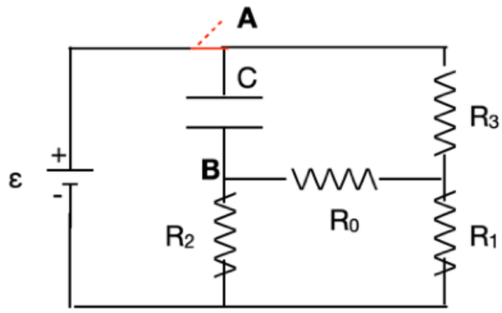
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 69 - a.a. 2024-2025

Quesito 1 **(fino a 10) - da 46**

Si calcoli la differenza di potenziale a regime tra i punti A e B del circuito in figura tenendo conto dei seguenti parametri:
ε = 100V, R0 = 2000 Ω, R1 = 500 Ω, R2 = 500 Ω,
R3 = 1kΩ, C=200 pF.
Si calcoli l'energia dissipata sul resistore 0 nella fase di scarica del condensatore che avviene quando l'interruttore rosso (nella prima fase chiuso su A da molto tempo) viene aperto (tratteggiato).



Nella prima fase, nel circuito a regime il condensatore si comporta come un interruttore aperto, perciò la corrente che scorre nel ramo del generatore puo' essere calcolata come $i_g = \epsilon / R_{eq}$ dove $R_{eq} = R_3 + (R_0 + R_2)R_1/(R_0 + R_2 + R_1)$ = 1417 Ω. Quindi $i_g = 100\ V\ /\ 1417\ \Omega = 70.6$ mA. Questa corrente scorre anche in R3 e poi si divide nel ramo in c'e' la resistenza R1 e nel ramo delle resistenze R0 e R2, secondo le relazioni: $i_g = i_1 + i_{02}; \quad i_{02}(R_0 + R_2) = i_1 R_1$. Quindi
$i_{02} = i_g/(1 + R_0/R_1 + R_2/R_1)$ = 11.76 mA e
$i_1 = i_g - i_{02} = 70.6 - 11.76 = 58.8\ A$. La differenza di potenziale tra A e B e' quindi $V_A - V_B = i_{02}R_0 + i_g R_3$ = 94.12 V. L'energia dissipata su R1 nella fase di scarica sara' $E_{Joule,R1} = \int_0^\infty dt R_1 i_{12}^2(t)$. La corrente i_{12} e' la corrente che scorre nella serie di R1 e R2 del circuito di scarica. Questo circuito ha una resistenza equivalente
$R'_{eq} = R_3 + R_0(R_1 + R_2)/(R_0 + R_1 + R_2)$ = 1667 Ω. La corrente che scorrera' in R3, e si ripartirà nei due rami in parallelo con R1+R2 e con R0, avra' l'andamento tipico esponenziale $i_3(t) = \dfrac{V_A - V_B}{R'_{eq}} e^{-t/(R'_{eq}C)} = 56.5 e^{-t/(R'_{eq}C)}$ mA. L'energia complessiva che sara' dissipata nella scarica del condensatore e'pari a quella immagazzinata nel condensatore, ossia
$E_{Joule,tot} = CV_{AB}^2/2 = 2 \times 10^{-10} F \times (94.1 \times V)^2/2 = 0.885 \times 10^{-6}$ J.
Per le correnti valgono le seguenti relazioni: $i_{12} + i_0 = i_3; \quad i_0 R_0 = i_{12}(R_1 + R_2)$, quindi
$i_{12} = i_3 - i_{12}(R_2 + R_1)/R_0; \quad i_{12}(t) = i_3(t)/(1 + R_2/R_0 + R_1/R_0) = 37.7^{-t/(R'_{eq}C)}$ mA.
Il tempo do decadimento inoltre e' $\tau = R'_{eq}C = 1667 \times 2 \times 10^{-10}$ s $= 333$ ns
L'energia dissipata su R1 sara'
$$E_{Joule,R1} = \int_0^\infty R_1 i_{12}^2(t) dt = 1000 \times 37.7^2 \times 10^{-6} \times 333 \times 10^{-9}/2. = 0.24\ \mu\mathrm{J}$$

Quesito 2 (fino a 10 punti)

Un nucleo di Ferro (numero atomico Z=26) puo' essere descritto come una distribuzione sferica uniforme di carica con raggio R=4 fm (1 fm = 10^{-15} m). Un protone si avvicina al nucleo in direzione radiale e ne raggiunge la superficie alla velocità *v.* Quale deve essere il valore minimo di di *v* affinché il protone raggiunga il centro del nucleo di Ferro. Si ricordi che la massa del protone e' $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg.

