RIPORTATO IN $\boxed{\text{JEANS}}$ APPENDIX $\boxed{\text{Pg. 54}}$

$$\text{(1)}\quad \frac{d\rho}{dt} + \nabla\cdot\rho v = 0 \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot\rho v = -\frac{d\rho}{dt}$$

CONS. DELLA MASSA (EQ. DI CONTINUITA')

$$\text{(2)}\quad \frac{d}{dt}\rho v + \nabla\cdot\rho v v = -\nabla P - \rho\nabla\Phi$$

Conserv. quantità di moto (EQ. DI EULERO)

$$\text{(1)}\quad \frac{d\rho}{dt} + \nabla\rho\cdot v + \rho\Delta v = 0$$

$$\text{(2)}\quad \frac{d\rho}{dt}\cdot v + \rho\frac{dv}{dt} + \boxed{\nabla(\rho v)}\cdot v + \rho v\nabla v = -\nabla P - \rho\nabla\Phi$$

$$\cancel{\frac{d\rho}{dt}\cdot v} + \rho\frac{dv}{dt} + \cancel{-\frac{d\rho}{dt}\cdot v} + \rho v\nabla v = -\nabla P - \rho\nabla\Phi$$

$$\text{(2)}\quad \rho\frac{dv}{dt} + \rho v\nabla v = -\nabla P - \rho\nabla\Phi \Rightarrow$$

$$\text{(2)} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\dfrac{dv}{dt} + v\nabla v = -\dfrac{\nabla P}{\rho} - \nabla\Phi} & \text{EQ. di EULERO (A)} \\[2ex] \dfrac{d\rho}{dt} + v\nabla\rho + \rho\nabla v = 0 & \text{la (1)} \rightarrow \text{(B)} \\[2ex] \nabla^2\Phi = 4\pi G\rho & \text{POISSON (C)} \\[2ex] P = \dfrac{N_0 k_B T}{\mu} = v_s^2\rho & \text{Eq. stato gas} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} kT} \qquad v_{th} = \sqrt{\frac{1kT}{m}} = v_s = \sqrt{\frac{kT}{\mu m_H}}$$

(problema unidimensionale)

COME SCRIVERE P in termini di v_{suono}

$$P = NKT = \frac{N_0}{\mu} k_B T = \frac{K \rho T}{\mu m_H} = v_s^2 \cdot \rho$$

Perturbando: $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, $P = P_0 + P_1$, $v = v_0 + v_1$

la prima delle 4 diventa

$$\frac{dv_1}{dt} + (v_0+v_1)\Delta v_1 = -\boxed{\frac{\nabla P_1}{(\rho_0+\rho_1)}} - \nabla \Phi_1 = -\boxed{\nabla v_s^2 \rho_1} \nabla \Phi_1$$

EQ. STATO

ponendo $v_0 = \phi$ e V_s = costante [perché T = cost (approssim. isoterma)]

$$\frac{dv_1}{dt} + \underbrace{v_1 \Delta v_1} = -\frac{\nabla v_s^2 \rho_1}{\sim \rho_0} - \nabla \Phi_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv_1}{dt} + \text{(trascuro i termini non lineari perché} \ll \text{degli altri)} = -\frac{\nabla v_s^2 \rho_1}{\rho_0} - \nabla \Phi_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv_1}{dt} + \nabla\left(\Phi_1 + v_s^2 \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) = 0$$

EQ. DI EULERO — vedi lettera (A)

$$\frac{d\rho_1}{dt} + (v_0+v_1)\nabla(\rho_0+\rho_1) + (\rho_0+\rho_1)\cdot\nabla(v_0+v_1) = 0 \Rightarrow$$

VEDI (B)

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \boxed{v_1 \nabla \rho_1} + \rho_0 \nabla \cdot v_1 + \boxed{\rho_1 \nabla v_1} = 0$$

trascuro non lineari piccoli

VEDI (C)

$$\nabla^2 \Phi_1 - 4\pi G \rho_1 = 0$$

Segue la relazione con il determinante:
questa terza eq. (C) si giustifica così

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \Rightarrow \nabla^2(\Phi_0 + \Phi_1) = 4\pi G(\rho_0 + \rho_1)$$

$$\cancel{\nabla^2 \Phi_0} + \nabla^2 \Phi_1 = \cancel{4\pi G \rho_0} + 4\pi G \rho_1$$

In realtà assumiamo un fluido uniforme e statico $v_0 = \emptyset$ e quindi P_0 e ρ_0 sono costanti.
~~L'equilibrio~~ prima delle perturbazioni. MA...
se P e ρ sono costanti con anche $v_0 = 0$ l'equazione di Eulero imporrebbe che $\nabla \Phi = \emptyset$ cosa che implicherebbe (per l'eq. di POISSON $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$) anche $\rho = \emptyset$ una situazione non fisica.
Questo dilemma è superato da Jeans intuitivamente dicendo che il campo gravitazionale determinato dal fluido originale è molto più debole di quello generato dalle perturbazioni (JEANS SWINDLE assumption) cosa che è tanto più realistica quanto più il fluido è infinitamente esteso e uniforme (caso astrofisico). Quindi

$$\nabla^2(\Phi_0 + \Phi_1) = 4\pi G(\rho_0 + \rho_1)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1$$