Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 70 - a.a. 2024-2025

Quesito 1 (fino a 12 punti)

Una particella di massa m = $5x10^{-5}$ kg e carica elettrica q_0 = 0.2 nC si trova al centro di un anello di raggio R = 12 cm uniformemente carico con carica totale Q = -1μC. Al tempo t=0, la particella è allontanata dal centro lungo l'asse perpendicolare alla spira per un tratto x_0 = 1 mm e poi lasciata libera

- Si calcoli la forza sulla particella a t=0
- Si dimostri che la particella si muoverà di moto armonico, tenendo presente l'approssimazione x_0<<R. Si calcoli il periodo del moto e l'energia cinetica massima della particella.

La particella sarà soggetta a una forza attrattiva (carica opposta rispetto all'anello carico): $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$. Il campo elettrico prodotto da un anello uniformemente carico sui punti dell'asse si calcola con la procedura illustrata qui (***SI NOTI: CALCOLARE CAMPO ELETTRICO E POTENZIALE E' L'OBIETTIVO DELL'ESERCIZIO***):

Example 3.2: Uniformly Charged Ring

Consider a uniformly charged ring of radius R and charge density λ (Figure 3.5.7). What is the electric potential at a distance z from the central axis?

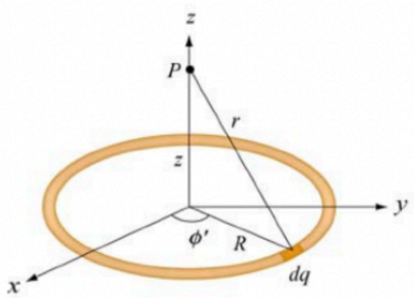


Figure 3.5.7 A non-conducting ring of radius R with uniform charge density λ.

Solution:

Consider a small differential element $d\ell = R\,d\phi'$ on the ring. The element carries a charge $dq = \lambda\, d\ell = \lambda R\, d\phi'$, and its contribution to the electric potential at P is

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}\oint d\phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad (3.5.12)$$

where we have substituted $Q = 2\pi R\lambda$ for the total charge on the ring. In the limit $z \gg R$, the potential approaches its "point-charge" limit:

$$V \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z}$$

From Eq. (3.5.12), the z-component of the electric field may be obtained as

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{(R^2+z^2)^{3/2}} \qquad (3.5.13)$$

La procedura illustrata parte dal calcolo del potenziale come somma (integrale) di contributi infinitesimi coulombiani (relativi a tratti infinitesimi dell'anello) e poi ricava il campo elettrico (che per simmetria è diretto come l'asse z) come gradiente del potenziale. In alternativa è possibile direttamente il campo elettrico come somma (integrale) di contributi infinitesimi coulombiani (relativi a tratti infinitesimi dell'anello) proiettati sull'asse z (le componenti perpendicolari all'asse si cancellano per archetti opposti lungo l'anello).

Example 2.4: Electric Field on the Axis of a Ring

A non-conducting ring of radius R with a uniform charge density λ and a total charge Q is lying in the xy - plane, as shown in Figure 2.10.5. Compute the electric field at a point P, located at a distance z from the center of the ring along its axis of symmetry.

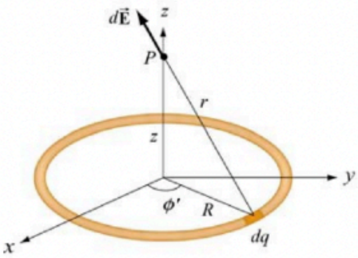


Figure 2.10.5 Electric field at P due to the charge element dq.

Solution:

Consider a small length element $d\ell'$ on the ring. The amount of charge contained within this element is $dq = \lambda\, d\ell' = \lambda R\, d\phi'$. Its contribution to the electric field at P is

$$d\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\, d\phi'}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (2.10.12)$$

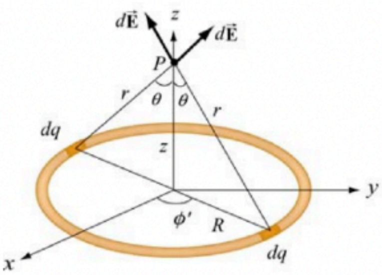


Figure 2.10.6

Using the symmetry argument illustrated in Figure 2.10.6, we see that the electric field at P must point in the $+z$ direction.

$$dE_z = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\, d\phi'}{R^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rz\, d\phi'}{(R^2+z^2)^{3/2}} \qquad (2.10.13)$$

Upon integrating over the entire ring, we obtain

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\oint d\phi' = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{(R^2+z^2)^{3/2}} \qquad (2.10.14)$$

Quindi $\overrightarrow{F} = qk\dfrac{Qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \sim \simeq -\dfrac{k|qQ|}{R^3}z\hat{z}$ si tratta quindi di una forza di richiamo, che agisce come una forza elastica (proporzionale all'allontanamento [z] dalla posizione di equilibrio).

