|z|-d)}{3\epsilon_0}$$

$$\varphi(0<z<d)-\varphi(z=d)=\int_z^d\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_z^d\frac{\rho_0 z^3}{3\epsilon_0 d^2}\hat{z}\cdot dz\hat{z}=\frac{\rho_0(d^4-z^4)}{12\epsilon_0 d^2}.$$

Dalla simmetria della densita' volumetrica di carica segue la simmetria rispetto a z del potenziale elettrostatico: $\varphi(-z)=\varphi(z)$. IN ogni caso calcoliamo espressamente

$$\varphi(z<-d)-\varphi(z=-d)=\int_z^{-d}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_z^{-d}\frac{d\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z}\cdot dz\hat{z}=-\frac{d\rho_0(-d-z)}{3\epsilon_0}=-\frac{d\rho_0(|z|-d)}{3\epsilon_0}$$

Quindi

$$\varphi(z)=\begin{cases}-\frac{d\rho_0(|z|-d)}{3\epsilon_0}=-\frac{8\pi\times10^{-6}\,9\times10^9(|z|-0.01)}{3}=-24\pi\times10^3(|z|-0.01)\simeq-75\text{ kV}(|z|-0.01) & |z|>d\\ \frac{\rho_0}{12\epsilon_0}(d^2-\frac{z^4}{d^2})=\frac{100\pi\times10^{-6}\,9\times10^9}{3}(d^2-\frac{z^4}{d^2})=0.3\,\left(d^2-\frac{z^4}{d^2}\right)\text{ MV} & |z|<d\end{cases}$$

Il potenziale a z=0 vale

$\varphi(z=0)=300\pi\times10^3 d^2=30\pi\simeq94$ V.

A |z|>0 il potenziale e' lineare con z => la derivata seconda e' zero, ma anche la densita' di carica e' nulla, quindi risulta verificata l'eq di Poisson. A |z|<d,

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\rho_0}{12\epsilon_0 d^2}4z^3\right)=-\frac{\rho_0}{\epsilon_0 d^2}z^2=-\frac{\rho(z)}{\epsilon_0}.$$

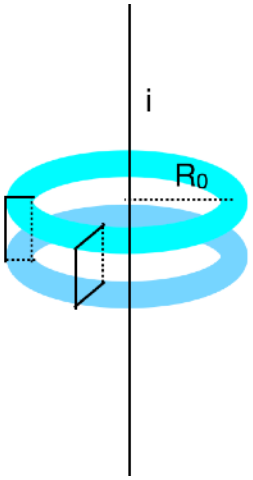
Un protone prodotto a z=0 con velocita' nulla ha energia meccanica totale = energia potenziale elettrostatica = $e\varphi(d) = 0$. Quindi per la conservazione dell'energia meccanica a z=10d la somma dell'energia potenziale e cinetica dovrà essere nulla, quindi

$$\frac{1}{2}m_p v^2 = -e\varphi(10d) = 75\ \text{keV}(0.1 - 0.01) = 6.75\ \text{KeV} = 10.8 \times 10^{-16}\ \text{J}$$

Quindi $v = \sqrt{\frac{2 \times 10.8 \times 10^{-16}}{1.67 \times 10^{-27}}}$ = 1.14 x 10^6 m/s

Quesito 4 (fino a 12 punti)

Si calcoli il flusso del campo magnetico prodotto da un filo rettilineo di lunghezza infinita parallelo all'asse z, percorso dalla corrente di I_0 = 20 A concatenato con un avvolgimento costituito da 10^4 spire collocate su un toro circolare di raggio medio R_0=10.5 cm a sezione rettangolare di lati 3 cm (in direzione z) e 1 cm in direzione radiale il cui centro è un punto del filo conduttore. Se la corrente nel filo rettilineo oscilla nel tempo secondo la legge $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ con τ=1s, stimare la corrente indotta nella bobina toroidale assumendo che essa abbia una resistenza ohmica di 50 Ω.



Il filo percorso da corrente produce il campo magnetico $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi}$. Per una singola spira rettangolare il flusso del campo e'

$$\Phi(\vec{B})_{1s} = \int B(r)\hat{\phi} \cdot a\, dr\hat{\phi} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln\left(\frac{R_0 + b/2}{R_0 - b/2}\right).$$

Quindi il flusso complessivo attraverso il toro e'

$\Phi(\vec{B})_{toro} = N\Phi(\vec{B})_{1s} = N\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R_0 + b/2}{R_0 - b/2}\right) i(t)$. Per la legge di Faraday Neumann nel flamenco della bobina toroidale si avrà una forza elettromotrice indotta e quindi una corrente indotta pari a

$$i_{ind} = -\frac{1}{R_\Omega}\frac{d\Phi(\vec{B})_{toro}}{dt} = \frac{N}{R_\Omega \tau}\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R_0 + b/2}{R_0 - b/2}\right) i_0 e^{-t/\tau} =$$

$$= \frac{10^4}{50 \times 1}\frac{4\pi \times 10^{-7}\ 0.03}{2\pi} \ln\left(\frac{11}{10}\right) 20e^{-t} = \frac{2}{10}\frac{2 \times 10^{-3}\ 0.03}{1} \ln\left(\frac{11}{10}\right) 2e^{-t} =$$

$$= \text{s}10^{-4}\ 0.24 \ln\left(\frac{11}{10}\right) e^{-t} = 2.3\ e^{-t}\ \mu\text{A}$$

Quesito 6 (fino a 8 punti)

Si discuta uno degli argomenti elencati:

1) Si discuta l'interazione tra due dipoli paralleli o anti-paralleli l'uno all'altro collocati sullo stesso asse e allineati ad esso;

OPERATORI DIFFERENZIALI ED ELEMENTI DI LINEA, SUPERFICIE E VOLUME

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi})\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Laplaciano		$(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\rho}} +$	$(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\mathbf{r}} +$

2) Si discuta l'invarianza di gauge del campo elettromagnetico
3) Si presenti la definizione di corrente elettrica e la legge di Ohm. Si dimostri la legge di Ohm utilizzando il modello di conduzione di Drude.
4) Si discuta la legge di Ampere e suo utilizzo per il calcolo del campo magnetico (condizioni di applicabilità per distribuzioni di corrente a simmetria cilindrica)

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_n \simeq m_p$, $M_{He} \simeq 4\, m_p$

Campo $\vec{E}$ e potenziale prodotti da una carica puntiforme: $\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$; $\varphi(r) = \frac{kq}{r}$

Campo $\vec{E}$ e potenziale di dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$; $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\,dV$