Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 72 - a.a. 2024-2025

Quesito 1 (fino a 12 punti)
Si consideri una sfera di raggio R=1cm in cui è distribuita della carica con densità volumetrica $\rho(r) = \rho_0(1 - r/R)$ dove $\rho_0 = 10^{-2}\ \mathrm{C/m^3}$. Si calcoli:
- 1: Il campo elettrico in un punto a d=R/2 dal centro della sfera e in un punto a d=2R;
- 2: il rapporto tra il modulo $|\overrightarrow{F_P}|$ della forza che agisce su una carica di prova ($q_0 = 1\ \mathrm{C}$) quando essa si trova nel punto P a distanza d=2R dal centro della sfera, e $|\overrightarrow{F_Q}|$, modulo della forza che agisce sulla stessa carica collocata nel punto Q, che invece dista 10 R dal centro della sfera;
- 3: Il potenziale elettrostatico in ogni punto dello spazio fissato a zero il suo valore a distanza infinita dalla sfera carica.

1) La distribuzione di carica manifesta una simmetria sferica. Infatti, assunto un sistema di riferimento con origine al centro della distribuzione e un sistema di coordinate sferiche, la densità di carica risulta dipendere solo dalla coordinata r (ossia dalla distanza del punto dall'origine):

$$\rho = f(r),\ \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho}{\partial \phi} = 0.$$

Quindi anche il campo elettrico e il potenziale elettrostatico dipenderanno solo da r: $\vec{E} = \vec{E}(r),\ \varphi = \varphi(r)$. Inoltre, dal momento che le superfici equipotenziali (cioè le superfici di livello per il potenziale elettrostatico) sono superfici sferiche e siccome il gradiente di un campo scalare e' perpendicolare alle superfici di livello, la direzione del campo elettrico sara' quella del versore nella cui direzione cambia la coordinata r a parità di θ e ϕ:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\hat{r} = E(r)\hat{r}.$$

Allora il campo elettrico in ogni punto dello spazio puo' essere calcolato applicando la legge di Gauss a superfici sferiche concentriche con la distribuzione di carica.

Per un punto esterno alla distribuzione (a r > R) come ad esempio il punto P, si sceglie una superficie sferica con centro in O (centro della distribuzione) e si applica Gauss in questo modo:

$$\Phi(\vec{E})_S = \frac{1}{\epsilon_0}Q_{int}(V_S) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{V_S} dV\rho(r).$$

Calcoliamo il flusso $\Phi(\vec{E})_S = \int_S d\vec{s}\cdot E(r)\hat{r} = \int_S ds\hat{r}\cdot E(r)\hat{r} = E(r)\int_S ds = E(r)\ 4\pi r^2.$

Calcoliamo

$$Q_{int}(V_S) = \int_{V_S} dV\rho(r) = \int_{V(r)} dV\rho(r) = \int_{V(R)} dV\rho_0(1 - r/R) = \int_0^R 4\pi r^2 dr\ \rho_0(1 - r/R) =$$

$$4\pi\rho_0\left(\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{4R}R^4\right) = 4\pi\rho_0 R^3\frac{1}{12} = \frac{\pi}{3}\rho_0 R^3.$$ Questo valore rappresenta la carica complessiva Q_T del sistema di sorgenti.

$$Q_T = \frac{\pi}{3}\rho_0 R^3 = \frac{\pi}{3}10^{-2}\times 10^{-6} \simeq 10\ \mathrm{nC}.$$

Quindi $E(r)\ 4\pi r^2 = \frac{\pi}{3\epsilon_0}\rho_0 R^3$ e quindi $\vec{E}(r > R) = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0\ r^2}\hat{r} = \frac{3Q_T}{\pi R^3}\cdot\frac{R^3}{12\epsilon_0\ r^2}\hat{r} = k\frac{Q_T}{r^2}\hat{r}.$