Il nucleo di ferro e' approssimato come una distribuzione uniforme di carica positiva e forma sferica, con densità di carica $\rho = 26e/(\frac{4}{3}\pi R^3) = \frac{26 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 3}{4\pi\ 4^3 \times 10^{-15\times 3}}$ = 0.155 x 10^{26} C/m³.

Il protone ha energia iniziale pari a $E_i = \frac{1}{2}m_p v^2 + e\varphi(R)$. La velocità v minima affinché il p raggiunga il centro del nucleo e' $E_i = \frac{1}{2}m_p v^2 + e\varphi(R) = e\varphi(0) = E_f$.

Quindi $v = \sqrt{2e(\varphi(0) - \varphi(R))/m_p}$.

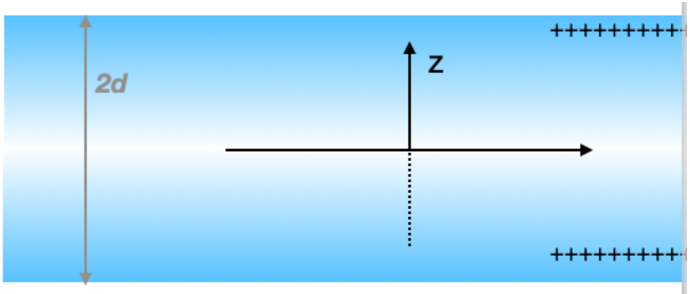
Occorre quindi calcolare il campo elettrico e quindi il potenziale elettrostatico all'interno di una sfera uniformemente carica.

Con la legge di Gauss applicata a una superficie sferica di raggio r<R si ha che E(r) =
$E(r) = \frac{\rho 4\pi r^3}{3 \times 4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$.

Allora $\varphi(0) - \varphi(R) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\int_0^R r\hat{r} \cdot dr\hat{r} = \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{0.155 \times 10^{26} \times 16 \times 10^{-30}}{6 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 4.68 \times 10^6\ \text{V}$

Qundi $v = \sqrt{2 \times 1.6 \times 10^{-19} 4.68 \times 10^6)/1.67 \times 10^{-27}} \simeq 3 \times 10^7\ \text{m/s}$. Il valore di questa velocità e' grande a sufficienza da richiedere l'uso di formule che tengano conto degli effetti relativistici e quindi quest astima e' da considerarsi solo un'indicazione.

Quesito 3 (fino a 12)



Si consideri uno strato planare di materiale isolante di spessore 2d=4 cm e area delle facce parallele molto grande. All'interno dello strato è distribuita della carica con densità volumetrica variabile con la profondità z nel mezzo secondo la legge ρ=ρ0(z/d)² [lo zero dell'asse z sia sul piano equidistante dalle due facce di grande area dello strato di materiale]. Se ρ0 vale 200μC/m³ si determini il potenziale elettrostatico in ogni punto dello spazio (z<-d, -d<z<d, z>d) e si dimostri che vale l'equazione di Poisson.

Per calcolare il campo elettrico si osserva che la distribuzione di carica e' invariante per traslazioni nella direzione x e y, quindi il campo (e il potenziale) puo' dipendere solo da z e sara' diretto come z: $\varphi(x, y, z) = \varphi(z)$; $\vec{E} = E(z)\hat{z}$. Inoltre, dato che $\rho(-z) = \rho(z)$, la componente E(z) del campo sara' una funzione dispari della coordinata z, cioè $E(-z) = -E(z)$ e quindi $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$. E' chiaro che il campo e' nullo a z=0, dato che la quantità di carica a z>0, e' uguale a quella a z<0. E' possibile considerare una superficie geometrica S chiusa cilindrica con una base nel piano z=0 e l'altra alla coordinata z a cui si vuole calcolare il valore del campo.

