

Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 71 - a.a. 2024-2025

Quesito 1 (fino a 12 punti)

Ci consideri un disco di raggio $R=10$ cm e di spessore trascurabile su cui è depositata, con densità superficiale uniforme σ , la carica $Q_0=10$ nC. Si calcoli (si discuta la metodologia utilizzata e la si applichi al caso specifico proposto dall'esercizio svolgendo i calcoli necessari) il campo elettrico e il potenziale elettrostatico sui punti dell'asse, scegliendo un sistema di riferimento in cui l'asse z coincide con l'asse del disco e l'origine dell'asse è sul disco. Si discuta la dipendenza del campo e del potenziale dalla coordinata z nel limite $z \rightarrow 0$, $z \rightarrow +\infty$ e $z \rightarrow -\infty$. In particolare, si valuti il campo elettrico e il potenziale nei punti dell'asse a distanza $d=10$ cm dal centro del disco. Si valuti in funzione della coordinata z (positiva e negativa) l'energia potenziale dei dipoli elettrici $\vec{p}_1 = p\hat{z}$ e $\vec{p}_2 = p\hat{x}$ (si assuma $p>0$) collocati sull'asse.

Quesito 2 (fino a 12 punti)

Un condensatore sferico è caratterizzato dai seguenti parametri geometrici: $R_1=2.5$ cm (raggio della sfera conduttrice interna, denominata conduttore 1), $R_i=5$ cm (raggio della cavità sferica del conduttore esterno, denominato conduttore 2), $R_e=10$ cm (raggio esterno del conduttore esterno).

1) Si ricavi la capacità del condensatore in funzione dei suoi parametri geometrici,

utilizzando la definizione $C = \frac{\Delta Q_{1 \rightarrow 2}}{\varphi_1 - \varphi_2}$ dove $\Delta Q_{1 \rightarrow 2}$ è la carica che bisogna spostare dal

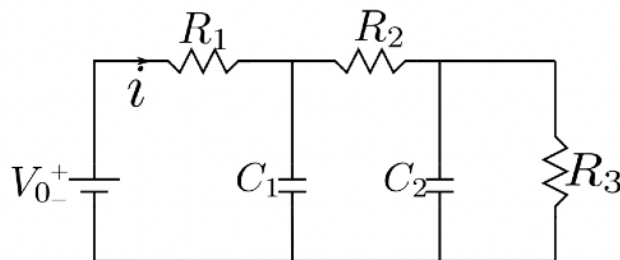
conduttore che si trova a potenziale φ_1 a quello che si trova a potenziale φ_2 per annullare la differenza di potenziale tra i due conduttori.

2) Assumendo che sul conduttore interno (1) ci sia una carica complessiva $Q_1 = 10$ nC e sul conduttore esterno una carica totale $Q_2 = -20$ nC, si determini la densità superficiale di carica su ciascuna superficie dei conduttori, si calcoli il campo elettrico immediatamente all'esterno di ogni superficie dei conduttori (nella cavità e all'esterno), si valuti la differenza di potenziale tra i due conduttori, infine l'andamento del campo elettrico e del potenziale elettrostatico (si fissi potenziale nullo a distanza infinita dal sistema di cariche).

Quesito 3 (fino a 12 punti)

Il circuito elettrico in figura è costituito da tre resistenze, $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 800 \Omega$, $R_3 = 500 \Omega$ e due condensatori $C_1 = 200$ nF e $C_2 = 1$ μ F, collegati ad un generatore con differenza di potenziale $V_0 = 10$ V. Calcolare in condizioni stazionarie la potenza erogata dal generatore e l'energia elettrostatica U_1 e U_2 accumulata in ciascuno dei due condensatori.

Supponendo che, ad un dato istante, la resistenza R_3 venga scollegata dal circuito, si valuti la carica accumulata sul condensatore C_1 dopo un tempo sufficientemente lungo affinché sia raggiunta la nuova condizione stazionaria



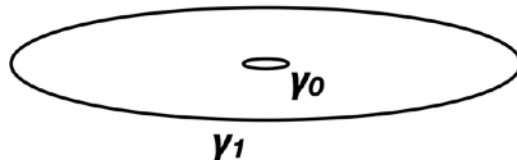
Quesito 4 (fino a 12 punti)

In figura sono illustrate due spire conduttrici circolari e concentriche di raggi $r_0=1$ cm e $r_1=20$ cm con $r_0 < r_1$ e con resistenze ohmiche $R_0=100 \Omega$ e $R_1=5 \Omega$. Se nella spira esterna scorre in senso antiorario una corrente

$I_1 = Ie^{-t/\tau}$ con $I = 10$ A e $\tau = 2$ μ s si valuti la corrente

che scorre nella spira interna, il suo verso, l'energia complessivamente dissipata sulla spira interna.

Si consideri ora la situazione opposta, in cui la corrente $I_1 = Ie^{-t/\tau}$ scorre in verso orario nella spira γ_0 e si vuole valutare corrente (con il suo verso) e energia dissipata nella spira esterna.



Quesito 5 (fino a 8 punti)

Si discuta uno degli argomenti elencati:

- 1) Il dipolo elettrico, proprietà del campo e del potenziale; importanza del sistema elettrico dipolo.
- 2) Si dimostri che il campo di Biot Savard, prodotto da un filo rettilineo infinito percorso da una corrente stazionaria, rispetta la legge di Ampere in forma integrale.
- 3) Si dimostri che l'energia immagazzinata in un condensatore di capacità C sulle cui armature c'è una carica Q è interamente dissipata per effetto Joule quando le due armature sono collegate l'una all'altra con un conduttore di resistenza ohmica R. Si dimostri che il valore di R non influisce sulla energia dissipata ma sul tempo necessario per scaricare completamente il condensatore.

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{F/m};$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m},$$

$$k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$$

$$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}, m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{Kg}, m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{Kg}, M_{\text{He}} \approx 4 m_p$$

Campo $\vec{E}$ e potenziale φ prodotti da una carica puntiforme: $\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2} \hat{r}; \quad \varphi(r) = k \frac{q}{r}$

Campo $\vec{E}$ e potenziale φ di dipolo: $\vec{E}(r, \vartheta) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}; \quad \varphi(r, \vartheta) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r, \vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5};$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} dV; \quad d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} dV$

OPERATORI DIFFERENZIALI ED ELEMENTI DI LINEA, SUPERFICIE E VOLUME

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \hat{z}$	$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right) \hat{z}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi)\right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \hat{\phi}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2 \mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$	$\left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \hat{\rho} + \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right) \hat{\phi} + (\nabla^2 A_z) \hat{z}$	$\left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \hat{r} + \left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \hat{\theta} + \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \hat{\phi}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho} + \rho dz d\phi \hat{\phi} + \rho d\rho d\phi \hat{z}$	$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$
Volume infinitesimo	$dv = dx dy dz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

IN COORDINATE CARTESIANE (1A COLONNA DA SINISTRA) CILINDRICHE (2A COLONNA) SFERICHE (3A COLONNA)