In questa espressione si osserva il tipico comportamento Coulombiano di un campo elettrico prodotto da un sistema a simmetria sferica per punto esterno alle sorgenti. Inoltre

Per un punto interno alla distribuzione (a r < R) si procede allo stesso modo; cambia rispetto al calcolo precedente la stima della carica interna al volume contenuto all'interno della superficie sterco di raggio r:

$$Q_{int}(V_S) = \int_0^r 4\pi r^2 dr\ \rho_0(1 - r/R) = 4\pi\rho_0\left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4R}r^4\right) = 4\pi\rho_0 r^3\left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R}\right).$$

Quando eguagliamo questa carica (divisa per la costante dielettrica del vuoto) al flusso del campo elettrico, abbiamo

$$\vec{E}(r < R) = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R}\right)\hat{r} = \frac{3Q_T}{\pi R^3}\cdot\frac{r}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R}\right)\hat{r}.$$

Si puo' osservare che questa espressione descrive un campo nullo al centro della distribuzione di carica, come e' intuibile dalla simmetria, e nel limite di r -> R da sinistra diventa

$\frac{3Q_T}{\pi R^2}\cdot\frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\hat{r} = k\frac{Q_T}{4\pi R^2}\hat{r}$. Il campo elettrico e' quindi continuo in corrispondenza di r=R.

Quindi

$$\vec{E}(r = R/2) = \frac{3Q_T}{2\pi\epsilon_0 R^2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)\hat{r} = \frac{5Q_T}{16\pi\epsilon_0 R^2}\hat{r} = \frac{5\times10^{-8}\times9\times10^9}{4\times10^{-4}}\hat{r} \simeq 1.1\ \mathrm{MV/m}$$

Invece $\vec{E}(r = 2R) = k\frac{Q_T}{4R^2}\hat{r} = \frac{10^{-8}\times9\times10^9}{4\times10^{-4}}\hat{r} \simeq 0.2\ \mathrm{MV/m}$

3) Il potentiale elettrostatico all'esterno (r>R) e' ovviamente Coulombiano come il campo, quindi $\varphi(r > R) = k\frac{Q_T}{r}$ e ciò corrisponde ad aver fissato il valore del potenziale all'infinito a zero $\varphi(r \to \infty) = 0$. Per i punti interni alla distribuzione (r<R) e' possibile calcolare il potenziale applicando la definizione partendo dalla differenza tra il valore a r generico e il valore assunto a r=R, ossia:

$$\varphi(r) - \varphi(R) = \varphi(r) - k\frac{Q_T}{R} = \int_r^R d\vec{l}\cdot\vec{E} = \int_r^R dr\hat{r}\cdot\frac{3Q_T}{\pi R^3}\cdot\frac{r}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R}\right)\hat{r} =$$

$$\frac{3Q_T}{\pi\epsilon_0 R^3}\cdot\left(\frac{R^2}{6} - \frac{r^2}{6} - \frac{R^3}{12R} + \frac{r^3}{12R}\right) = \frac{3Q_T}{\pi\epsilon_0 R^3}\cdot\left(\frac{R^2}{12} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^3}{12R}\right) =$$

$$\frac{12kQ_T}{R^3}\cdot\left(\frac{R^2}{12} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^3}{12R}\right).$$

Quindi

$$\varphi(r < R) = \frac{2kQ_T}{R} - \frac{2kQ_T r^2}{R^3} + \frac{kQ_T r^3}{R^4} = \frac{kQ_T}{R}\left(\frac{r^3}{R^3} - 2\frac{r^2}{R^2} + 2\right).$$

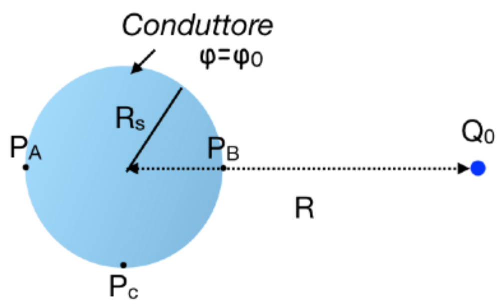
2) Sulla base dei risultato in 1) [ma anche solo usando il risultato noto che per una distribuzione a simmetria sferica il campo all'esterno e' Coulombiano] si ha