Il flusso del campo elettrico attraverso S sara' $\Phi(\vec{E})_S = \int_{B_z} E(z)\hat{z} \cdot ds\hat{z}$ dove Bz e' la base sul piano alla quota z; il contributo al flusso della superficie laterale e' nullo perche' sulla superficie laterale il campo e' perpendicolare agli elementi di superficie ($ds\hat{r} \perp \hat{z}$). Inoltre il contributo al flusso della base a z=0 e' nullo perche' il campo e' nullo.

Quindi se z>d dall'applicazione della legge di Gauss si ha

$$\Phi(\vec{E})_S = E(z)A = Q_{int}(S)/\epsilon_0 = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^d dz A\rho_0 z^2/d^2 = \frac{A\rho_0}{d^2\epsilon_0}\frac{z^3}{3}\Big|_0^d = \frac{A\rho_0 d}{3\epsilon_0}.$$

Se invece 0<z<d allora

$$\Phi(\vec{E})_S = E(z)A = Q_{int}(S)\epsilon_0 = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^z dz A\rho_0 z^2/d^2 = \frac{A\rho_0}{d^2\epsilon_0}\frac{z^3}{3}.$$

Pertanto $$\vec{E} = \begin{cases} \frac{d\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z} & z > d \\ \frac{z^3\rho_0}{3\epsilon_0 d^2}\hat{z} & |z| < d \\ -\frac{d\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z} & z < -d \end{cases}$$

Il potenziale elettrostatico sara' dato da

$$\varphi(z > d) - \varphi(z = d) = -\int_d^z \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_d^z \frac{d\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z}\cdot dz\hat{z} = -\frac{d\rho_0(z-d)}{3\epsilon_0} = -\frac{d\rho_0(|z|-d)}{3\epsilon_0}$$

$$\varphi(0 < z < d) - \varphi(z = d) = \int_z^d \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_z^d \frac{\rho_0 z^3}{3\epsilon_0 d^2}\hat{z}\cdot dz\hat{z} = \frac{\rho_0(d^4 - z^4)}{12\epsilon_0 d^2}.$$

Dalla simmetria della densita' volumetrica di carica segue la simmetria rispetto a z del potenziale elettrostatico: $\varphi(-z) = \varphi(z)$. IN ogni caso calcoliamo espressamente

$$\varphi(z < -d) - \varphi(z = -d) = \int_z^{-d} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_z^{-d} \frac{d\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{z}\cdot dz\hat{z} = -\frac{d\rho_0(-d-z)}{3\epsilon_0} = -\frac{d\rho_0(|z|-d)}{3\epsilon_0}$$

Quindi

$$\varphi(z) = \begin{cases} -\frac{d\rho_0(|z|-d)}{3\epsilon_0} = -\frac{16\pi\times10^{-6}\ 9\times10^{9}(|z|-0.02)}{3} = -48\pi\times10^{3}(|z|-0.02) \simeq -150\ \text{kV}(|z|-0.02) & |z|>d \\ \frac{\rho_0}{12\epsilon_0}(d^2-\frac{z^4}{d^2}) = \frac{200\pi\times10^{-6}\ 9\times10^{9}}{3}(d^2-\frac{z^4}{d^2}) = 0.6\ (d^2-\frac{z^4}{d^2})\ \text{MV} & |z|<d \end{cases}$$

Il potenziale a z=0 vale

$\varphi(z=0) = 600\pi\times10^3 d^2 = 240\pi \simeq 754$ V.

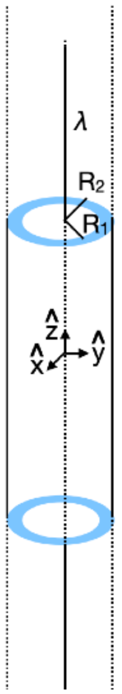
A |z|>0 il potenziale e' lineare con z => la derivata seconda e' zero, ma anche la densita' di carica e' nulla, quindi risulta verificata l'eq di Poisson. A |z|<d,

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\rho_0}{12\epsilon_0 d^2}4z^3\right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0 d^2}z^2 = -\frac{\rho(z)}{\epsilon_0}.$$

Un protone prodotto a z=0 con velocita' nulla ha energia meccanica totale = energia potenziale elettrostatica = $e\varphi(d) = 0$. Quindi per la conservazione dell'energia meccanica a z=10d la somma dell'energia potenziale e cinetica dovrà essere nulla, quindi

$$\frac{1}{2}m_p v^2 = -e\varphi(10d) = 150\ \text{keV}(0.2-0.02) = 27\ \text{KeV} = 43\times10^{-16}\ \text{J}$$

