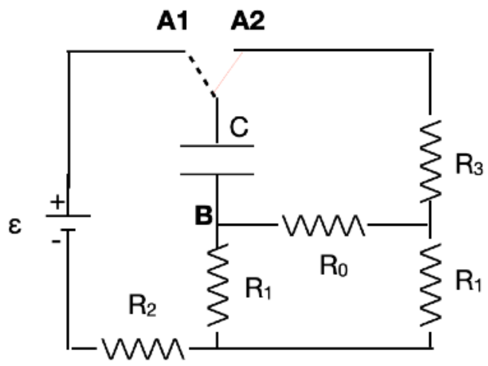
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 69 - a.a. 2024-2025

Quesito 1 **(fino a 12)**



Il circuito in figura funziona da molto tempo con l'interruttore chiuso sulla posizione A1.

1) Si stimi la carica sulle armature del condensatore in queste condizioni di funzionamento.
2) Si valuti per quanto tempo il circuito deve aver funzionato in questa modalità perché la carica sulle armature si possa considerare stabile entro 0.01 del suo valore asintotico.
3) Al tempo t_0 l'interruttore viene spostato sulla posizione A2. Si calcoli dopo quanto tempo la carica sulle armature del condensatore si riduce alla meta' di quella di partenza.
4) Si discuta il bilancio energetico del circuito nella fase di scarica.

Si considerino i valori seguenti dei parametri circuitali: R_0=R_1= 1kΩ, R_2=R_3= 2 kΩ, ε=10 V, C=200nF.

La resistenza del circuito di carica (interruttore chiuso su A1) è

$R_{carica} = R_2 + \dfrac{R_1(R_0 + R_1)}{R_0 + 2R_1}$ = 2.67 kΩ,

il tempo di carica $\tau_{carica} = R_{carica}C = 533\ \mu s$

La resistenza di scarica è $R_{scarica} = R_3 + \dfrac{2R_1R_0}{R_0 + 2R_1}$ = 2.67 kΩ e il tempo di scarica $\tau_{scarica} = R_{scarica}C = 533\ \mu s$.

1) Q = εC = 20 μC perche' a regime nel circuito di carica, dal momento che la corrente sara' nulla, tutta la ddp prodotta dal generatore sara- trasferita alle armature del condensatore.
2) $Q(t)/Q_\infty = 0.99 = 1 - e^{-t/\tau_{carica}}$. Quindi $t = -\tau_{carica} \ln 0.01 = 2.45$ ms
3) Nella scarica la corrente che scorre in R3 e' $i(t) = i_0 e^{-t/\tau_{scarica}}$, la carica e' $Q(t) = \epsilon C e^{-t/\tau_{scarica}}$, quindi $i(t) = -\dfrac{dQ}{dt} \rightarrow i_0 = \epsilon C/\tau_{scarica} = \epsilon/R_{scarica}$

Il tempo di dimezzamento della carica e' $t_{1/2} = -\tau_{scarica} \ln 0.5$ = 369 μs.

4) Nella fase di scarica, l'energia iniziale e' quella immagazzinata nel condensatore

$U_i = \dfrac{1}{2}C\epsilon^2$= 10μJ.

Questa deve essere la somma delle energia (integrale della potenza) dissipata per effetto Joule su ciascuna delle resistenze. Occorre tener conto che in ogni resistenza scorre una corrente diversa i3 in R3, i0 in R0 e i1 nella serie delle due resistenze R1, con i3 = i0+i1; inoltre per la legge di Ohm i0 R0 = 2 i1 R1.

Quindi

$$i_3 = i_0 + \frac{R_0}{2R_1}i_0 = \frac{2R_1 + R_0}{2R_1}i_0$$

$$i_3 = i_1 + \frac{2R_1}{R_0}i_1 = \frac{2R_1 + R_0}{R_0}i_1.$$

Ora ricordando che la corrente con cui su scarica il condensatore ha il seguente andamento con il tempo: $i_3 = \dfrac{\epsilon}{R_{scarica}}e^{-t/\tau_{scarica}}$ possiamo scrivere:

$$i_0 = i_3\frac{2R_1}{R_0 + 2R_1} = \frac{\epsilon}{R_{scarica}}\frac{2R_1}{R_0 + 2R_1}e^{-t/\tau_{scarica}}$$

$$i_1 = i_3 \frac{R_0}{R_0 + 2R_1} = \frac{\epsilon}{R_{scarica}} \frac{R_0}{R_0 + 2R_1} e^{-t/\tau_{scarica}}$$