$\vec{E}(r > R) = k\frac{Q_T}{r^2}\hat{r}$. Ovviamente su una carica di prova q0 la forza in un punto a distanza r>R sara' $\vec{F}(r > R) = k\frac{q_0 Q_T}{r^2}\hat{r}$

Quindi $\frac{|\vec{F}(P)|}{|\vec{F}(Q)|} = \frac{r_Q^2}{r_P^2} = \frac{(10R)^2}{(2R)^2} = 25.$

Quesito 2 (fino a 12 punti)

Si discuta il metodo delle cariche immagine per determinare il campo elettrico e il potenziale elettrostatico prodotti da un sistema di conduttori e di cariche puntiformi. Come esempio si utilizzi una sfera conduttrice, di raggio R_s con centro nel punto



O e una carica puntiforme Q_0 nel punto P a distanza R da O.
Si ricordi che nel caso in cui la sfera conduttrice è a potenziale nullo $\varphi=\varphi_0=0$, una carica fittizia q' a distanza d dal centro della sfera lungo la congiungente OP e la carica Q_0 costituiscono un sistema di cariche fittizie opportuno. Come occorre scegliere i valori di d e q' ? Come occorre modificare il sistema di cariche fittizie per risolvere lo stesso problema generale dell'elettrostatica (sfera conduttrice e carica Q_0 nelle loro posizioni) se il potenziale φ_0 non è fissato ma è nota la carica Q_T sul conduttore ?

Il metodo delle cariche immagine si basa sull'unicità della soluzione del problema generale dell'elettrostatica, descritto matematicamente dall'eq. di Laplace a cui soddisfa il potenziale elettrostatico (la funzione scalare incognita da cui e' possibile determinare il campo elettrico grazie alla relazione $\vec{E} = -\nabla\varphi$) e da condizioni al contorno che possono essere i valori noti del potenziale su tutti i conduttori oltre al valore del potenziale su una superficie complessiva di contorno del sistema, oppure i valori noti delle cariche elettriche complessive sui conduttori (oltre al valore del potenziale su una superficie complessiva di contorno del sistema) o anche misti (cariche note su alcuni conduttori, potenziali noti su altri e sulla superficie di contorno).
L'unicità della soluzione permette di stabilire una equivalenza (in termini del potenziale determinato nelle regioni dello spazio esterne ai conduttori) tra il sistema fisico effettivo e un altro sistema fittizio costituito da cariche puntiformi che determinano le stesse condizioni al contorno del problema fisico reale.
Nel caso della nostra sfera conduttrice e carica puntiforme, il sistema di cariche fittizie deve essere tale da garantire che la superficie della sfera S sia equi-potenziale. Se imponessimo che questo valore costante del potenziale su S sia $\varphi = 0$, si dimostrerebbe che (come ricordato nella traccia) due cariche (Q_0 nella sua posizione, ossia a una distanza R dal centro della sfera conduttrice e q' di valore opportuno a una distanza d opportuna dal centro della sfera) possono determinare un potenziale elettrostatico totale, somma dei due contributi colombiani, pari a zero per ogni punto di una superficie sferica di raggio Rs coincidente con la superficie esterna della sfera conduttrice. Cio' accade perché la condizione (*) $\varphi = 0 = k\dfrac{Q_0}{r} + k\dfrac{q'}{r'}$ che implica $\dfrac{r'}{r} = cost = -\dfrac{q'}{Q_0}$, definisce il luogo geometrico dei punti le cui distanze da una coppia di punti (quelli in cui sono collocata q' e Q_0) sono in un rapporto costante => questa condizione definisce un'ellissoide (e una superficie sferica e' un caso speciale di ellissoide).
Per fissare q' e d basta imporre che il potenziale sia nullo nei due punti Pa e Pb (sulla retta che passa per O e P), cioè che Pa e Pb siano punti dell'ellissoide definito dalla relazione (*).
Per Pa, si ha