A t=0, cioè a z=$x_0 = 1\ \mathrm{mm}$ si ha $\overrightarrow{F} = -0.2\times10^{-9}\times9\times10^{9}\dfrac{10^{-6}\times10^{-3}}{(0.12^2+0.001^2)^{3/2}}\hat{z} =$
$-1.8\dfrac{10^{-9}}{1.7\times10^{-3}} \simeq -1.04\times10^{-6}\ \mathrm{N}.$

In un istante di tempo generico $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} = -1.04\times10^{-3}z\hat{z}$, ossia
$m\dfrac{d^2z}{dt^2} + Az = 0$ con $A \simeq 10^{-3}\ \mathrm{N/m}$. Questa e' l'equazione dell'oscillatore armonico che ha soluzione $z(t) = z_0\cos(\omega t+\phi)$ con $\omega = \sqrt{A/m} = \sqrt{10^{-3}/(5\times10^{-5})} \simeq 4.5\ \mathrm{s}^{-1}$,
$z_0 = x_0 = 10^{-3}\ \mathrm{m}$ e $\phi = 0$ (perche' il moto parte dalla massima deviazione dalla posizione di equilibrio z=0, ossia l'ampiezza dell'oscillazione e' proprio x_0).

Il periodo del moto oscillatorio armonico è T=$1/\nu = 2\pi/\omega = 1.4\ \mathrm{s}$; la massima energia cinetica della particella si avrà quando la particella passa da z=0. In quella condizione la sua velocità è
$\dfrac{dz(t)}{dt}\Big|_{t=T/4} = z_0\omega\sin(\omega t+\phi)\Big|_{t=T/4} = z_0\omega = 4.5\times10^{-3}\ \mathrm{m/s}$ e la sua energia cinetica
$E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}5\times10^{-5}\times4.5^2\times10^{-6}\ \mathrm{J} \sim 5\times10^{-10}$ J.

Questa energia e' uguale alla variazione di energia potenziale tra la posizione z=x_0 e la posizione z=0 infatti

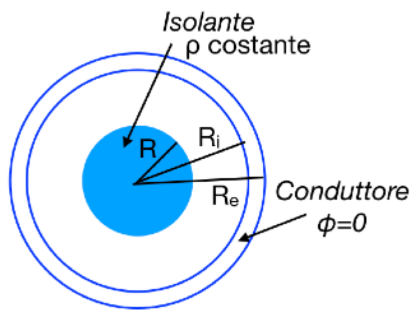
$U_p(z=0) = qQk/\sqrt{R^2+z^2} = qQk/R = -9\times10^{9}\times0.2\times10^{-9}\times10^{-6}/0.12 = 15\times10^{-6}\ \mathrm{J}$

$U_p(z=x_0) \simeq U_p(z=0) + dU_p(z=x_0) = qQk/R - \dfrac{qQkz^2}{2R^3}$ con uno sviluppo in serie di Taylor in cui il primo termine non nullo e' quello del secondo ordine
(infatti $\dfrac{dU_p}{dz}\Big|_{z=0} = 0,\ \dfrac{d^2U_p}{dz^2}\Big|_{z=0} = -1/R^3$).

Quindi $E_k(x_0) + U_p(x_0) = E_k(0) + U_p(0) \rightarrow E_k(0) = U_p(x_0) - U_p(0) = -\dfrac{kqQx_0^2}{2R^3} =$
$9\times10^{9}\times0.2\times10^{-9}\times10^{-6}\times10^{-6}/(2\times0.12^3) = 520\times10^{-12} \simeq 5\times10^{-10}\ \mathrm{J}.$

Quesito 2 (fino a 12 punti)

Una sfera di raggio R pari a 15 cm, su cui è distribuita della carica elettrica con densità volumetrica uniforme ρ, è al centro di una superficie sferica conduttrice di spessore trascurabile (R_i = Re = 30 cm) che è mantenuta a potenziale nullo.



Si calcoli, in funzione di ρ,
- il campo elettrico per r< R e per R<r<Ri
- La ddp tra un punto P a distanza r dal centro e la superficie sferica conduttrice (per R<r<Ri e per r< R)

Sapendo che il valore del potenziale elettrostatico al centro della sfera è pari a 5 kV,
- determinare il valore della densità di carica della sfera;
- discutere come si modifica il potenziale al centro delle sfera se una carica puntiforme di 1μC è collocata a una distanza di 50 cm dal centro del sistema.

SI NOTI: il problema richiede di calcolare *(non di ricordare a memoria o di copiare da qualche pagina di appunti opportunamente utilizzata di soppiatto durante lo svolgimento della prova)* il campo elettrico e il potenziale elettrostatico.