Inoltre per una generica corrente i = A $e^{-t/\tau}$ che scorre nella resistenza R, l'energia dissipata e'

$$\int_0^\infty Ri(t)^2 dt = \frac{1}{2} R A^2 \tau.$$

Quindi vogliamo dimostrare che (*): $U_i = \frac{1}{2} C\epsilon^2 = \frac{\tau_{scarica}}{2} \left(i_3{}^2(0) R_3 + 2 i_1{}^2(0) R_1 + i_0{}^2(0) R_0 \right).$

Calcoliamo il secondo membro:

$$\frac{CR_{scarica}}{2} \left(i_3{}^2(0) R_3 + 2 i_1{}^2(0) R_1 + i_0{}^2(0) R_0 \right) =$$

$$\frac{\epsilon^2 C}{2R_{scarica}} \left(R_3 + 2R_1 \frac{R_0^2}{(R_0 + 2R_1)^2} + R_0 \frac{(2R_1)^2}{(R_0 + 2R_1)^2} \right).$$

Quindi la nostra relazione (*) che esprime il bilancio energetico è soddisfatta se:

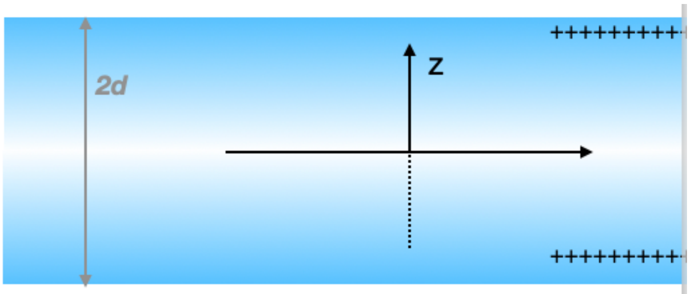
$R_{scarica} = R_3 + 2R_1 \frac{R_0^2}{(R_0 + 2R_1)^2} + R_0 \frac{(2R_1)^2}{(R_0 + 2R_1)^2}$, ossia

$$\frac{2R_1 R_0}{R_0 + 2R_1} = 2R_1 \frac{R_0^2}{(R_0 + 2R_1)^2} + R_0 \frac{4R_1^2}{(2R_0 + R_1)^2} = \frac{2R_0 R_1}{(R_0 + 2R_1)^2} (R_0 + 2R_1)$$

Come si voleva dimostrare.

Quesito 2 (fino a 12)

Si consideri uno strato planare di materiale isolante di spessore 2d=4cm e area delle facce parallele molto grande. All'interno dello strato è distribuita della carica con densità volumetrica variabile con la profondità z nel mezzo secondo la legge ρ=ρ0(z/d)² [lo zero dell'asse z sia sul piano equidistante dalle due facce di grande area dello strato di materiale]. Se ρ0 vale 200μC/m³ si determini il potenziale elettrostatico in ogni punto dello spazio (z<-d, -d<z<d, z>d). Con quale velocità un protone prodotto da fermo a z=d raggiunge a distanza z=10d ?



Per calcolare il campo elettrico si osserva che la distribuzione di carica e' invariante per traslazioni nella direzione x e y, quindi il campo (e il potenziale) puo' dipendere solo da z e sara' diretto come z: $\varphi(x, y, z) = \varphi(z)$; $\vec{E} = E(z)\hat{z}$. Inoltre, dato che $\rho(-z) = \rho(z)$, la componente E(z) del campo sara' una funzione dispari della coordinata z, cioè $E(-z) = -E(z)$ e quindi $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$. E' chiaro che il campo e' nullo a z=0, dato che la quantità di carica a z>0, e' uguale a quella a z<0. E' possibile considerare una superficie geometrica S chiusa cilindrica con una base nel piano z=0 e l'altra alla coordinata z a cui si vuole calcolare il valore del campo.

Il flusso del campo elettrico attraverso S sara' $\Phi(\vec{E})_S = \int_{B_z} E(z)\hat{z} \cdot ds\hat{z}$ dove Bz e' la base sul piano alla quota z; il contributo al flusso della superficie laterale e' nullo perche' sulla superficie laterale il campo e' perpendicolare agli elementi di superficie ($ds\hat{r} \perp \hat{z}$). Inoltre il contributo al flusso della base a z=0 e' nullo perche' il campo e' nullo.