$\varphi(P_a) = k\dfrac{q'}{R_s + d} + k\dfrac{Q_0}{R_s + R} = 0$ quindi $q' = -(R_s + d)\dfrac{Q_0}{R_s + R}$ (*)

Per Pb, si ha

$\varphi(P_b) = k\dfrac{q'}{R_s - d} + k\dfrac{Q_0}{R - R_s} = 0$. Sostituendo qui il valore di q' si ha

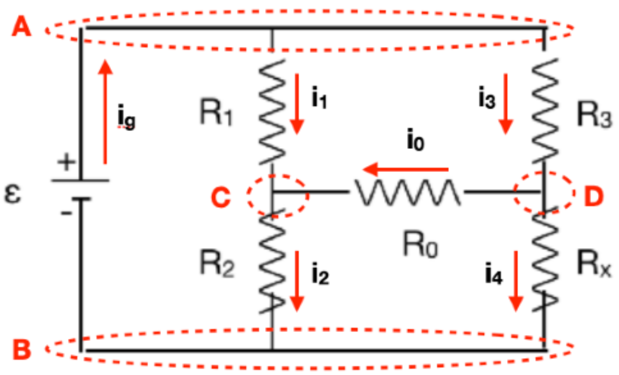
$(R_s + d)\dfrac{Q_0}{(R_s - d)(R_s + R)} = \dfrac{Q_0}{R - R_s}$ ossia $(R_s + d)(R - R_s) = (R_s - d)(R_s + R)$

$R_sR - R_s^2 - R_sd + Rd = R_s^2 + R_sR - R_sd - Rd$ quindi $-R_s^2 + Rd = R_s^2 - Rd$ ossia
$d = R_s^2/R$

Sostituendo nella (*) $q' = -(R_s + R_s^2/R)\dfrac{Q_0}{R_s + R} = -\dfrac{R_s}{R}Q_0$.

Determinati i valori di q' e d il campo elettrico in ogni punto dello spazio puo' essere calcolato come somma vettoriale dei campi elettrici coulombiani determinati dalle due cariche Q0 e q'. Sulla superficie della sfera conduttrice la densita' di carica superficiale indotta sara' uguale al modulo del campo elettrico subito all'esterno del conduttore moltiplicato per ε_0 e quindi la carica totale indotta sara' uguale proprio a q'. Questo risultato puo' essere ricavato applicando la legge di gauss a una superficie chiusa arbitraria che contiene interamente il conduttore ma non Q0. Per la legge di Gauss, nel sistema delle cariche fittizie il risultato e' q'/ε_0 mentre nel sistema reale il risultato e' pari alla carica totale indotta diviso per ε_0 .

Se il potenziale elettrostatico sul conduttore φ_0 e' diverso da zero allora alle due cariche fittizie basterà aggiungere una terza carica q" al centro della sfera che lascerà la superficie sferica equipotenziale ma il valore φ_0 sara' dato da $\varphi_0=kq''/Rs$. Se invece piuttosto che conoscere il potenziale sul conduttore conosciamo la carica totale Qtot, allora il valore della terza carica fittizia q" al centro della sfera dovrà essere scelto in modo che q"+q' = Qtot.



Quesito 3 (fino a 12 punti)
Il circuito elettrico in figura è alimentato da un generatore di f.e.m. di 10 V e costituito dalle resistenze R0 = 1 kΩ, R1 = 500 Ω, R2 = 700 Ω, R3 = 1500 Ω e Rx= 600 Ω, collegate come in figura. Si calcoli la differenza di potenziale ai capi del resistore R0 e la potenza dissipata su R0. Quale valore dovrebbe assumere R1 in modo tale che la corrente che scorre in R0 sia nulla ?