Il sistema manifesta una simmetria sferica quindi il calcolo del campo elettrico e del potenziale elettrostatico può sfruttare la legge di Gauss dato che la simmetria sferica suggerisce che $\varphi(r,\theta,\phi) = \varphi(r)$ dove r e' la distanza dal centro della distribuzione (che corrisponde al centro di simmetria del sistema) e inoltre $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} = E(r)\hat{r}$.

Per $r < R$, all'interno della sfera uniformemente carica, considerata una superficie sferica Σ_r concentrica con raggio r, si applica la legge di Gauss. Il flusso del campo elettrico:

$$\Phi(\vec{E})_{\Sigma_r} = \int_{\Sigma_r} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma_r} E(r)\hat{r}\cdot ds\hat{r} = E(r)\int_{\Sigma_r} ds = E(r)\ 4\pi r^2$$

è uguale alla carica totale contenuta all'intero della superficie sferica Σ_r divisa per la costante dielettrica del vuoto: $Q_{int}(\Sigma_r)/\epsilon_0 = \int_{V_r} dV\rho = \rho\frac{4}{3\epsilon_0}\pi r^3$. Pertanto $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r}$.

Per $R < r < R_i$, nello spazio tra la sfera uniformemente carica e il guscio conduttore, applichiamo la legge dei Gauss a una superficie sferica Σ_r'; il flusso come prima vale $\Phi(\vec{E})_{\Sigma_r'} = E(r)\ 4\pi r^2$. Invece $Q_{int}(\Sigma_r')/\epsilon_0 = \int_{V_r} dV\rho(r) = \rho\frac{4}{3\epsilon_0}\pi R^3$. Pertanto $\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r}$.

La ddp tra r=0 e r=R e' $\varphi(R) - \varphi(0) = -\int_0^R d\vec{r}\cdot\vec{E} = -\int_0^R dr\hat{r}\cdot\frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0}$.

La ddp tra r=Ri e r=R e' $\varphi(R_i) - \varphi(R) = -\int_R^{R_i} d\vec{r}\cdot\vec{E} = -\int_R^{R_i} dr\hat{r}\cdot\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_R^{R_i} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R}\right)$.

Quindi la ddp tra il conduttore e il centro di simmetria r=0,

$$-\varphi(0) = \varphi(R_i) - \varphi(0) = \varphi(R_i) - \varphi(R) + \varphi(R) - \varphi(0) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R}\right) - \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} =$$

$$\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R_i} - \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R_i} - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} = \frac{\rho R^3}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3R_i} - \frac{1}{2R}\right) = 4\pi k\rho R^3\left(\frac{1}{3R_i} - \frac{1}{2R}\right)$$

Allora 5000 V / (0.15^3 x 4π 9 x 10^9) = $\rho\frac{3R_i - 2R}{6RR_i} = \rho\frac{3\times0.3 - 2\times0.15}{6\times0.15\times0.3} = 2.22\ \rho$

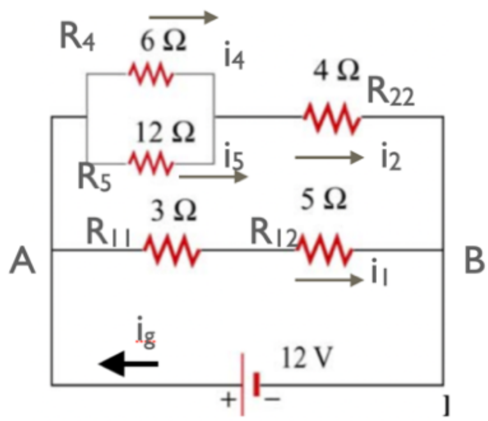
=> ρ = 5.9 x 10^{-6} C/m^3

Se una carica puntiforme si ricova all'esterno del conduttore, mantenuto a potenziale nullo, all'interno del conduttore non si ha nessun effetto osservabile a causa dell'effetto dello schermo elettrostatico.

Quesito 3 (fino a 10 punti)

a) Nel circuito in figura calcoli la corrente in ogni ramo e si confronti la potenza dissipata sul resistore da 6 Ω con quella dissipata sul resistore da 3 Ω.

b) Nel circuito in figura si calcoli la velocità di deriva degli elettroni di conduzione nel ramo del circuito in cui è collocato il resistore da 4Ω, assumendo che il filo di rame di cui sia composto il circuito abbia una sezione circolare di diametro pari a 0.25 mm.



La resistività del rame è pari a $1.68 \times 10^{-8}\ \Omega m$, la densità di massa 8.9 g/cm^3 e il peso atomico A=63.5 g/mole.