Quindi $v = \sqrt{\frac{2\times43\times10^{-16}}{1.67\times10^{-27}}}$ = 2.27 x 10⁶ m/s



Quesito 4 (fino a 12 punti)

In figura e' rappresentato un filo infinito con densita' di carica uniforme λ e una distribuzione di corrente uniforme $\vec{J} = J_0\hat{z}$ compresa tra R_1 e R_2. Si calcoli la forza su una carica puntiforme q_0 con velocita' $\vec{v} = v_0\hat{z}$ a distanza r dall'asse per i casi:

1) $r < R_1$
2) $R_1 < r < R_2$
3) $R_2 < r$

La particella sara' soggetta a una forza $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$.

Occorre quindi calcolare il campo elettrico e il campo magnetico in ogni punto della spazio.

Per il campo elettrico, applicando Gauss a una superficie cilindrica di raggio r>0 e altezza h qualunque, data la simmetria cilindrica del filo uniformemente carico si ha

$$\Phi(\vec{E})_C = \int_{S_L} E(r)\hat{r}\cdot ds\hat{r} = E(r)2\pi rh$$

La carica interna alla superficie cilindrica C e' $Q_{int}(C) = \lambda h$, quindi $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$.

Il campo magnetico puo' essere calcolato nelle tre diverse regioni sfruttando la simmetria cilindrica della distribuzione di correnti (dirette con l'asse z) che implica che le linee di campo magnetico saranno circonferenze con centro sull'asse z.

Dato un circuito geometrico circolare γ coassiale e di raggio r, orientato in senso antiorario, si avrà

$\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_\gamma B(r)\hat{\phi}\cdot rd\phi\hat{\phi}$ $= 2\pi rB(r)$ e per la legge di Ampere questa circuitazione sara' uguale alla corrente concatenata $i_c = \int_{\Sigma_\gamma}\vec{J}\cdot d\vec{s} = \begin{cases} 0 & r<R \\ \pi(r^2-R_i^2)J & R_1<r<R_2 \\ \pi(R_e^2-R_i^2)J & r>R_2 \end{cases}$

Quindi il campo magnetico sara' $\vec{B} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{\mu_0(r^2 - R_i^2)J}{2r}\hat{\phi} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\mu_0(R_e^2 - R_i^2)J}{2r}\hat{\phi} & r > R_2 \end{cases}$

E infine la forza sulla carica

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{cases} q\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} & r < R \\ q\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} - qv\frac{\mu_0(r^2 - R_i^2)J}{2r}\hat{r} & R_1 < r < R_2 \\ q\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} - qv\frac{\mu_0(R_e^2 - R_i^2)J}{2r}\hat{r} & r > R_2 \end{cases}$$

Per r>R1 le due forze sono nella stessa direzione ma in versi opposti. Per r>R2 per esempio esse si annullano se

$\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} = v\mu_0(R_e^2 - R_i^2)J$ cioe' $\lambda = v\frac{\mu_0(R_e^2 - R_i^2)J}{4k}$.

Per v ~ 10^6 m/s $I = \pi(R_e^2 - R_i^2)J \simeq 10$ A allora $\lambda = 10^6\frac{4\pi 10^{-7}10}{4\pi\ 8\times 10^9} \sim 10^{-10}$ C/m

Quesito 6 (fino a 8 punti)
Si discuta uno degli argomenti elencati:
1) Si discuta l'interazione tra due dipoli paralleli o anti-paralleli l'uno all'altro collocati sullo stesso asse e allineati ad esso;
2) Si discuta l'invarianza di gauge del campo elettromagnetico
3) Si presenti la definizione di corrente elettrica e la legge di Ohm. Si dimostri la legge di Ohm utilizzando il modello di conduzione di Drude.
4) Si discuta la legge di Ampere e suo utilizzo per il calcolo del campo magnetico (condizioni di applicabilità per distribuzioni di corrente a simmetria cilindrica) Si discuta uno degli argomenti elencati:

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,

$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$

$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\ Kg$, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\ Kg$, $M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $\quad d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\ dV$