Quindi se z>d dall'applicazione della legge di Gauss si ha

$$\Phi(\vec{E})_S = E(z)A = Q_{int}(S)/\epsilon_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^d dz A \rho_0 z^2/d^2 = \frac{A\rho_0}{d^2 \epsilon_0} \frac{z^3}{3} \Big|_0^d = \frac{A\rho_0 d}{3\epsilon_0}.$$

Se invece 0<z<d allora

$$\Phi(\vec{E})_S = E(z)A = Q_{int}(S)\epsilon_0 = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^z dz A\rho_0 z^2/d^2 = \frac{A\rho_0}{d^2\epsilon_0}\frac{z^3}{3}.$$

Pertanto $\vec{E} = \begin{cases} \frac{d\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z} & z > d \\ \frac{z^3\rho_0}{3\epsilon_0 d^2}\hat{z} & |z| < d \\ -\frac{d\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z} & z < -d \end{cases}$

Il potenziale elettrostatico sara' dato da

$$\varphi(z > d) - \varphi(z = d) = -\int_d^z \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_d^z \frac{d\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z}\cdot dz\hat{z} = -\frac{d\rho_0(z-d)}{3\epsilon_0} = -\frac{d\rho_0(|z|-d)}{3\epsilon_0}$$

$$\varphi(0 < z < d) - \varphi(z = d) = \int_z^d \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_z^d \frac{\rho_0 z^3}{3\epsilon_0 d^2}\hat{z}\cdot dz\hat{z} = \frac{\rho_0(d^4 - z^4)}{12\epsilon_0 d^2}.$$

Dalla simmetria della densita' volumetrica di carica segue la simmetria rispetto a z del potenziale elettrostatico: $\varphi(-z) = \varphi(z)$. IN ogni caso calcoliamo espressamente

$$\varphi(z < -d) - \varphi(z = -d) = \int_z^{-d} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_z^{-d} \frac{d\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z}\cdot dz\hat{z} = -\frac{d\rho_0(-d-z)}{3\epsilon_0} = -\frac{d\rho_0(|z|-d)}{3\epsilon_0}$$

Quindi

$$\varphi(z) = \begin{cases} -\frac{d\rho_0(|z|-d)}{3\epsilon_0} = -\frac{16\pi\times10^{-6}\ 9\times10^9(|z|-0.02)}{3} = -48\pi\times10^3(|z|-0.02) \simeq -150\ \text{kV}(|z|-0.02) & |z| > d \\ \frac{\rho_0}{12\epsilon_0}(d^2 - \frac{z^4}{d^2}) = \frac{200\pi\times10^{-6}\ 9\times10^9}{3}(d^2 - \frac{z^4}{d^2}) = 0.6\ \left(d^2 - \frac{z^4}{d^2}\right)\ \text{MV} & |z| < d \end{cases}$$

Il potenziale a z=0 vale

$$\varphi(z = 0) = 600\pi\times10^3 d^2 = 240\pi \simeq 754\ \text{V}$$

A |z|>0 il potenziale e' lineare con z => la derivata seconda e' zero, ma anche la densita' di carica e' nulla, quindi risulta verificata l'eq di Poisson. A |z|<d,

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\rho_0}{12\epsilon_0 d^2}4z^3\right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0 d^2}z^2 = -\frac{\rho(z)}{\epsilon_0}.$$

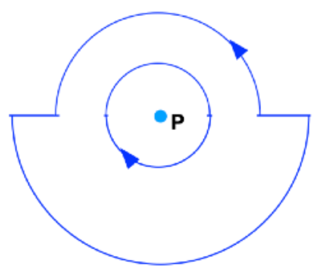
Un protone prodotto a z=0 con velocita' nulla ha energia meccanica totale = energia potenziale elettrostatica $= e\varphi(d) = 0$. Quindi per la conservazione dell'energia meccanica a z=10d la somma dell'energia potenziale e cinetica dovrà essere nulla, quindi

$$\frac{1}{2}m_p v^2 = -e\varphi(10d) = 150\ \text{keV}(0.2 - 0.02) = 27\ \text{KeV} = 43\times10^{-16}\ \text{J}$$

Quindi $v = \sqrt{\frac{2\times43\times10^{-16}}{1.67\times10^{-27}}}$ = 2.27 x 10^6 m/s

Quesito 3 (fino a 12 punti)

Calcolare il campo magnetico nel punto P, centro di curvatura di tutti i tratti di circonferenza che compongono i due circuiti percorsi entrambi da corrente i che scorre nel verso indicato dalle frecce in figura. I raggi di curvatura siano R per il percorso circolare e 2R e 3R per il circuito esterno.



Si applica la 2a formula di Laplace ai due circuiti.