$\epsilon = 12\ \mathrm{V} = i_i(R_{11} + R_{12}) = i_1(3+5) \rightarrow i_1 = 1.5\ \mathrm{A},\ \mathrm{P}_{\mathrm{R}_{11}} = 1.5^2 \times 3 = 6.75\ \mathrm{W}.$

$\epsilon = 12\ \mathrm{V} = i_2\left(R_4R_5/(R_4+R_5) + R_{22}\right) = 4i_2 \quad \rightarrow i_2 = 12\ \mathrm{V}/8\ \Omega = 1.5\ \mathrm{A}$. Inoltre $6\ \mathrm{V} = i_4R_4 = i_5R_5 \ \rightarrow i_4 = 1\ \mathrm{A},\ P_{R_4} = 6\ \mathrm{W}$, Dal momento che $i_4 + i_5 = i_2$, $i_5 = 0.5\ \mathrm{A}$, Infine $i_g = i_1 + i_2 =$ 3A.

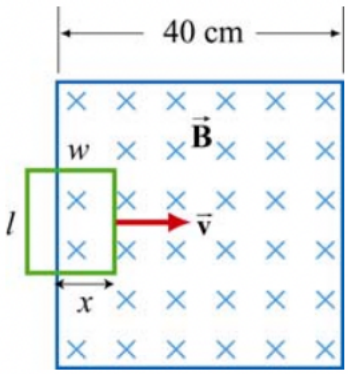
La velocita' di deriva degli elettroni nel ramo di R22 (ossia della corrente i2) si ricava tenendo presente la definizione $|\vec{J}| = nev_d = i/S = i_2/(\pi 0.125^2 \times 10^{-6})$ = 2.4 x 10^8 A/m^2.

La densita volumetrica di e-, n, e' calcolabile come la densita' volumetrica di atomi, dato che solo 1e per atomo contribuisce al gas di elettroni di conduzione => n = N_A x numero di moli per unita' di volume = $N_A\rho_m/A$ dove ρ_m = densita di massa, e' la massa per unita di volume e A e' il peso atomico ossia la massa di una mole.

Quindi n = 6 x 10^{23}x8.9/63.5 = 0.84 x 10^{23} x 10^6 /m3= 8.4 x10^{28} /m^3

Allora v_d = 2.4 x 10^8 (A/m^2)/ (0.84 x 1.6 x 10^9 C/m^3)=0.18 m/s.

Nota la resistività del materiale e' possibile calcolare il campo elettrico $J = \sigma E = E/\rho$; quindi E = 2.4 x 1.68 V/m = 4.1 V/m ed e' possibile calcolare il tempo caratteristico tra collisioni successive dalla relazione $m_e/(e^2 n\tau) = \rho$ e infine il libro cammino medio $\lambda = v_d\tau$.



Quesito 4 (fino a 12 punti)

La spira quadrata di lato l, che trasla a velocità costante per effetto di forze esterne, entra in una regione di campo magnetico diretto perpendicolarmente al piano della figura e entrante. SI calcoli e si faccia un grafico in funzione del tempo di

1) flusso del campo B concatenato con la spira quadrata;
2) Forza elettromotrice indotta nella spira quadrata.

Cosa accadrebbe se non ci fosse nessuna forza esterna applicata e $\vec{v}$ fosse solo la velocità iniziale nell'istante di tempo in cui la spira inizia a entrare nel campo magnetico ?

Quesito 5 (fino a 8 punti)

Si discuta uno degli argomenti elencati:

1) Il dipolo elettrico, proprietà del campo e del potenziale; importanza del sistema elettrico dipolo.
2) Le equazioni di Maxwell: forma differenziale per ciascuna di esse,
3) Definizione di flusso del campo magnetico concatenato con un circuito e confronto con il campo elettrico.
4) Serie e parallelo di due resistori: definizione e dimostrazione dei valori delle resistenze equivalenti

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\, m_p$

Campo $\vec{E}$ e potenziale φ prodotti da una carica puntiforme: $\vec{E}(r) = \dfrac{kq}{r^2}\hat{r}$; $\varphi(r) = k\dfrac{q}{r}$

Campo $\vec{E}$ e potenziale φ di dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\,\dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$; $\varphi(r,\vartheta) = k\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\,dV$

OPERATORI DIFFERENZIALI ED ELEMENTI DI LINEA, SUPERFICIE E VOLUME

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}}$ + $(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}}$ + $(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}}$ + $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}}$ + $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\mathbf{r}}$ + $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}}$ + $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2\mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x\hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y\hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\rho}}$ + $(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}$ + $(\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{r}}$ + $(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\theta}}$ + $(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz\hat{\mathbf{x}} +$ $dxdz\hat{\mathbf{y}} +$ $dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}} +$ $r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dxdydz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

IN COORDINATE CARTESIANE (1A COLONNA DA SINISTRA) CILINDRICHE (2A COLONNA) SFERICHE (3A COLONNA)