Le correnti che scorrono nel circuito e i nodi sono etichettati in figura (i versi delle correnti sono convenzionali, il segno stabilira' il verso effettivo).
Ai nodi abbiamo $i_g = i_1 + i_3$, $i_3 = i_0 + i_4$ e $i_g = i_2 + i_4$ (3 equazioni)
Alle maglie abbiamo
$\epsilon = i_1R_1 + i_2R_2 = i_3R_3 + i_4R_x$ e ancora $\varphi_D - \varphi_C = i_0R_0 = i_1R_1 - i_3R_3$ (3 equazioni).

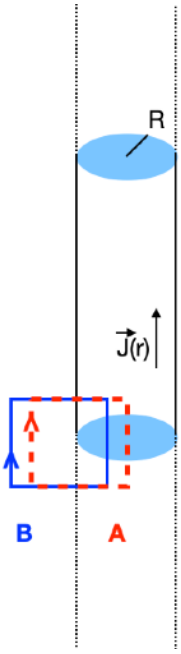
$$\begin{cases} i_g - i_1 - i_3 & = 0 \\ i_3 - i_0 - i_4 & = 0 \\ i_g - i_2 - i_4 & = 0 \\ i_1R_1 + i_2R_2 & = \epsilon \\ i_3R_3 + i_4R_x & = \epsilon \\ i_0R_0 - i_1R_1 + i_3R_3 & = 0 \end{cases}$$

Dalla risoluzione del sistema di sei equazioni (tutte indipendenti tra loro) in sei incognite si ricavano tutte le correnti.
La potenza dissipata su R0 e' $P_{R_0} = R_0 i_0^2$.
La ddp ai capi di R_0 e' data da $\varphi_D - \varphi_C = i_0R_0 = i_1R_1 - i_3R_3$.
In realta' si puo' osservare che $\varphi_C - \varphi_D = 0 \;\; \rightarrow \;\; i_0 = 0 \;\; \rightarrow i_1 = i_2$ e $i_3 = i_4$. Inoltre, in questo caso $i_i(R_1 + R_2) = i_3(R_3 + R_x)$ e $-i_1R_1 + i_3R_3 = 0 \rightarrow i_1 = i_3R_3/R_1$ e sostituendo
$i_1(R_1 + R_2) = i_3(R_1 + R_2)\dfrac{R_3}{R_1} = i_3(R_3 + R_x)$.

Quindi affinché in R0 non scorra corrente si deve avere $R_1 = \dfrac{R_2R_3}{R_x} = 1750\ \Omega$.

Quesito 4 (fino a 12 punti)

Una distribuzione di corrente cilindrica di lunghezza infinita e raggio R=10 cm caratterizzata da una densità di corrente uniforme $\vec{J} = J_0\hat{z}$ con $J_0 = 10^3\ \mathrm{A/m^2}$ parallela all'asse del cilindro produce un campo magnetico nello spazio che determina una forza magnetica su una spira quadrata di lato a=2R percorsa dalla corrente i=1 A.
Si valuti la forza sulla spira quando essa si trova nella posizione A (in cui un lato è sull'asse del cilindro) e nella posizione B (in cui un lato è parallelo all'asse alla distanza R/2).



La distribuzione di corrente a simmetria cilindrica (le grandezze fisiche dipendono solo dalla distanza dall'asse e le linee di campo magnetico si avvolgono attorno all'asse, quindi sono dirette come $\hat{\phi}$) permette di utilizzare la legge di Ampere per il calcolo del campo magnetico. Per calcolare il campo in un punto P generico a distanza r dall'asse, si calcola la circuitazione del campo magnetico sulla circonferenza orientata (per esempio in senso antiorario) γ coassiale al cilindro che passa per P, quindi di raggio r.