Il circuito interno da $\vec{B}_i(0) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint\frac{Rd\phi\hat{\phi}\wedge(-R\hat{r})}{R^3} = -\frac{\mu_0 i}{2R}\hat{z}.$

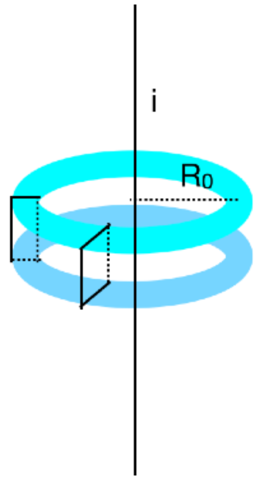
Il circuito esterno invece

$$\vec{B}_e(0) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{2Rd\phi\hat{\phi}\wedge(-2R\hat{r})}{8R^3} + \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-pi}^{0} \frac{3Rd\phi\hat{\phi}\wedge(-3R\hat{r})}{27R^3} = \frac{\mu_0 i}{8R}\hat{z} + \frac{\mu_0 i}{12R}\hat{z}.$$

Il campo complessivo e' quindi $\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 i}{R}\hat{z}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right) = -\frac{7\mu_0 i}{24R}\hat{z}$

Quesito 4 (fino a 12 punti)

Si calcoli il flusso del campo magnetico prodotto da un filo rettilineo di lunghezza infinita parallelo all'asse z, percorso dalla corrente di I_0 = 20 A concatenato con un avvolgimento costituito da 10^4 spire collocate su un toro circolare di raggio medio R_0=10.5 cm a sezione rettangolare di lati a=3 cm (in direzione z) e b=1 cm in direzione radiale il cui centro è un punto del filo conduttore. Se la corrente nel filo rettilineo oscilla nel tempo secondo la legge $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ con τ=1s, stimare la corrente indotta nella bobina toroidale assumendo che essa abbia una resistenza ohmica di 50 Ω.



Il filo percorso da corrente produce il campo magnetico $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi}$. Per una singola spira rettangolare il flusso del campo e'

$$\Phi(\vec{B})_{1s} = \int B(r)\hat{\phi}\cdot a\,dr\hat{\phi} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi}\ln\left(\frac{R_0+b/2}{R_0-b/2}\right).$$

Quindi il flusso complessivo attraverso il toro e'

$\Phi(\vec{B})_{toro} = N\Phi(\vec{B})_{1s} = N\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R_0+b/2}{R_0-b/2}\right)i(t)$. Per la legge di Faraday Neumann nel flamenco della bobina toroidale si avrà una forza elettromotrice indotta e quindi una corrente indotta pari a

$$i_{ind} = -\frac{1}{R_\Omega}\frac{d\Phi(\vec{B})_{toro}}{dt} = \frac{N}{R_\Omega \tau}\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R_0+b/2}{R_0-b/2}\right)i_0 e^{-t/\tau} =$$

$$= \frac{10^4}{50\times 1}\frac{4\pi\times 10^{-7}\ 0.03}{2\pi}\ln\left(\frac{11}{10}\right)20e^{-t} = \frac{2}{10}\frac{2\times 10^{-3}\ 0.03}{1}\ln\left(\frac{11}{10}\right)2e^{-t} = 10^{-4}\ 0.24\ln\left(\frac{11}{10}\right)e^{-t} = 2.3\ e^{-t}\ \mu\mathrm{A}$$

Quesito 6 (fino a 8 punti)

Si discuta uno degli argomenti elencati:

1) Si discuta l'interazione tra due dipoli paralleli o anti-paralleli l'uno all'altro collocati sullo stesso asse e allineati ad esso;
2) Si discuta l'invarianza di gauge del campo elettromagnetico
3) Si presenti la definizione di corrente elettrica e la legge di Ohm. Si dimostri la legge di Ohm utilizzando il modello di conduzione di Drude.
4) Si discuta la legge di Ampere e suo utilizzo per il calcolo del campo magnetico (condizioni di applicabilità per distribuzioni di corrente a simmetria cilindrica) Si discuta uno degli argomenti elencati:

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_n \simeq m_p$, $M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\overrightarrow{E}$ e potenziale prodotti da una carica puntiforme: $\overrightarrow{E}(r) = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$; $\varphi(r) = \frac{kq}{r}$

Campo $\overrightarrow{E}$ e potenziale di dipolo: $\overrightarrow{E}(r,\vartheta) = k\,\frac{3(\overrightarrow{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{p}}{r^5}$; $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\overrightarrow{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Campo $\overrightarrow{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\overrightarrow{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\overrightarrow{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{m}}{r^5}$;

Formule di Laplace: $d\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\overrightarrow{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $d\overrightarrow{F} = \overrightarrow{J}\wedge\overrightarrow{B}\,dV$