Allora $\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_\gamma B(r)\hat{\phi}\cdot dl\hat{\phi} = B(r)2\pi r = \begin{cases} \mu_0 J_0 \pi r^2 & r < R \\ \mu_0 J_0 \pi R^2 & r \geq R \end{cases}$

Quindi $\vec{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 \frac{J_0 r}{2}\hat{\phi} & r < R \\ \mu_0 \frac{J_0 R^2}{2r}\hat{\phi} & r \geq R \end{cases}$.

La forza sulla spira quadrata γ percorsa da corrente si calcola con la formula di Laplace $\vec{F} = \oint_\gamma i d\vec{l} \wedge \vec{B}$. Quando la spira si tra in A, sul lato che coincide con l'asse il campo magnetico e' nullo e quindi anche la forza. Sui tratti orizzontali agiscono forze quali e opposte che si compensano. Quindi la spira e' soggetta a una forza risultante che coincide con la forza sia lato esterno alla distribuzione

$\vec{F}_A = i\int_0^{2R} dz\hat{z}\wedge\vec{B}(2R) = i\int_0^{2R} dz\hat{z}\wedge\frac{\mu_0 J_0 R^2}{4R}\hat{\phi} = -\frac{i\mu_0 J_0 R^2}{4R}\hat{r}\int_0^{2R} dz = -\frac{i\mu_0 J_0 R^2}{2}\hat{r} =$
$-0.5\times 4\pi\times 10^{-7}\times 10^3\times 10^{-2}\hat{r} = -2\pi\times 10^{-6}\ \mathrm{N}\ \hat{r}$. Si tratta di una forza attrattiva.

Quando la spira si trova nella posizione B c'e' una forza $\vec{F}_e$ attrattiva sul lato esterno alla distribuzione e una forza repulsiva $\vec{F}_i$ sul lato interno. Nel complesso si ha:

$\vec{F}_e = i\int_0^{2R} dz\hat{z}\wedge\vec{B}(\frac{5}{2}R) = i\int_0^{2R} dz\hat{z}\wedge\frac{\mu_0 J_0 R^2}{5R}\hat{\phi} = -\frac{i\mu_0 J_0 R^2}{5R}\hat{r}\int_0^{2R} dz = -\frac{2i\mu_0 J_0 R^2}{5}\hat{r}.$

Invece

$\vec{F}_i = -i\int_0^{2R} dz\hat{z}\wedge\vec{B}(\frac{R}{2}) = -i\int_0^{2R} dz\hat{z}\wedge\frac{\mu_0 J_0 R}{4}\hat{\phi} = \frac{i\mu_0 J_0 R}{4}\hat{r}\int_0^{2R} dz = \frac{i\mu_0 J_0 R^2}{2}\hat{r},$

pertanto $\vec{F}_B = -\frac{2i\mu_0 J_0 R^2}{5}\hat{r} + \frac{i\mu_0 J_0 R^2}{2}\hat{r} = \frac{i\mu_0 J_0 R^2}{10}\hat{r} = -\frac{1}{5}\vec{F}_A = 4\pi\times 10^{-7}\ \mathrm{N}\ \hat{r}$

Quesito 5 (fino a 8 punti)
Si discuta uno degli argomenti elencati:

1) Il moto di un dipolo elettrico in un campo elettrico uniforme (forze, momenti torcenti, energia potenziale);
2) Si discuta il moto di una particella puntiforme carica che entra in una regione dello spazio in cui coesistono un campo elettrico e un campo magnetico uniformi perpendicolari l'uno all'altro. La velocità iniziale della particella sia parallela al campo elettrico;
3) Si dimostri che l'energia immagazzinata in un condensatore di capacità C sulle cui armature c'è una carica Q è interamente dissipata per effetto Joule quando le due armature sono collegate l'una all'altra con un conduttore di resistenza ohmica R.

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\vec{E}$ e potenziale φ prodotti da una carica puntiforme: $\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$; $\varphi(r) = k\frac{q}{r}$

Campo $\vec{E}$ e potenziale φ di dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$; $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\,dV$